

Applicability of conventional mathematical equation on shear stress-shear strain relationships up to large strain

吉田 望

Nozomu YOSHIDA

地盤の地震応答解析によく用いられる、双曲線モデルと Ramberg-Osgood モデルの大ひずみ域での適用性を評価するために、約 500 の繰返しせん断試験の結果を集め、モデルパラメータを一定の方法で設定し、骨格曲線のずれを定量評価した。その結果、双曲線モデルは大ひずみ時の応力を過小評価する傾向があるものの、全体の適合性が一番良いことが分かった。また、Ramberg-Osgood モデルでは減衰の適合性も考慮したモデルが一番誤差が大きく、骨格曲線のみに着目したケースの誤差が小さかった。Ramberg-Osgood モデルの適合性が悪かった理由は、大ひずみ域でのひずみの増加の程度が大きいことである。

キーワード：双曲線モデル, Ramberg-Osgood モデル, 大ひずみ
Hyperbolic model, Ramberg-Osgood model, Large strains

1 はじめに

繰返しせん断試験¹⁾で得られる力学特性をここでは繰返しせん断特性と呼ぶことにする。地盤の地震応答解析ではこれをなるべく忠実にモデル化して解析することが精度を上げるために必須である。与えられた繰返しせん断特性を完全に満たすことの出来るようなモデルも提案されている²⁾が、多くの解析プログラムでは、数式モデルが用いられている。代表的なものは双曲線モデルと Ramberg-Osgood モデル(R-O モデル)である。本論では、全応力解析を意識して、最大ひずみ 1%までの領域を対象として、多数の繰返しせん断試験の結果に対してこれらモデルの適用性を示す。なお、本論の内容は文献³⁾の中から関係する部分を抜き出したものである。

2 用いた材料

検討に用いたのは、東京、神奈川、埼玉、千葉、茨城の 5 都県、95 地点で採取した試料である。表 1 にその一覧を、図 1(a)(b)に繰返しせん断特性を示す。ここで、 G はせん断剛性（いわゆる割線剛性）、 G_0 は最大せん断剛性（モデルではせん断弾性係数）、 γ はせん断ひずみ、 h は等価減衰比である。

図 1 では、多くの試験結果を一枚の図に入れているので、個々の結果を判読することは困難である。そこで、砂質土は青い実線で、粘性土は赤い破線で表現し、さらに粘性土を砂質土の上に作図することによって砂質土、粘性土のおおよその範囲がわかるようにしている。同じ表現は図 1 以外の類似の図でも用いており、以後は特に

凡例としては示さない。

繰返しせん断特性試験は応力制御（除荷点を応力で設定する制御法）で行われていることが多いので、ひずみの値や点の数は試験によりまちまちである。統計的な処理をするためには、点の数などは同じ方が都合が良い。そこで、点列を応力-ひずみ関係上で Besier 曲線により補間し、同じひずみに対するせん断特性を求めた。ひずみの範囲は $10^{-6} \sim 10^{-2}$ 、各桁 1, 2, 5 の三つのひずみ値で特性を求める。すなわち一つの試料では点の数は 13 である。なお、実験によっては最大ひずみが 10^{-2} に満たないことがあるが、その場合には最大ひずみの点で接線が連続する双曲線で外挿した。減衰特性では内挿補間は同様な方法で行うが外挿補間を行わず、統計処理は内挿部分のみで行った。

応力は G と γ の積として得られるが、実験値は G/G_0 が与えられているだけである。 G/G_0 と γ の積はせん断応力 τ を G_0 で無次元化したものになるので、本報告ではせん断剛性比と同様、応力を G_0 で無次元化して検討に用いる。以下では、 τ/G_0 をせん断応力比（Shear stress ratio）と呼ぶ。図 1(c)にはこのようにして求めた応力比-ひずみ関係式を示す。なお、 τ/G_0 の値は非常に小さいので、縦軸の数値をわかりやすくするため、1000 倍し $1000\tau/G_0$ で表示している。これは以下の図でも同様である。

本報告では図の大部分は表 1 の分類に基づいて示している。そこで、図 2 に共通に用いる凡例を示す。また、各試料には番号が付けられている（図では Specimen number として引用）が、これは、試料を表 1 の上の方か

* 東北学院大学工学部 教授

Prof., Tohoku Gakuin University

表1 試料の分類方法

地質年代		関東地方における地層名の例	堆積環境 (微地形区分)	土質・岩質	記号	試料数			
						全部	I_p	F_c	D_{50}
造成		埋土・盛土・表土		粘性土	1-Bc	10	7	10	10
				砂質土	2-Bs	14	2	14	14
完新世	後期	沖積層	砂丘砂	風成(砂丘)	砂質土	3-As	2	0	0
			海浜・浅海成(砂州など)	砂質土	4-As	13	0	13	13
				砂礫・礫	5-Ag	0	0	0	0
			汽水成(三角州)	粘性土	6-Ac	12	10	12	12
				砂質土	7-As	15	3	15	15
			河成(河床・自然堤防・扇状地・谷底低地), 後背湿地成(後背湿地・沼沢)	腐植土	8-Ap	3	2	2	2
				粘性土	9-Ac	30	29	30	25
				砂質土	10-As	28	0	28	28
				砂礫・礫	11-Ag	0	0	0	0
	前期	有楽町層下部	海成(一部河成)	粘性土	12-Ac	115	97	109	109
				砂質土	13-As	24	5	22	22
				砂礫・礫	14-Ag	0	0	0	0
更新世	末期	七号地層, 戸田層, 伊刈層, 八潮層など	海成	粘性土	15-Ac	17	15	17	17
				砂質土	16-As	5	1	5	5
	後期	洪積層	降下火山灰	関東ローム	17-Lm	15	14	14	14
				粘性土	18-Dc	6	5	6	6
				砂質土	19-Ds	0	0	0	0
				砂礫・礫	20-Dg	0	0	0	0
	中期	多摩ローム層, 常総粘土層, 茨城粘土層, 下末吉層, 東京層, 東京礫層, 相模層群, 成田層群, 下総層群とその相当層(江戸川層, 舎人層, 相模層, 埼玉層など)	降下火山灰	関東ローム	21-Lm	0	0	0	0
				粘性土	22-Dc	75	53	70	69
				砂質土	23-Ds	93	1	75	75
				砂礫・礫	24-Dg	1	0	1	1
鮮新世	前期	上総層群		固結粘性土・泥岩	25-Dc	4	4	4	4
		三浦層群		砂質・礫質岩	26-Dsg	0	0	0	0

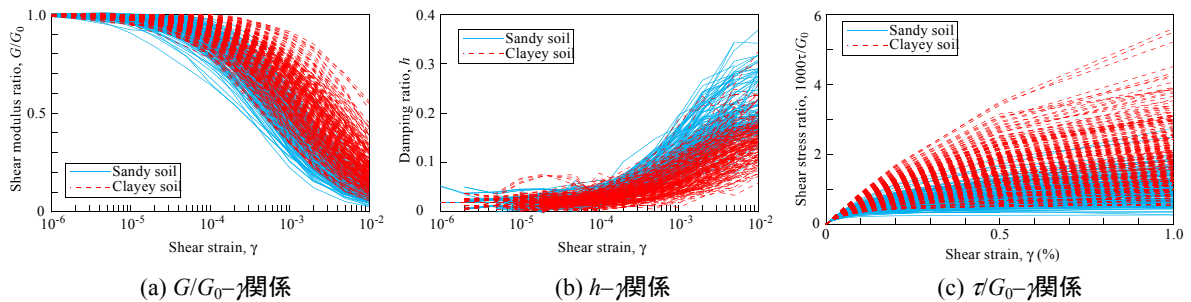


図1 用いた繰返しせん断特性

ら, 各分類の中では拘束圧の小さいものから並べたものである。図4に試験条件である初期有効拘束圧 σ_m と特性値(I_p , F_c , D_{50})の分布を示す。砂質土で I_p が計測されている試料はわずかであり, いずれも30以下である。特性値で見ると, 粘性土と砂質土は明瞭に分かれている。また, 図3に特性値間の関係を示す。それぞれの間には相関はあるが, 一方ではばらつきも多い。なお, 図3(b), (c)では砂質土を表す青いシンボルの試料が少ないが, これは, I_p が計測されている試料が少ないためである。

