

## 構造変化を考慮した砂の繰返し構成モデル

Keywords: 異方性, 砂, 構成モデル

東北学院大学 国際会員 飛田善雄  
正会員 吉田望 山口晶  
学生会員 日下初博 菅原光哉  
西村修

## 1 はじめに

地盤材料の非線形な現象論的構成モデルは、物体内部の微視的構造の挙動を反映する内部変数を導入することにより表現される。導入した内部変数が明確な物性的意味をもつことが望ましいのであるが、一般には明解な意味を持たせることはできない。例えば、繰返し載荷に対する弾塑性モデルで、背応力、応力反転点などの2階のテンソル量がどのような物性的意味をもつかを明確に議論することは、特に地盤材料に対しては、困難である。

粒状体力学の分野においては、内部構造の変化に対する研究が活発に行われ、初期異方性は粒子の長軸方向の配列に起因し、載荷中の(応力)誘導異方性は、粒子間の接触点の分布の変化に起因することが知られている。また、応力載荷時の接触点分布の変化に対する基本的知見も得られている<sup>1), 2)</sup>。

本研究では、これらの粒状体の内部構造変化の基本的知見を満足する構成テンソルの発展則を構築し、その誘導異方性の変化が応力・ひずみ関係に及ぼす影響を修正応力法<sup>3), 4)</sup>を用いて表現した。

## 2 構成テンソルと修正応力について

ここでは、構成テンソルを物体の内部構造の変化を考慮した応力を導入するために必要な変換を行うテンソルと定義し、 $\mathbf{H}$ と表現する。 $\mathbf{H}$ は式(1)で定義される<sup>1)</sup>。

$$\mathbf{H} = (\mathbf{F})^{-1} \quad (1)$$

ここで、 $\mathbf{F}$ はファブリックテンソルで、式(2)で定義される。

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{C}}{C_0} \quad (2)$$

また、 $\mathbf{C}$ は粒子間接触点方向分布を表すコンタクトテンソルで、 $C_0$ はコンタクトテンソルの標準値である。

本研究では、構成テンソルと応力は共軸性を有し、主応力軸の回転も生じない条件で議論している。すなわち、数学的厳密性は犠牲にしても、粒状体力学における知見を簡単な数式で表現することを優先した。本研究で得られた発展則はテンソル関数として必要な性質は満たしていないことを断っておく。

修正応力法における修正応力とは、応力を構成テンソルで線形変換した応力と定義される。例えば、Tobita and Yanagisawa<sup>2)</sup>は、粒状体に関する研究より粒子同士の接触面積の分布が異方的であることに着目し、次式で定義される修正応力について議論を行った。

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} + \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}); \quad T_{ij} = \frac{1}{2}(\sigma_{ik}H_{kj} + H_{ik}\sigma_{kj}) \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{H}$ は構成テンソル、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力、 $\mathbf{T}$ は修正応力を表現している。

式(3)に対して、構成テンソルの主軸方向を座標系として選択し、次式のベクトル・マトリクス表現が得られる。

$$\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (4)$$

次に修正応力空間で既存の応力・ひずみ関係を考える。そのときの一般式は、等長変換を用いたベクトル・マトリクス表現により次式で与えられるものとする。

$$\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (5)$$

ここで、 $[\mathbf{E}]$ は既存モデルの構成マトリクスである。式(4)と式(5)より次式が得られる。

$$[\mathbf{H}]\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (6)$$

よって、式(6)を変形すると式(7)が得られる。

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{H}]^{-1}[\mathbf{E}]\{\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (7)$$

以上の演算より、誘導異方性を加味した構成マトリクスが、既存の構成マトリクスと逆変換マトリクスの積として表現されることがわかる。

## 3 誘導異方性の発展則の定式化

Oda<sup>2)</sup>は誘導異方性に関する実験を行い、実験式を導いた。その実験式を構成テンソルの主値 $H_i$ で表現すると以下の式になる。

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = C_1 \frac{H_3}{H_1} \quad (8)$$

$C_1$ は定数で、 $\sigma_i$ は応力の主値である。すなわち、構成テンソルの発展則については、式(8)が制約条件となる。本研究では、式(8)を正のダイレイタンシー領域の発展則の制約条件として利用した。

構築した発展則について説明する。載荷過程では、最大圧縮力方向には接点数の増加、最大圧縮力に直交する方向では接点数の減少が起こる実験事実<sup>1)</sup>があり、発展則の形を次式のように定義した。

$$\dot{H}_i^{nor} = h\dot{\sigma}_i \quad h = \frac{tr(\mathbf{T})}{\alpha} \quad (9)$$

ここで、 $\dot{H}_i^{nor}$ は通常時の発展則、 $\alpha$ は定数、 $\dot{\sigma}_i$ は応力速度の主値である。

次に、載荷過程で正のダイレイタンシーが発揮されると最大圧縮力に直交する方向では急激な粒子接点数の減少が起こる実験事実<sup>1)</sup>がある。この実験事実より、式(9)

以外に式(8)を満たすような大きな粒子接点数の減少があるとした。式(8)を微分したものに式(9)を代入して、正のダイレイタンス領域で起こる最大圧縮力に直交する方向の発展則  $\dot{H}_3^{cr}$  について求めると、以下となる。

$$\dot{H}_3^{cr} = \left( \frac{H_3}{\sigma_1} + \frac{tr(\mathbf{T})H_3}{\alpha H_1} \right) \dot{\sigma}_1 - \frac{H_3}{\sigma_3} \dot{\sigma}_3 \quad (10)$$

