

地盤の地震応答解析に用いる複素剛性の性質

複素剛性 材料減衰定数 地震応答解析

関東学院大学 国際会員 ○吉田 望
地盤ソフト工房 正会員 安達 健司

1. はじめに

地盤の地震応答解析では、SHAKE¹⁾に代表される等価線形解析が現在も用いられている。SHAKE では非線形の応力 - ひずみ関係を複素剛性法で表している。SHAKE に用いられていた複素剛性法は、その後、SHAKE の開発者による Lysmer による改良が提案され²⁾、多くのプログラムはこれを用いていると考えられる。ただ、文献 1)2)では、複素剛性の力学的な性質は議論されていない。また、Lysmer の提案する複素剛性には問題もある。筆者らはこれらを指摘し、YAS モデルと名付けた、より合理的な複素剛性を提案した³⁾。本報では、このうち、特に複素剛性の力学的な性質について報告する。

2. 非線形特性のモデル化

文献 1)には示されていないが、SHAKE で用いられているのは Voigt モデルで、応力 τ - ひずみ γ 関係は剛性を G 、粘性係数を C とすれば、次式で表される。

$$\tau = G\gamma + C\dot{\gamma} \quad (1)$$

これに円振動数 ω の調和振動調和振動を作用させ求めた応力 - ひずみ関係は、振動数に依存したものとなる。そこで振動数に依存しない様にするために、減衰係数が振動数依存と考え、パラメータ β を用い、

$$C = 2\beta G / \omega \quad (2)$$

と表現すると

$$\tau = G\gamma \pm 2\beta G \sqrt{\gamma_0^2 - \gamma^2} \quad (3)$$

が得られる。第1項は線形、第2項は楕円形で履歴に対応するエネルギー吸収に対応している。

式(3)を1周期積分すると、履歴吸収エネルギー

$$\Delta W_V = \oint \tau d\gamma = 2\beta G \pi \gamma_0^2 \quad (4)$$

が得られる。添え字 V は Voigt モデルを意味する。

室内試験では減衰定数 h を履歴吸収エネルギー ΔW のひずみエネルギー $W = G\gamma_0^2/2$ に対する比として次式で求めている。

$$h = \frac{1}{4\pi} \frac{\Delta W}{W}, \quad W = \frac{1}{2} G \gamma_0^2 \quad (5a, b)$$

ΔW_V を ΔW と等しいと置くと、次式が得られる。

$$\beta = h \quad (6)$$

すなわち、式(2)で定義した β と h は同じとなる。

3. 各種複素剛性の性質

3.1. SHAKE の方法

式(3)は非線形の応力 - ひずみ関係であるが、SHAKE では Sorokin の提案⁴⁾した複素剛性を用いてこれを複素数の元で線形の関係に置き換えた。すなわち、応力 - ひず

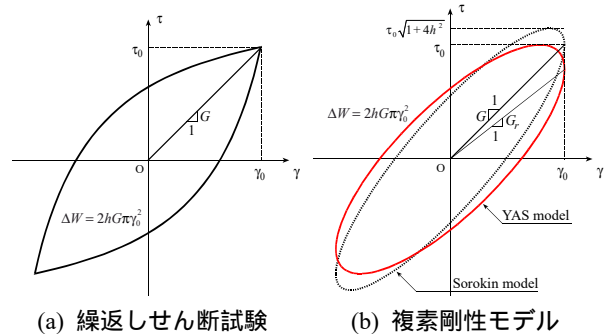


図1 応力 - ひずみ関係の比較

み関係は次式で表される。

$$\bar{\tau} = G(1 + 2i\beta)\gamma_0 e^{i\omega t} = \bar{G}_s^* \bar{\gamma} \quad (7)$$

ここで、複素数にはオーバーバーをつけている。また、 $\bar{G}_s^* = G(1 + 2i\beta)$ は複素剛性である。

図1(a)に示す様に繰返しせん断試験で得られた履歴曲線は紡錘型であるが、(b)に示す様に、複素剛性を用いて得られる履歴曲線は楕円形である。式(7)より最大せん断応力を求めると、実験の最大せん断応力 $G\gamma_0$ の $\sqrt{1+4h^2}$ 倍過大評価されていることが分かる。