3 数式モデル

土の弾塑性挙動を表す構成モデルは多く提案されているが, 実務でよく用いられるのは双曲線モデル⁴⁾, Ramberg-Osgoodモデル⁵⁾などの簡易な数式である。実験値の整理としてはHardin-Drnevichモデル⁶⁾もよく用いられる。本報告では以下の数式モデルを検討の対象とする。

3.1 Hardin-Drnevich モデルと双曲線モデル

HardinとDrnevichは次の実験式を提案した⁶⁾。

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 + \gamma/\gamma_r}, \quad h = h_{max} \left(1 - \frac{G}{G_0} \right) = \frac{h_{max}\gamma}{1 + \gamma/\gamma_r} \quad (1a, b)$$

ここで, γ_r は基準ひずみ, h_{max} は最大減衰比で, この二つがHardin-Drnevichモデルのパラメータとなる。土の繰返しせん断特性は, せん断剛性 G と減衰定数 h のひずみ振幅依存性として表されるが¹⁾, せん断剛性は最大値(またはそれに対応する量) G_0 で無次元化し, G/G_0 - γ 関係で表現されるのが一般的なため, ここでもその方法を用いている。式(1a)は応力-ひずみ関係で表示すると, 次のようになる。

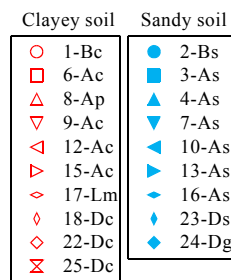


図2 凡例

$$\tau = \frac{G_0 \gamma}{1 + \gamma / \gamma_r} \quad \text{または} \quad \frac{\tau}{\tau_f} = \frac{\gamma / \gamma_r}{1 + \gamma / \gamma_r} \quad (2a, b)$$

ここで、 $\tau_f = G_0 \gamma_r$ はモデルのせん断強度である。

このモデルでは、 G/G_0 、 h の両方がひずみに関し双曲線で表されている。ここで、履歴曲線を式(1a)に Masing 則を用いて決めることにすれば、独立なパラメータは γ_r のみとなり、減衰特性は以下の式で表される。

$$h = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{\gamma_r}{\gamma} \right) \left[1 - \frac{\gamma_r}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma_r} \right) \right] - \frac{2}{\pi} \quad (3)$$

本報告で双曲線モデルと呼ぶ場合にはこの方法を指す。双曲線モデルでは減衰特性を制御する独自のパラメータは無いことから、骨格曲線に対する議論しか行わない。なお、式(3)による最大減衰比は $2/\pi$ で、後に図 17 に示す実験値から求めた最大減衰比の値に比べかなり大きい。しかし、双曲線モデルでは独立なパラメータが一つしかないことから、これを制御することは出来ない。

双曲線モデルと Hardin-Drnevich モデルでは骨格曲線が同じで、減衰特性が異なるだけである。そこで、日本では Hardin-Drnevich モデルの減衰特性を変更したという意味で、Modified Hardin-Drnevich モデル⁷⁾と呼ばれることもあるが、ここでは世界的に多く用いられる双曲線モデルの名称を用いている。減衰特性は 3.2 節で述べる Ramberg-Osgood モデルでも用いることから、別途減衰特性として議論する。従って、Hardin-Drnevich モデルの名称は本文中では用いない。

3.2 Ramberg-Osgood モデル

骨格曲線は次のように表される。

$$\frac{\gamma}{\gamma_r} = \frac{\tau}{\tau_f} + \alpha \left(\frac{\tau}{\tau_f} \right)^\beta = \frac{\tau}{\tau_f} + \alpha \left(\frac{\tau}{G_0 \gamma_r} \right)^\beta \quad (4)$$

ここで α 、 β はパラメータである。 τ_f と合わせ、三つのパラメータがあるように見えるが、 α / τ_f^β を一つの変数とすればパラメータの数が一つ減ることからわかるように、独立なパラメータは二つである。それにもかかわらずこの様な書き方をするのは、力学的な意味がわかりやすいためである。すなわち、 τ_f を双曲線モデルのせん断強度と同じ量と設定すれば、式(4)は $\tau = \tau_f \gamma / (\gamma_r (1 + \alpha \gamma_r^\beta))$ を通ることになり、これを破壊ひずみとして使うケースもある¹⁰⁾。

式(4)を骨格曲線とし、Masing 則を適用すると、減衰特性が得られ、次式となる。

$$h = \frac{2}{\pi} \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \left(1 - \frac{G}{G_0} \right) \quad (5)$$

この式は、

$$h_{max} = \frac{2}{\pi} \frac{\beta - 1}{\beta + 1} \quad (6)$$

と置くと、式(1b)と同じ式になる。

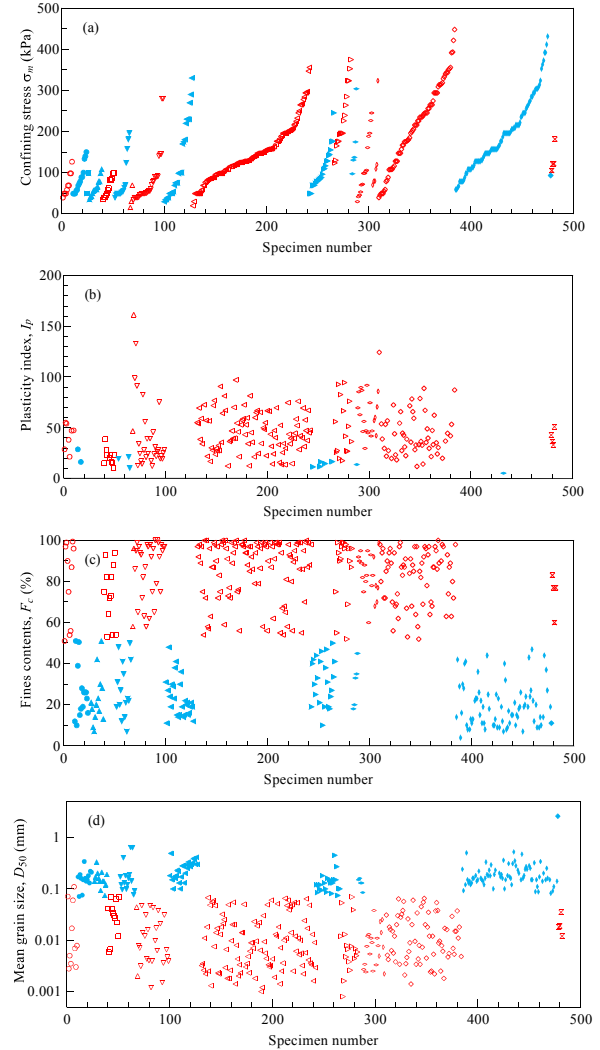


図 4 初期拘束圧と特性値の分布。(a) 初期拘束圧 σ_m 、(b) 塑性指数 I_p 、(c) 細粒分含有率 F_c 、(d) 平均粒径 D_{50}

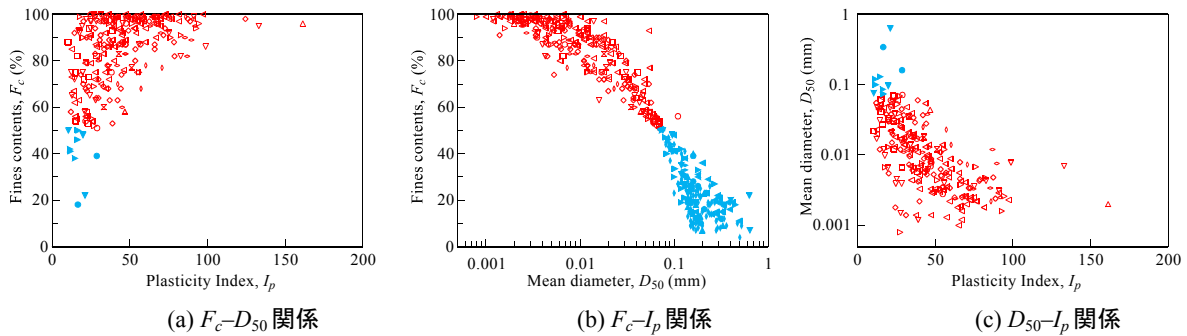


図 3 特性値間の関係

なお、これまでと同様、 γ_r を一つのパラメータにし、 $G/G_0=0.5$ に対応するひずみと定義すれば、

$$\alpha = 2^{\beta-1} \quad (7)$$

の関係が成立するので、 α と β のうち一方を決めれば、他方は一意的に定まる。

4 モデルパラメータの決定と誤差評価

4.1 骨格曲線の誤差評価法

土の応力-ひずみ関係は、単調載荷または最初の載荷に対応する応力-ひずみ関係（骨格曲線）と除荷後の応力-ひずみ関係（履歴曲線）の二つに分けて定義されることが多い。そして、骨格曲線は G - γ 関係、履歴曲線は h - γ 関係と対応していると考えられている。