この  $\dot{H}_3^{cr}$  により、正のダイレイタンスが発揮される領域での異方的な構造の発達が表示されることになる。よって、荷重過程での最大圧縮力に直交する方向の発展則は、 $\dot{H}_3 = \dot{H}_3^{nor} + \dot{H}_3^{cr}$  で表される。

次に、除荷時は荷重時とは逆に最大圧縮力方向には粒子接点数の減少、最大圧縮力に直交する方向では粒子接点数の増加が起こるとし、発展則の形は式(9)と同じ形とした。ここで、荷重過程では正のダイレイタンスが発揮されると、最大圧縮力方向へ大きな間隙(間隙の長軸方向は最大圧縮力方向と一致する)が発生する実験結果<sup>1)</sup>がある。この間隙は除荷時にその構造が崩壊すると考えられる。そこで修正応力が  $T_1 = T_3$  となった時、最大圧縮力に直交する方向においては間隙が塞がれるため、粒子接点数が増加するとした。またその時、間隙の崩壊によるひずみが発生すると考え、計算過程でひずみを与えた。

#### 4 解析結果

図1は本研究で構築した発展則を用いた構造テンソルの主値・計算ステップ関係である。初期値を1.0とし、細い実線が最大圧縮力方向( $H_1$ )で、太い実線が最大圧縮力に直交する方向( $H_3$ )である。横軸は計算ステップで、計算ステップ416回から除荷とした。

本研究で構築した発展則と修正応力を用いて、誘導異方性のみを考慮した排水条件での三軸繰返し荷重試験の再現を試みた。なお本研究では、繰返し荷重用弾塑性モデルである飛田・吉田モデル<sup>4)</sup>を既存のモデルとして解析を行った。

図2は、既存のモデル(等方体)と誘導異方性を考慮したせん断応力・せん断ひずみ関係である。細い実線が既存、太い実線が誘導異方性を考慮した計算結果である。この結果より荷重時には大きいせん断応力が発生し、接点数の増加に伴う強度増加が現れていることがわかり、また除荷時には構造の崩壊によるひずみの発生が表現できていることがわかる。

#### 5 まとめ

本研究は、粒状体力学での知見に基づいて、構造テンソルの発展則を定め、その構造テンソルを利用して修正応力法を用いて、誘導異方性が応力・ひずみ関係に及ぼす影響について基本的考察を行い、以下の結論を得た。

- 1) 単純な条件(3軸圧縮・伸長、主応力軸の回転なし)ではあるが、既存の知見と整合性をもつ発展則の構築を行った。今後、数学的厳密性を満足できる発展則への改良が必要である。
- 2) 構築した発展則を利用し、誘導異方性を考慮した応力・ひずみ関係と特徴の一部が表現できた。実験との整合性を求めていきたい。

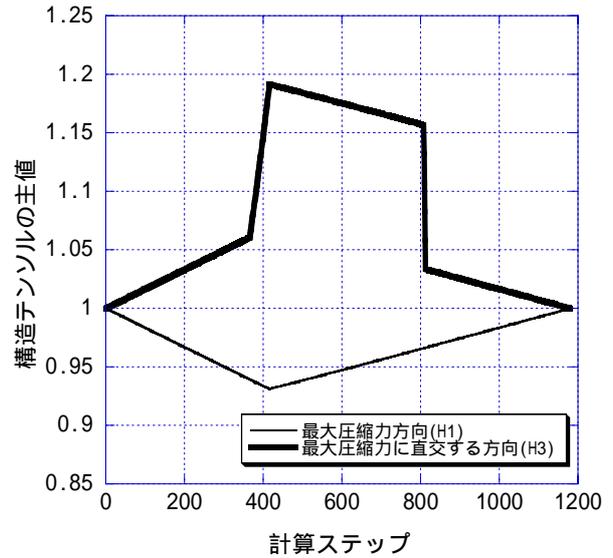


図1 構造テンソルの主値の変化

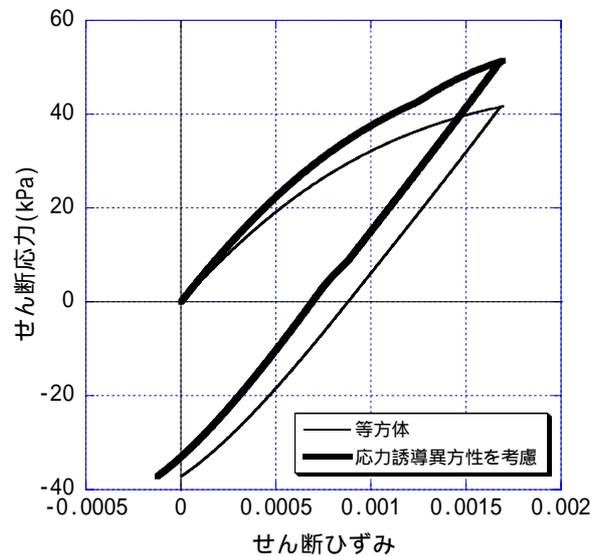


図2 せん断応力・せん断ひずみ関係

#### 参考文献

- 1) 社団法人 土質工学会：粒状体の力学，社団法人 土質工学会 粒状体力学に関する国内委員会，1993.
- 2) Oda, M.: Significance of Fabric in Granular Mechanics, Proceedings of the U.S.-Japan Seminar on Continuum-Mechanical and Statistical Approaches in the Mechanics of Granular Materials, 1978.
- 3) Tobita, Y. and Yanagisawa, E.: Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials, Soils and Foundations, 32, 1, pp.85-99, 1992.
- 4) Tobita, Y. and Yoshida, N.: An isotropic bounding surface model for cyclic behavior of sand; Limitation and modification, Proc. of Int. Conf. on Prefailure behavior of sands, Sapporo, Balkema, pp.457-462, 1994.