3.2. Lysmer モデル

Lysmer は1自由度系の応答に着目し、そのばね定数に $\bar{G}_s^*$ を用いたケースと、同じ材料特性で Voigt モデルを用いたケースで定常状態に対する変位が異なることから、変位を同じにするモデルとして、

$$\bar{k}_L^* = k(1 - 2\beta_1^2 + 2i\beta_1\sqrt{1 - \beta_1^2}) \quad (8)$$

を提案した。ここで、ばね定数 k と G は同じ意味である。

β_1 は1自由度系の減衰定数で

$$\beta_1 = C / (2\sqrt{mk}) \quad (9)$$

で定義される。この β_1 を β に置き換えた

$$G_L^* = G(1 - 2\beta^2 + 2i\beta\sqrt{1 - \beta^2}) \quad (10)$$

が Lysmer の提案する複素剛性モデルである。

文献 2)では、変位が同じになるという説明しかない。筆者らの検討³⁾では、次のことが分かった。

1) 1自由度系の変位を同じにする条件は、ばね定数 k_r と減衰定数 β_1 が次の式を満たすことである。

$$1 - 2\alpha^2 + 4\alpha^2\beta_1^2 = k_r^2 - 2k_r\alpha^2 + k_i^2 \quad (11)$$

ここで $\alpha = \omega / \omega_0$ (ω_0 は固有円振動数)は tuning ratio である。式(11)を満たす k_r と β_1 の内、 α を含まない組合せが Lysmer の提案したモデルである。ただし、変位は同じでも復元力特性は異なるので、1自由度系の変位を合わせることがそれほど重要とは考えられない。

2) Lysmer モデルでは最大せん断応力は繰返しせん断試験

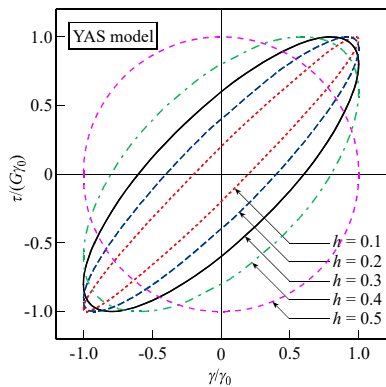


図2 YASモデルの応力 - ひずみ関係の $h (= \beta)$ 依存性

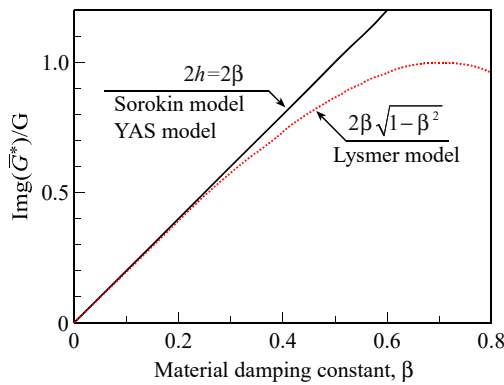


図3 複素剛性虚数部の β 依存性

の最大せん断応力 $G\gamma$ と同じになる。

3) 式(10)より式(4)の様に履歴吸収エネルギーを計算し、減衰定数 h を求めると次のようになる。

$$h = \beta \sqrt{1 - \beta^2} \text{ または } \beta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 4h^2}}{2}} \quad (12)$$

すなわち、Lysmer モデルでは、 β に繰返しせん断試験で得られた減衰定数を与えると、得られる減衰定数は実験値より小さくなる。また、適用範囲は $\beta \leq 0.7$ である。

3.3. YAS モデル

Yoshida-Adachi-Sorokin (YAS) モデルは、最大せん断応力と履歴吸収エネルギーが繰返しせん断試験の値と同じになるように提案されたモデルである。

$$G_y^* = G(\sqrt{1 - 4\beta^2} + 2i\beta) = G(\sqrt{1 - 4h^2} + 2ih) \quad (13)$$

すなわち、Lysmer モデルでは β に繰返しせん断試験の減衰定数を用いると減衰定数が過小評価されるのを改良したモデルと言える。なお、式(12)より β を求め、これを式(10)に用いれば YAS モデルと同じ式が得られる。

このように、最大せん断応力と減衰定数の両方を一致させるモデルは式(13)の実部が 0、すなわち、 $h=0.5$ までである。図 2 に応力 - ひずみ関係を示すが、 $h=0.5$ では履歴曲線は完全な円になるので実用的には $h=0.4$ 程度までであろう。