Ramberg-Osgood モデルや双曲線モデルでは履歴曲線は骨格曲線に Masing 則を適用して求められている。本報告ではこれらのモデルのパラメータの値を各種の要6因を考慮して求めることを目的とする。

社本らは Ramberg-Osgood モデルについて、繰返しせん断特性が拘束圧に依存しないとして、係数を平均値により求めている⁸⁾。田蔵らは h_{max} をパラメータとした図を用意することにより視覚的に求めることができている⁹⁾。しかし、これらの研究ではごく少数の試験の結果に対して適用性を検討しているだけである。多数の試験結果を用いる場合には、視覚的な一致に頼ることはできないし、客観的な評価にもならない。ここでは、各種の方法でモデルパラメータを設定し、得られたモデルの誤差を評価することによってモデルの適用性を検討する。

前述のように実験値は G/G_0 - γ 関係として整理されるので G/G_0 でモデルと実験値の違いで誤差を評価するのは一つの方法であるが、実際の地震応答解析では応力-ひずみ関係が重要であり、特に、大ひずみ時の応力は地表の最大加速度にも影響する¹⁴⁾ので、ここでは、応力を用いて評価する。すなわち、誤差 E は次式で評価する。

$$E = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\tau_{i,model} - \tau_{i,test}}{\tau_{i,test}} \right)^2} / n = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\tau_{i,model}}{\tau_{i,test}} - 1 \right)^2} / n \quad (8)$$

ここで、添え字 *model*, *test* はモデルと実験値を表しており、添え字 *i* は。個々の値を表している。先に述べたように、実験値は $10^{-6} \sim 10^{-2}$ のひずみ領域で、各桁、1, 2, 5の三つの値で与えられているので、 $n=13$ である。

なお、割線剛性はせん断応力をせん断ひずみで除して得られるので、式(8)は次式と同じ意味である。

$$E = \sqrt{\sum_i \left(\frac{G_{i,model} - G_{i,test}}{G_{i,test}} \right)^2} / n = \sqrt{\sum_i \left(\frac{G_{i,model}}{G_{i,test}} - 1 \right)^2} / n \quad (9)$$

次に、各種の分類ごとで特性を議論する際には、次に示す、その分類に属する各試料の誤差の平均値 σ で評価する。

$$\sigma = \sum_i E_i / N \quad (10)$$

ここで、 N は分類に属する試料の数である。 σ が小さいほどモデルの適用性が高いということになる。

4.2 双曲線モデル

骨格曲線は双曲線モデルで表され、独立なパラメータは γ_r のみである。これを三つの方法で求める。

(1) $G/G_0=0.5$ に対応するひずみ

式(1a)に γ_r を代入すると、 $G/G_0=0.5$ となることから、 $G/G_0=0.5$ に対応するひずみとして求める方法で、得られたひずみを γ_1 と表し、図5にその分布を示す。このひずみは基準ひずみと呼ばれることが多い¹⁰⁾。基準ひずみはかなりばらついているが、総じて砂質土の基準ひずみの方が粘性土のそれより大きい。これは砂質土の方が塑性化しやすいことを示しており、既往の研究（たとえば文献11)）と整合する。なお図中の Specimen Number は、前述のように分類ごとに拘束圧の順に並べている。図より、砂質土に関しては分類ごとに右上がりの傾向を示しており、基準ひずみに拘束圧依存性が認められる。粘性土も砂質土ほど顕著ではないが右上がりの傾向がある。これは拘束圧が大きくなると塑性化しにくくなることを示しており、砂質土に関しては既往の研究（たとえば文献12)）と整合している。

上記の方法の適用性を見るために、図6(a)に G/G_0 - γ_r 関係を示す。全体的な傾向はとらえられているが、双曲線モデルとのずれも見られる。図6(b)に同じ関係を τ/τ_r - γ/γ_r 関係にして示す。ここで、 τ/τ_r も応力比であるが、 τ/G_0 の呼び名と混乱しないように座標軸名を Normalized shear stress としている。双曲線モデルは大ひずみ領域で応力を小さく評価するケースが多いことがわかる。最大応力付近でせん断応力を小さく評価するので、地震応答解析では地表の最大加速度を小さく評価する¹³⁾可能性がある。

図7にこの方法で計算した双曲線モデルの誤差の分布を示す。ここで、縦軸 E は式(8)で定義した誤差であり、添え字は対象とした基準ひずみ γ_1 である。誤差はどの材料でも広範囲に広がっているが、砂の方が大きめの値となっている。

誤差を視覚的に把握するために、誤差の一番大きいケース(No. 407, $E_{\gamma_1}=0.501$)と一番小さいケース(No. 272, $E_{\gamma_1}=0.005$)について応力比-ひずみ関係と、モデルと実験の応力の比を比較して図8(a)(b)に示す。凡例の数字は試料の通し番号、記号は土質分類、(b)の括弧内の数値は誤差 E_{γ_1} である。なお、No. 272 はせん断応力比が小さいので、図8(c)に(a)の縦軸を拡大して示す。

No. 272 では最大ひずみ付近で応力が低下している。この試料はひずみ制御で載荷されており、ひずみが大きい領域では過剰間隙水圧発生のため、10サイクルの載荷により応力が極端に小さくなっている。ひずみ制御試験は

繰返しせん断特性試験の一つの方法ではあるが、一般的に行われているわけではない。そこで、その次に誤差が大きい No. 60 の結果も図に示している。ひずみ 10^{-3} 程度まではどちらのケースもよく一致しているが、その後誤差が急激に大きくなる。応力比-ひずみ関係を見ると、No. 274 はモデルのせん断応力比は大きく、一方、No. 60 はモデルのせん断応力比は小さい。これに対して、誤差の小さい No. 407 は全体的によく一致している。

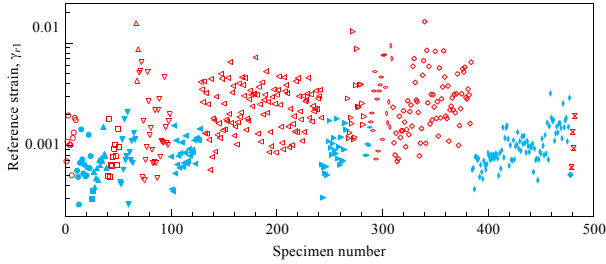


図 5 基準ひずみ γ_{r1} の分布

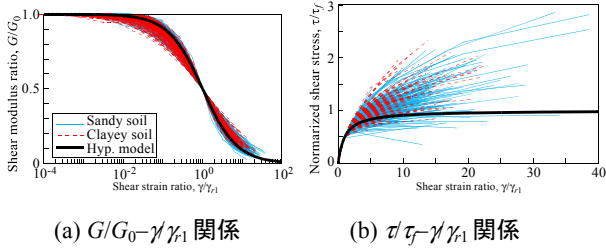


図 6 双曲線モデルの適用性 (γ_{r1} による)

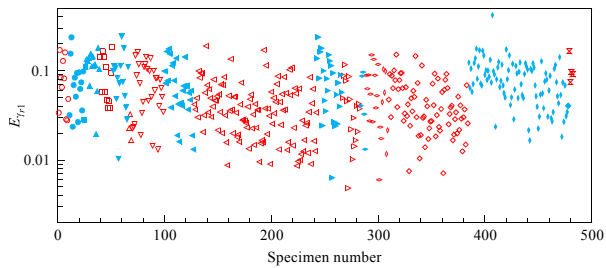
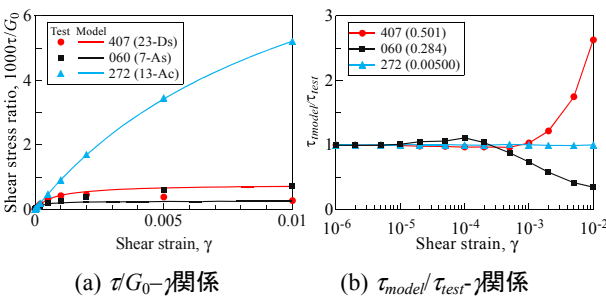
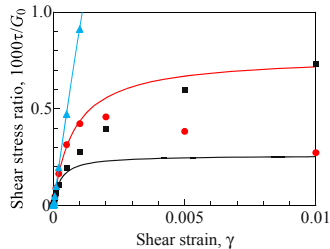


図 7 双曲線モデル (γ_{r1}) の誤差の分布



(a) τ/G_0 - γ 関係 (b) τ_{model}/τ_{test} - γ 関係



(c) τ/G_0 - γ 関係 (縦軸拡大)

図 8 双曲線モデル (γ_{r1}) と実験の比較

(2) 最小自乗法による方法

式(1a)は次のように変形することが出来る。

$$\frac{G}{G_0} = 1 - \frac{1}{\gamma_r} \frac{G\gamma}{G_0} \quad (11)$$

この式の意味は、 G/G_0 と $G/G_0\gamma$ の関係が (0,1) を通る直線で表され、その勾配が $1/\gamma_r$ であるということである。この関係を描くと図 9 の様になり、全体としては直線形状を示している。各実験値について γ_r を式(11)に最小二乗法を適用して求め、これを γ_{r4} と表し、図 10 にその分布を示す。図 5 と同様、砂の基準ひずみの方が小さめで、塑性化しやすいことを示唆している。

(3) イタレーションによる方法

三つ目の方法では、誤差 E が最小になるような基準ひずみ求める。このためには非線形の式を解く必要があり、イタレーションにより有効数字 3 桁以上の精度で基準ひ

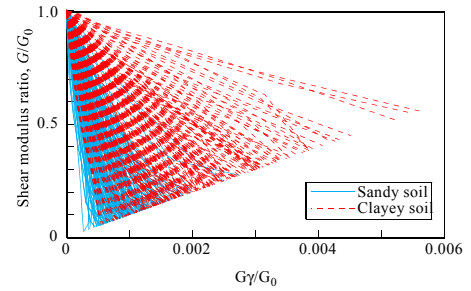


図 9 G/G_0 - $G/G_0\gamma$ 関係

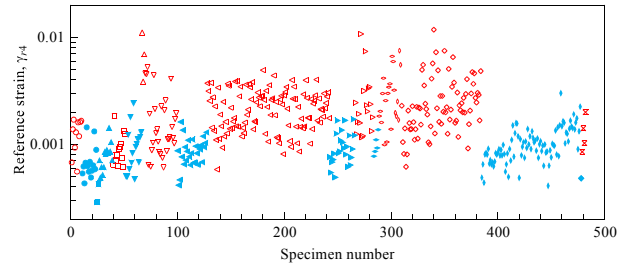


図 10 γ_{r4} の分布

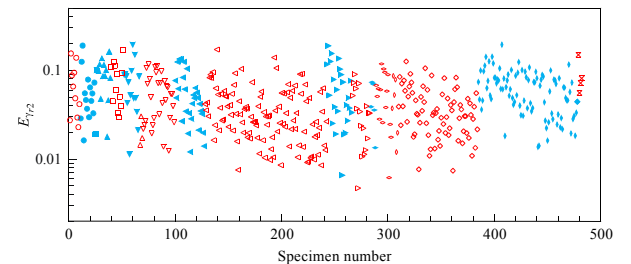
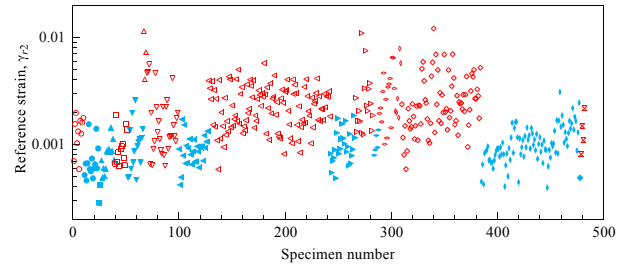


図 11 γ_{r2} による双曲線モデル (上から γ_{r2} , $E_{\gamma_{r2}}$ の分布)

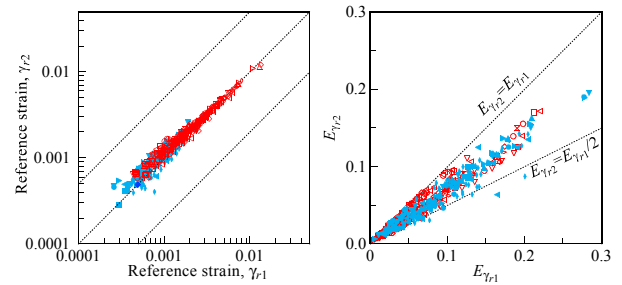
ずみを求めた。これを γ_2 とする。図 11 に γ_2 およびこれを用いた際の誤差 E_{γ_2} の分布を示すが、 γ_2 は図 10 の γ_4 と非常によく似た分布をしている。そこで、両基準ひずみとそれによる誤差を比較して図 12 に示す。なお、図 12(b)では大きい誤差の評価が重要と考え、線形軸を用いている。これからみられるように、両基準ひずみはほとんど同じであり、誤差も、1 試料で γ_4 による方法の方が大きいのを除けば、ほとんど同じである。そこで、以下では γ_2 を検討に用いる基準ひずみとする。なお、 γ_2 を求めるにはイタレーションにより非線形の式を解く必要があるが、 γ_4 は最小自乗法で求まるので、実用的にはこの方が使いやすいかもしれない。

図 13 に G/G_0 - γ/γ_2 関係と τ/τ_0 - γ/γ_2 関係を示す。なお、図 13(a)では実験値は $\gamma/\gamma_2=1$ で $G/G_0=0.5$ にはなっていないが、これは、基準ひずみを誤差が最小になるように決めたからである。図 6 と比べると図 13(b)で大ひずみ域では応力が小さめの評価になっているという前と同じような傾向が見られたが、縦軸の最大値は半分程度の値となっており、大ひずみ域の適用性が改善されている。

図 14 には、誤差が一番小さかったケース (No. 272, $E_{\gamma_2}=0.00476$)、大きかったケース (No. 60, $E_{\gamma_2}=0.195$) の応力比-ひずみ関係と、モデルと実験の応力の比を比較して示す。図 8 と比較すると、No. 60 の試料では大ひ

ずみ領域の誤差が小さくなっている。一方、No. 272 では誤差は少し小さくなっているもののそれほど変わらない。

次に、 γ_1 , γ_2 を比較して図 15 に示す。図 15(a)には γ_2 が γ_1 の倍、半分になる範囲が点線で示されているが、すべての結果がこの範囲に入っている。また、基準ひずみが小さい領域では γ_2 の方が大きいケースが多い。さらに、図 15(b)より誤差が大きい領域では γ_2 を用いたモデルの誤差が γ_1 を用いたモデルより小さくなっているが、誤差が約半分までになることはほとんど無いことがわかる。この結果は図 13(b)の結果と整合している。すなわち、図 8、図 14 に示されているように、実験値とモデルは小さ



(a) γ_1 - γ_2 関係 (b) 誤差の比較

図 15 γ_1 , γ_2 の比較

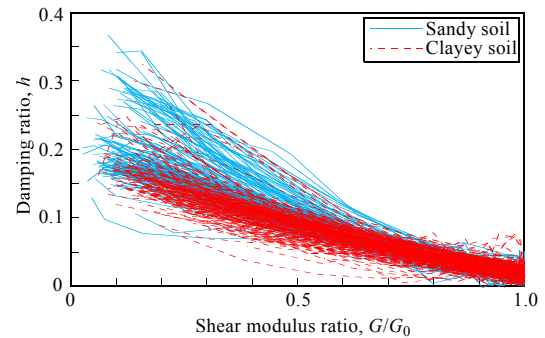
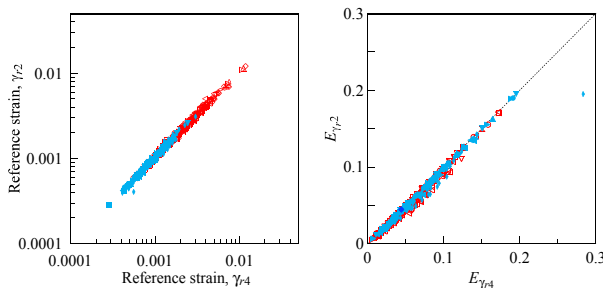
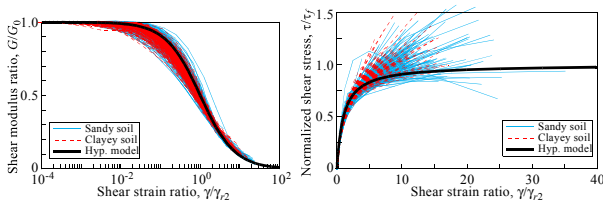