3.4. 減衰特性の比較

複素剛性法による吸収エネルギーは虚数部に比例する。そこで、図 3 に虚数部分の β 依存性を示す。Sorokin モデル、YAS モデルは $h = \beta$ で、実験値が再現されているが、Lysmer モデルは減衰を過小評価していることが分かる。なお、 h の計算時のひずみエネルギーはいずれのモデルでも $G\gamma_0^2/2$ を用いていることに注意されたい。

4. 減衰定数と材料減衰定数

式(2)で定義される β を文献 1) では critical damping ratio、文献 2) では fraction of critical damping と読んでいる。しかし、式(2)には critical damping はない。これらは、1 質点系の用語(式(9)で定義した β_1)である。Voigt モデルを用いている場合には、式(6)に示したように、 β と h を区別する必要が無かったことから、その流用で特に意識せず用いられたものと考えられる。

地盤工学では、繰返しせん断試験の結果より式(5a)より求めた h の事を損失係数⁵⁾、履歴減衰率⁶⁾、履歴減衰係数⁷⁾など履歴吸収によるエネルギーに着目した名前がつけられていた。しかし、最近では、減衰定数⁸⁾⁹⁾、減衰比¹⁰⁾など、1 自由度系の地震応答に基づく用語も用いられてきている。筆者らの感覚でも減衰定数が一般的ようである。

1 質点系の問題で用いられる

減衰定数は粘性減衰材のみにとっては定数ではないが、履歴減衰にとっては定数であるし¹¹⁾、式(2)と式(9)では定義も異なる。ここで、 β に対する適切な用語が見当たらないことから前報³⁾では減衰パラメータと名前をつけた。しかし、上記の議論を考えると、 β は先に定義した減衰パラメータではなく材料減衰定数 (Material damping ratio) と呼ぶのが適切と考える。

5. おわりに

オリジナルの SHAKE で用いられている Sorokin モデル、その改良版の Lysmer モデル、筆者らの提案した YAS モデルの特性を比較した。これをまとめると以下である

- 1) Sorokin モデルは繰返しせん断試験の最大応力 $G\gamma$ を過大評価する。
- 2) Lysmer モデルは減衰を過小評価する。式(12)より h から β を求めて使えば、YAS モデルと同じになる。
- 3) YAS モデルは最大応力、減衰が実験値と同じである。
なお、適用範囲は $h \leq 0.5$ である。
- 4) 式(2)で定義した β を材料減衰定数と名付けた。

参考文献

- 1) Schnabel, P. B., Lysmer, J. and Seed, H. B.: SHAKE A Computer program for earthquake response analysis of horizontally layered sites, Report No. EERC72-12, University of California, Berkeley, 1972
- 2) Lysmer, J.: Modal damping and complex stiffness, University of California Lecture note, University of California, Berkeley, 1973.
- 3) 吉田望, 安達健司: 地盤の地震応答解析のための複素剛性, 日本地震工学会論文集, 第 21 巻, 第 1 号, pp.65-81, 2021
- 4) Sorokin, F., Internal and external friction by vibrations of rigid bodies, CNIISK 162, Moscow, 1957. (Tesar, A.: Tuned vibration control in aeroelasticity of slender wood bridges, Coupled Systems Mechanics, Vol. 1, No. 3, pp. 219-234, 2012.による)
- 5) 石原研而: 土質動力学の基礎, 鹿島出版, 303pp., 1976
- 6) 地盤工学会室内試験規格・基準委員会: 地盤材料試験の方法と解説 訂正第 2 刷, 地盤工学会, 1156pp., 2009
- 7) 足立紀尚, 龍岡文夫: 新体系土工学 18, 土の力学 III-圧密・せん断・動的解析-, 技法堂出版, 339pp., 1986
- 8) 国生剛治: 地震地盤動力学の基礎 エネルギー的視点を含めて, 鹿島出版会, 384pp., 2017
- 9) 常田賢一, 小田和広, 佐野郁雄, 澁谷啓, 新納格: 土質力学, 理工図書, 298pp., 2010
- 10) 野本将太, 阿部慶太, 池本宏文, 竹谷勉: 修正 GHE・GHE-S モデルを用いたせん断土槽内の地盤挙動の解析的検討, 第 55 回地盤工学研究発表会, 論文番号 21-8-2-06, 2020
- 11) 田治見宏: 建築振動学, コロナ社, 213pp., 1965