図 16 h - G/G_0 関係



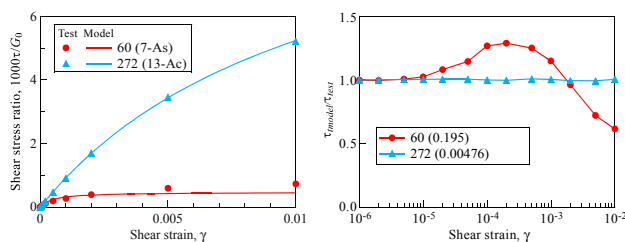
(a) γ_2 - γ_4 関係 (b) 誤差の比較

図 12 γ_4 , γ_2 の比較



(a) G/G_0 - γ/γ_2 関係 (b) τ/τ_0 - γ/γ_2 関係

図 13 双曲線モデルの適用性 (γ_2 による)



(a) τ/G_0 - γ/γ_2 関係 (b) 応力比

図 14 双曲線モデル (γ_2) と実験の比較

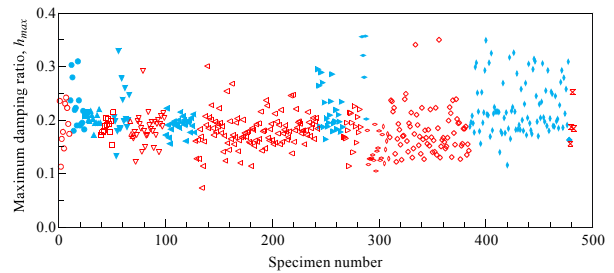


図 17 h_{max} の分布

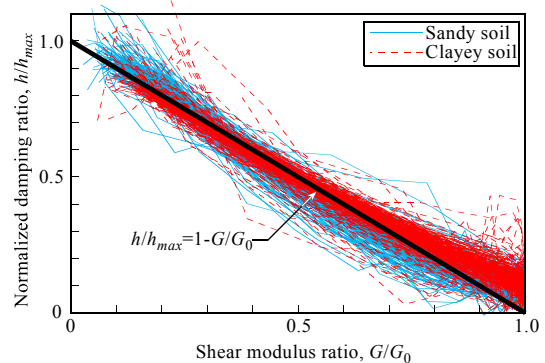


図 18 h/h_{max} - G/G_0 関係

いひずみではよく一致するので、大きいひずみ域の誤差が全体の誤差を大きくする原因となっている。

4.3 減衰特性のモデル化

Hardin-Drnevich モデルの最大減衰比は式(1b)で表され、 h と $1-G/G_0$ の関係が線形となっている。そこで、 h と G/G_0 の関係を図 16 に示す。全体として直線に見えるものの、式(1b)で必ず通る、 $G/G_0=1$ 、 $h=0$ の点は通らない試料が多い。これは、小さいひずみ域で減衰定数が 0 にならない試料が多いからである¹⁴⁾。そこで、小さいひずみ領域の試験結果を排除するために、 $G/G_0<0.95$ の結果のみを用いて最小二乗法により h_{max} を求める。図 17 に得られた h_{max} の分布を、図 18 に $h/h_{max}-G/G_0$ 関係を示す。

全体的に砂の方が大きめの値となっている。減衰定数が大きいということは塑性化しやすいことを意味しており、砂の基準ひずみが小さめであることと整合している。

4.4 Ramberg-Osgood モデル

(a) 減衰特性を考慮した方法

Ramberg-Osgood モデルではパラメータの数が双曲線モデルより一つ多いことから、減衰を視野に入れ、すでに求めた γ_r と h_{max} でモデルを設定することが出来る。この場合、 h_{max} により曲線の形状も変わることから、双曲線モデルのように比較する図を書くことは困難である。そこで、 γ_r に γ_{r1} を用いたケース（以後、 $\gamma_{r1}+h_{max}$ で表わす）の誤差を図 19 に示す。双曲線モデルでは、誤差の最大値は γ_{r1} を用いたケースで 0.1 程度（No.407 を除く）、 γ_{r2} を用いたケースではこの半分程度であった。そこで、図 20 に γ_{r2} を用いた双曲線モデルの誤差とこのモデル化

（ $\gamma_{r2}+h_{max}$ として引用）の誤差を比較して示す。ほとんどの計算結果は点線で示した $E_{\gamma_{r2}}=E_{\gamma_{r2}+h_{max}}$ の線より下にあり、このモデルの方が誤差は大きいことがわかる。誤差が 1 を超えるケースもあり、骨格曲線の再現性は著しく悪い。図 21(a)に誤差がもっとも大きいケースと小さいケースの応力-ひずみ関係を比較して示す。No. 420

（ $E_{\gamma_{r1}+h_{max}}=1.71$ ）では実験値は大ひずみ域でも応力が大きくなっていないのに対して、モデルでは応力が大きく、ひずみ 0.01 では約 6 に至り、これが誤差が大きい理由である。なお、このケースでも基準ひずみまでの再現性は高い。

図 19 を見ると、砂では誤差が大きいグループと小さいグループに分かれ、中間は少ない。ここで、誤差が大きいグループは、例えば図 21 に示す 420 の様に大ひずみ領域でせん断応力がせん断応力がほとんど変化しない試料であると考えられる。これは過剰間隙水圧が発生した影響と考えることができよう。

このように、Ramberg-Osgood モデルでは減衰特性も視野に入れた決定が可能とはいえ、一方では骨格曲線の精度は双曲線モデルに比べて大きく劣る。

(2) 骨格曲線に着目する方法(1)

Ramberg-Osgood モデルでは、双曲線モデルよりパラメータの数が一つ多いことから、より精度よく骨格曲線を表現できる可能性がある。そこで、

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma_r^{\beta-1}} \quad (12)$$

とおき、式(4)を書き直すと、次式を得る。

$$\ln(1-G/G_0)\gamma = \ln \alpha' + \beta \ln \gamma G/G_0 \quad (13)$$

すなわち、 $\ln(1-G/G_0)\gamma$ と $\ln \gamma G/G_0$ の関係が直線となる。

この関係を整理する際には G/G_0 が 1 になると、 $\ln(1-G/G_0)$ が無限大となるという問題が発生する。Ramberg-Osgood モデルではこのとき γ も 0 に近づくので問題は起きないが、試験結果では有限の γ で G/G_0 が 1 になるのが原因である。そこで、 G/G_0 が 0.999 より大きい試験結果を無視して、この関係を図示すると、図 22 の様になり、直線に見える。また、図の勾配はほぼ一定値に見えるが、一定値とすると、 β が一定、すなわち、式(6)より h_{max} が一定ということになり、図 17 とは反する結果である。ここでは減衰特性を意識しているわけではないので、骨格曲線に着目してパラメータを決めても h_{max} はそれほど変わらないと理解するのがよいと考えら

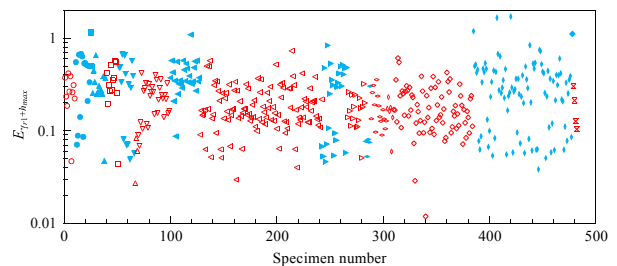


図 19 Ramberg-Osgood モデル($\gamma_{r1}+h_{max}$)の誤差の分布

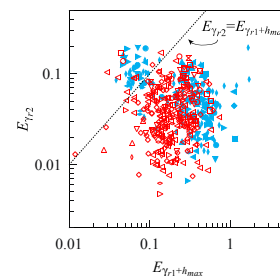
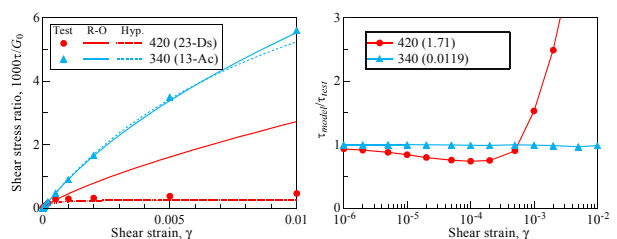


図 20 双曲線モデル(γ_{r2})と R-O モデル($\gamma_{r1}+h_{max}$)の誤差の比較



(a) 誤差の比較

(b) 応力-ひずみ関係

図 21 Ramberg-Osgood モデル($\gamma_{r1}+h_{max}$)と実験の比較

れる。

式(13)を用いて最小自乗近似により α と β を求めることができる。そこで、基準ひずみ γ_r を $G/G_0=0.5$ におけるひずみと定義すれば、

$$\gamma_r = 2\alpha^{1/(1-\beta)}, \quad \alpha = 2^{\beta-1} \quad (14a,b)$$

によりその他のパラメータの値を求めることができる。

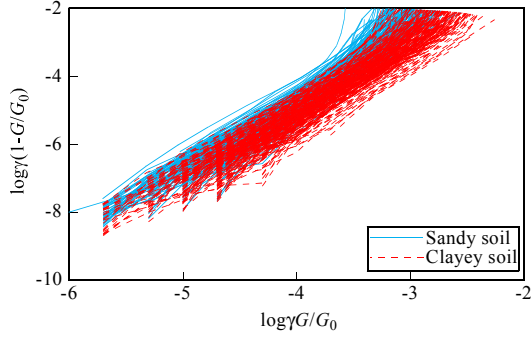


図 22 $\ln(1-G/G_0)$ γ - $\ln \gamma G/G_0$ 関係

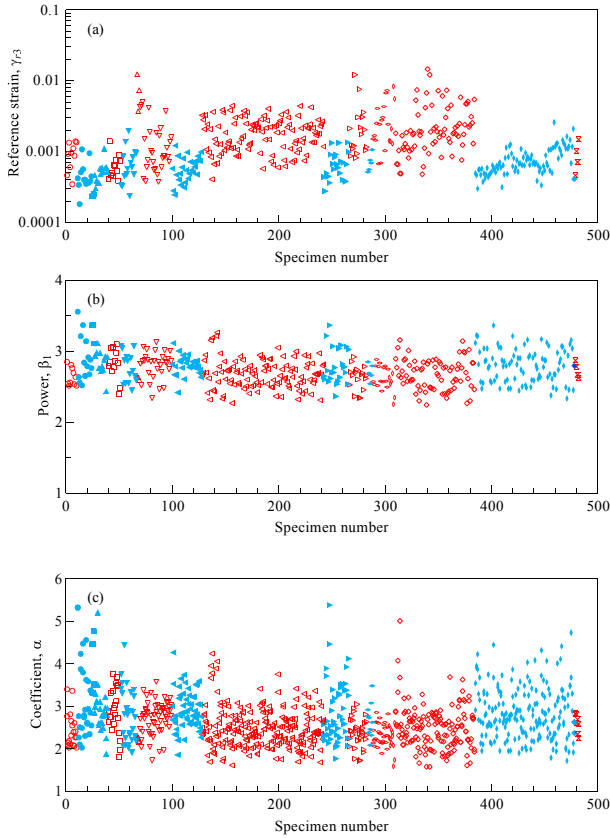


図 23 モデルパラメータの分布。(a) 基準ひずみ γ_r , (b) べき β_1 , (c) 係数 α

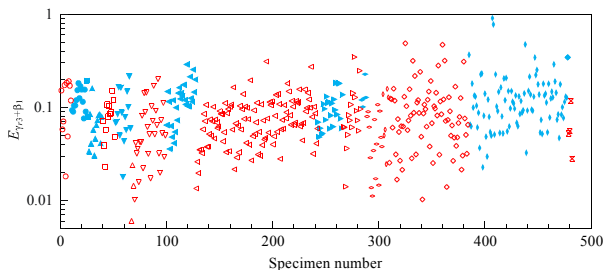
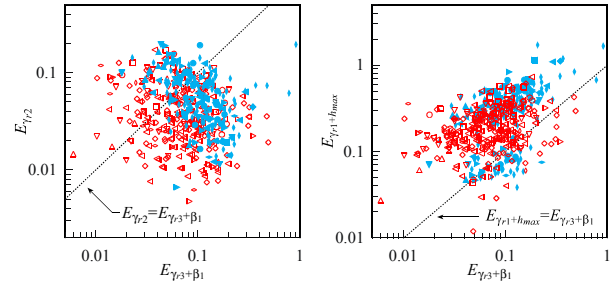


図 24 Ramberg-Osgood モデルの誤差の分布

また、 h_{max} は式(6)より求めることができる。このようにして求めた値の分布を図 23 に示す。なお、この方法で求めた β と γ_r を以後、 β_1 、 γ_3 として表し、この方法を $\gamma_3+\beta_1$ で表す。誤差の分布を $E_{\gamma_3+\beta_1}$ として図 24 に示す。砂質土では γ_1 が小さめ、 β_1 と α が大きめの値となっているが、これらは同じ傾向、すなわち砂の方が塑性化しやすいことを表している。ここで、 γ_1 と β_1 についてはすでに説明した。Ramberg-Osgood モデルでは $\tau=\tau_r$ ($=G_0\gamma_r$) におけるひずみは $(1+\alpha)\gamma_r$ であるので、 α が大きいということは応力が小さい、すなわち、塑性化しやすいことを表している。

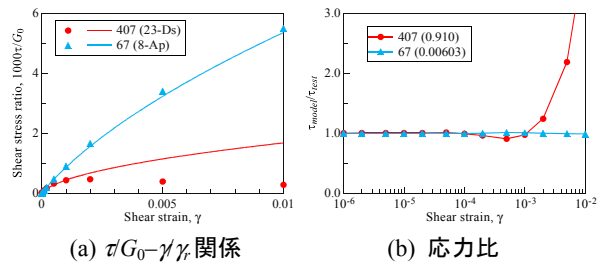
図 25 にこの方法による誤差を他の手法の誤差と比較して示す。図 25(a)は双曲線モデル(γ_2)と比べたものであるが、 $E_{\gamma_2}=E_{\gamma_3+\beta_1}$ より右側の点が多く、全体として双曲線モデルより誤差が大きいことがわかる。図 25(b)は前項の γ_1+h_{max} の方法と比較したものであるが、全体的にこの方法の方が誤差は小さいことがわかる。

これより、Ramberg-Osgood モデルは従来減衰特性も評価できるとされているが、減衰特性を考慮すると、骨格曲線に対する誤差は大きく増加することがわかる。また、Ramberg-Osgood モデルは双曲線モデルより調整用のパラメータの数が一つ多いのでより適用性がある様にいわ



(a) 双曲線モデル(γ_2) (b) R-O モデル(γ_1+h_{max})

図 25 他の手法との誤差の比較



(a) $\tau G_0/\gamma_r$ 関係

(b) 応力比

図 26 RO 線モデル($\gamma_3+\gamma_1$)と実験の比較

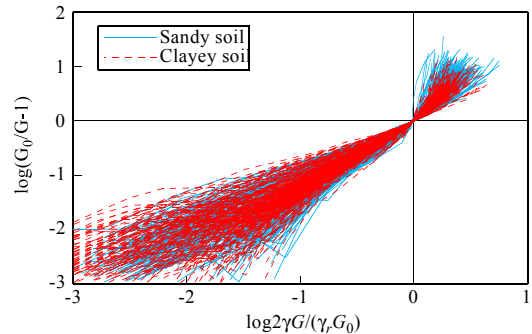


図 27 $\log\{(1-G/G_0)/(G/G_0)\}-\log\{2\gamma G/G_0\}$ 関係

れることも多いが、双曲線モデルに比べ誤差が小さくなるわけでも無いことがわかる。これは、図 21 でも論じたように、Ramberg-Osgood モデルではひずみとともに応力が非常に大きくなっていくことが原因である。

図 26 に誤差が最大と最小となる応力-ひずみ関係を比較して示す。傾向はこれまでと同様である。

(3) 最小自乗法による方法(2)

基準ひずみ γ_r に双曲線モデルで求めた値 γ_{r1} を用いることにすれば、独立なパラメータの数は一つ減る。これを意識して式(4)を変形すると、次式を得る。

$$\log\left(\frac{1-G/G_0}{G/G_0}\right) = (\beta-1)\log\left(\frac{2\gamma G}{G_0}\right) \quad (15)$$

この関係を図 27 に示す。全体として原点を通る直線のように見える。なお、 G/G_0 が 1 の時、左辺の括弧内が 0 となり不都合なので、先と同様、 $G/G_0 > 0.999$ の試験結果は除いている。この方法を $\gamma_{r1} + \beta_2$ で引用し、求めた β を β_2 と表す。なお、この式の誘導に関して、 $\gamma = \gamma_r$ のとき $G/G_0 = 0.5$ の性質を利用しているので、 β が求まった後、 α は式(14)で求めることになる。

図 28 に得られた β の分布を示す。また、図 29 に誤差 $E_{\gamma_{r1}+\beta_2}$ の分布を、図 30 に前項の誤差 $E_{\gamma_{r3}+\beta_1}$ と比較して示す。砂質土ではほとんどすべて、粘性土でも大部分の点が $E_{\gamma_{r1}+\beta_2} = E_{\gamma_{r3}+\beta_1}$ の線より上にあり、この方法の方が誤差が大きいことがわかる。

図 31 に応力-ひずみ関係を比較して示す。これまでの比較と同様な傾向を示している。

4.5 数式モデルの適用性に関するまとめ

表 2 にこれまでの検討を反映させ、以下の検討に用いるモデルをまとめて示す。表には計算に用いるモデルパラメータの値、およびモデルの以下の引用方法も示している。

前報¹⁵⁾では、地質年代や堆積環境によっても繰返しせん断特性が異なることを指摘したので、ここでも表 1 に基づく分類を用いるが、実務ではこのような詳細な分類が行えないことも多い。そこで、表 1 の分類に加え、以下のより粗い分類についても検討する。

- 1) 全試料 (all soil)
- 2) 砂質土 (sandy soil), 粘性土 (clayey soil) に分類
- 3) 砂質土, 粘性土のそれぞれについて埋土 (fill), 完新統 (Holocene), 更新統 (Pleistocene) に分類。なお、埋土は 1-Bc と 2-Bs のみであるので、埋土の分類としては示さず、個別の分類で示す。
- 4) 粘性土では、塑性指数 $I_p \leq 30$ と $I_p > 30$ に分類

図 32 に個々の分類ごとに求めたモデルパラメータの最大値と最小値を示す。図の all soil より左側が粗い分類、右側が表 1 に基づく詳細な分類である。この表現法はこれ以降の図でも用いられている。また図の $\beta(h_{max})$ は h_{max}

より式(6)を用いて求めた β である。さらに、下の図では右側の軸に h_{max} の値も示している。

基準ひずみの値は分類ごとの変化の傾向は三つとも同

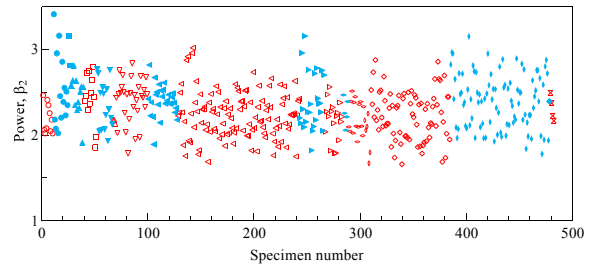


図 28 β の分布

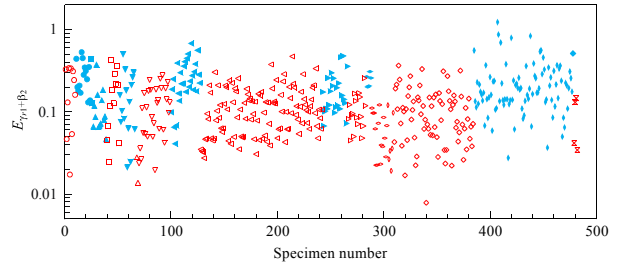


図 29 誤差の分布

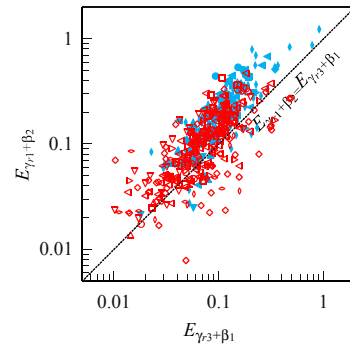
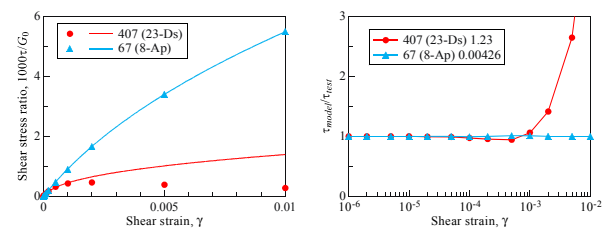


図 30 誤差の比較



(a) $\tau/G_0 - \gamma$ 関係

(b) 応力比

図 31 RO 線モデル ($\gamma_{r3} + \gamma_1$) と実験の比較

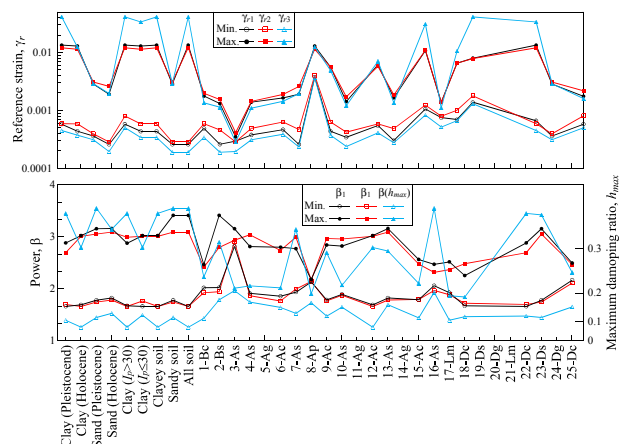


図 32 モデルパラメータの範囲

じである。 γ_1 と γ_2 は値もよく似ているが、 γ_3 は少し異なった傾向をしている。次に、 β の分布は、 β_1 と β_2 ではほぼ同じであるが、 $\beta(h_{max})$ は大きく異なっている。前者は骨格曲線のみに着目して決めた β にあるのに対して、後者は減衰特性より求めたものである。先に基準ひずみと最大減衰比から設定したR-Oモデルの精度が悪かったことを示したが、その原因をこの図からも見ることができる。

石原ら¹⁰⁾は既往の研究をまとめ基準ひずみの範囲として砂質土で $2 \times 10^{-4} \sim 9 \times 10^{-4}$ 、粘性土で $9 \times 10^{-4} \sim 5 \times 10^{-3}$ を示しているが、砂質土と粘性土でこのように明瞭に分かれているわけではなく、かなり重なっている。この傾向は、図5、図23からも読み取ることができる。また、彼は、 β の値として粘性土、砂質土でそれぞれ1.65~2.8、2.3~4.4を示しているが、ここで求めた β はより広い範囲でばらつき、また砂質土と粘性土の境界も明瞭ではない。さらに、 α の値として粘性土5~50、砂質土20~100を示しているが、図23に示されるように α の値は6以下で、大きく異なっている。ただし、石原らは破壊ひずみ(0.03~0.07)における応力を対象としているのに対して、本論文では0.01までの全ひずみ領域を対象としているという点が異なっている。また、砂質土では現行の試験法では石原らの定義する破壊ひずみまでの試験は困難と考えられる¹⁶⁾ので、同じ条件で比較することはできない。

図33に個々の試料についてこれまでの方法で求めたモデルパラメータを適用した際の誤差を分類ごとに平均した値をまとめて示す。縦軸の σ (raw data)は生データの

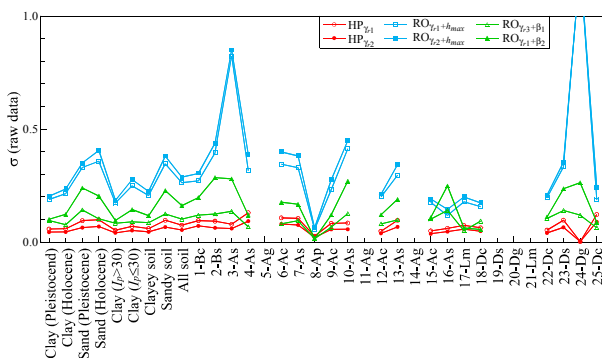


図33 誤差の平均値

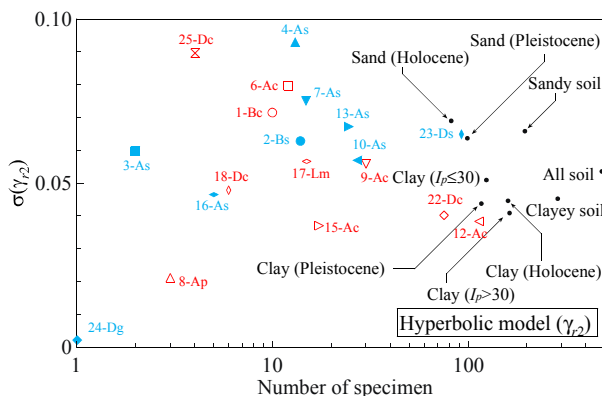


図34 誤差の平均値と試料数の関係

誤差の平均値という意味である。また、凡例ではモデル名も併せて示している。

ほとんどのケースで減衰特性を考慮した

Ramberg-Osgoodモデルの誤差が最も大きく、次に、それ以外のRamberg-Osgoodモデルが続く、双曲線モデルの誤差が一番小さい。個々のフィッティングでは、図20、図25で見られるようにRamberg-Osgoodモデルの誤差が双曲線モデルより小さいケースもあるが、誤差が大きいケースの方が多く、これがこのような結果になった原因である。さらに、図21、図26、図31などに見られるように、Ramberg-Osgoodモデルではひずみに対するせん断応力の上昇の程度が実験値より大きくなることもあり、これが誤差を大きくした理由である。なお、本報告では最大ひずみ 10^{-2} までの範囲を扱っているが、これを 10^{-3} までというように適用するひずみ領域を小さくすれば、結論は変わってくる可能性もある。

図34は図33の一部に相当する γ_1 を用いた双曲線モデルによる誤差を試料数の関係として示したものである。各シンボルマークはそれぞれの分類による平均値を表しているの、たとえば全試料(All soil)は砂質土(Sandy soil)と粘性土(Clayey soil)の誤差の試料数による重み付平均となっている。これより、モデルに載りやすい分類と載りにくい分類があることがわかる。たとえば粘性土の方が砂質土より誤差が小さい、すなわち、双曲線モデルで表しやすいということが出来る。しかし、個別分類ごとに見ると、砂質土、粘性土とも広い範囲に誤差が広がっている。なお、図33では材料ごとの傾向はほぼ同じであるので、他のモデルについても同じようなことがいえる。

5 まとめ

多くの繰返しせん断特性試験の結果を集め、実務の解析でも多く用いられるHardin-Drnevichモデル、双曲線モデルとRamberg-Osgoodモデルの適用性を検討したこの結果次のようなことがわかった。

- 1) 誤差が一番小さいのは双曲線モデルで、誤差が最小となる基準ひずみを求めたケースであるが、最小自乗法で求めたケースの誤差も同じ程度であり、実用的には後者が使いやすい。また、基準ひずみを $G/G_0=0.5$ に対するひずみとして定義した時の誤差はこれより大きく、せん断応力を過小評価する傾向がある。

表2 計算に用いたモデル

モデル	パラメータ	引用法
双曲線モデル	γ_1	γ_1
双曲線モデル	γ_2	γ_2
Ramberg-Osgood モデル	γ_1, h_{max}	$\gamma_1 + h_{max}$
Ramberg-Osgood モデル	γ_2, h_{max}	$\gamma_2 + h_{max}$
Ramberg-Osgood モデル	γ_3, β_1	$\gamma_3 + \beta_1$
Ramberg-Osgood モデル	γ_1, β_2	$\gamma_1 + \beta_2$

- 3) Ramberg-Osgood モデルの適用性は総じて双曲線モデルより小さい。これは、0.1%を越えるひずみ域で応力増加の程度が実験値より大きいのが原因である。
- 4) Ramberg-Osgood モデルは双曲線モデルよりパラメータの数が一つ多いが、一つのパラメータを減衰特性をあわせる様に設定すると、骨格曲線に対する適用性は著しく減少する。

参考文献

- 1) 地盤工学会室内試験規格・基準委員会編集：地盤材料試験の方法と解説，丸善，2009，1156pp.
- 2) 吉田望，辻野修一，石原研而（1990）：地盤の1次元非線形解析に用いる土のせん断応力-せん断ひずみ関係のモデル化，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），pp. 1639-1640
- 3) 吉田望，若松加寿江：土の繰返しせん断特性のモデル化と地質年代・堆積環境の影響，地盤工学ジャーナル（投稿中）
- 4) Finn, W. D. L., Byrne, P. L. and Martin, G. R.: Seismic response and liquefaction of sands, J. Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 102, No. GT8, pp. 841-856, 1976.
- 5) Jennings, P. C.: Periodic Response of a General Yielding Structure, Proc. ASCE, Vol. 90, EM2, pp. 131-163, 1964.
- 6) Hardin, B. O. and Drnevich, V. P.: Shear modulus and damping in soils: design equations and curves, Proc. of the American Society of Civil Engineers, Vol. 98, No. SM7, pp. 667-692, 1970.
- 7) 国生剛治，桜井彰雄（1979）：MODIFIED HARDIN-DRNEVICH モデルについて，土木学会第33 回年次学術講演会講演概要集，第Ⅲ部門，pp. 1181-1184
- 8) 社本康広，森信夫（1980）：Ramberg-Osgood モデルの硬質粘性土及びシルトへの適応性，第15 回土質工学研究発表会，pp. 597-600
- 9) 田蔵隆，清水勝美，嶋田穰，横田治彦（1982）：土の動力学モデルの振動特性と実地盤に対する適用性について，第6 回日本地震工学シンポジウム論文集，pp. 665-672
- 10) Ishihara, K. (1982): Evaluation of soil properties for use in earthquake response analysis, Proc., 9th International Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Zurich, pp. 237-259
- 11) 今津雅紀，福武毅芳：動的変形特性のデータ処理に関する一考察，第21 回土質工学研究発表会，pp. 533-536，1986.
- 12) 建設省土木研究所地震防災部振動研究室：地盤の地震時応答特性の数値解析法 -SHAKE: DESRA-，土研資料，第1778 号，pp.1-47，1982.
- 13) 末富岩雄，沢田純男，吉田望，土岐憲三（2000）：地震動の上限値と地盤のせん断強度の関係，土木学会論文集，No. 654/I-52，pp. 195-206
- 14) 吉田望（2010）：地盤の地震応答解析，鹿島出版会，256pp.
- 15) 若松加寿江，吉田望，三上武子：地質年代・堆積環境を考慮した土の繰返し変形特性の支配要因の検討，地盤工学ジャーナル，Vol. 5, No. 3, pp. 463-478, 2010
- 16) 吉田望，三上武子（2010）：時代の要請に応える土の繰返しせん断変形特性試験の確立を，地盤工学会誌，Vol. 8, No. 2, pp. 1-5

Applicability of the conventional stress-strain model such as a hyperbolic model and a Ramberg-Osgood model are examined. Model parameters are evaluated by the same method and the difference of skeleton curve between the test data and the model are calculated. It is found that the hyperbolic model has a tendency to underestimate shear stress, but error is the smallest. On the other hand, the Ramberg-Osgood model that considers damping characteristics shows the largest error. Even if the parameters are evaluated focusing on the skeleton curve, error is larger than that by the hyperbolic model. Rate of increase of the shear stress is larger than that of the test, which is the reason why Ramberg-Osgood model is less applicable.