58

第3回
計算力学シンポジウム

次数低減積分を用いた
液状化による地盤の大変形解析

吉田　望　（佐藤工業）

1．はじめに

浜田等[1]によって液状化によって広範囲にわたり大きな地盤の永久変形が生じることが示されて以来、この様な大変形を予測するための試みが行われつつある[2]が、そのメカニズムは十分解明されているとは言い難いようである。

永久変位を決める大きな要因として、地震動による振動と、重力効果の二つが考えられる。前者は地震による振動中に非線形挙動をし、残留変形が残る現象で、通常の非線形挙動と同じメカニズムである。これに対して後者のメカニズムは地盤材料に特徴的と考えられる。すなわち、過剰間隙水圧の発生に伴い有効応力が減少し、これに伴い有効応力の関数である弾性係数やせん断強度などが減少するのに対し、重力等の静的な力は変わらないので、地盤は新しい材料定数に応じた新しい釣合位置に移動することにより変位が生じるものである。このメカニズムは、有効応力の減少による材料の劣化に伴う初期応力の解放過程と見ることも出来る。これら二つのうち前者のメカニズムが卓越しているとすれば永久変位の向きや大きさは地域全体について同じようになるはずであるが、実際の地震被害を見るとこれらはむしろ地形と密接に関係しているようである[3]。すなわち、地震動は地盤に液状化を生じさせるという意味では影響力があるがその後の永久変形の大きさを決めるのはむしろ地形的な要因である後者のメカニズムと考えることが出来る。

以上のような考察の基づき、地震力の影響を除去し、後者の影響のみを考慮できる解析手法を考案した。本報告ではその解析方法について示す。

2．解析方法

2．1　仮定

地震動の影響を除去するために、本解析では次のような仮定を設ける。

① 地震の作用時には非排水条件が成立する。

② 有効応力の低減は各要素で比例的に生じる。すなわち、各要素の有効応力の初期有効拘束圧σ_{m0}'に対する減少量$d\sigma_m'$は、載荷条件を表す比例定数λ（λ=0～1)を介し

$$d\sigma_m' = \lambda \cdot k\sigma_{m0}' \tag{1}$$

で予測できる。ここで、kは各要素の最大の有効拘束圧の低減量を表す係数で、0～1の範囲で各要素毎に異なる値を取る。λはk＝1の時には物理的には有効拘束圧の低減率である。

仮定①は、液状化解析でよく用いられる仮定である。これに対して仮定②は本解析で新たに用いた方法である。従来このような場合には過剰間隙水圧の発生量を与えるような方法がよく行われてきた。しかし、過

佐藤工業（株）中央技術研究所地盤耐震部　主席研究員　〒243-02　厚木市三田47-3
☎ 0462-41-2171

剰間隙水圧の発生量と有効応力の変化量の関係は一意的に決まるものではなく、境界条件に応じても変化するので、本解析のように有効応力がほとんど0になるところまで解析を行う場合には、最大過剰間隙水圧を事前に決めることは困難であるので、仮定②を用いたわけである。

2．2　基礎式およびその解法

液状化の問題であるから、土と水の2相系材料を考える。土骨格の構成則には、ダイレタンシーによる体積ひずみ ε_{vd} を別に与えることにし、残りの部分について、体積変化に対しては増分弾性挙動を仮定し、せん断変形については双曲線モデルを用いることにする。これを増分形で式(2)のように表す。

$$\{d\sigma'\}=[D]\,(\{d\varepsilon\}-\{m_d\}d\varepsilon_{vd}) \qquad (2)$$

ここで、$\{d\sigma'\}$ は有効応力増分ベクトル、$\{d\varepsilon\}$ は全ひずみ増分、$[D]$ は接線剛性マトリックス、$\{m_d\}$ は体積ひずみ ε_{vd} の配分比を決めるベクトルである。

次に、水に関しては、非排水条件下の水の質量保存則は式(3)のようにかける。

$$\{m\}^T\{\varepsilon\}-np/K_w=0 \qquad (3)$$

ここで、n は間隙率、K_w は水の体積弾性係数である。

さらに、全応力増分 $\{d\sigma\}$ と有効応力との関係式は式(4)で表される。

$$\{d\sigma\}=\{d\sigma'\}+\{m\}dp \qquad (4)$$

ここで、dp は間隙水圧増分、$\{m\}=\{1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\}^T$ はKroneckerの δ に対応するベクトルである。

以上が解析に用いる基礎式である。なお、構成則に用いられる接線体積弾性係数、微小ひずみ時のせん断弾性係数などはいずれも有効応力の関数で、以下の計算ではいずれも有効拘束圧の1/2乗に比例するとしている。また、$\{m_d\}$ については、Zienkiewicz等は体積ひずみは等方的に生じるとして $\{m^d\}=\{m\}/3$ としている[4]が、この様に体積ひずみを配分すると有効応力の減少が等方的に起こることになり実状と合わない。$\{m^d\}$ は境界条件にも依存することは明かであるので、ここでは地震前の状態で各要素ごとに単位の間隙水圧を発生させその時生じるその要素の垂直ひずみの比を体積ひずみの配分率とした。

式(2)～(4)より間隙水圧と有効応力を消去すると、非排水条件下における全応力－ひずみ関係式として次式が得られる。

$$\{d\sigma\}=[D]\,(\{d\varepsilon\}-\{m^d\}d\varepsilon_{vd})\;+\{m\}K_w\{m\}^T\{d\varepsilon\}/n \qquad (5)$$

なお、本解析手法は3次元でも有効であるが、以下では平面ひずみ条件に議論を限定する。

式(5)よりＦＥＭの定式化を行うと次式が得られる。

$$[K]\{du\}=\{E_d\}d\varepsilon_{vd} \qquad (6)$$

ここで、$\{du\}$ は節点変位ベクトルである。また、要素剛性マトリックス $[K]$ 等はひずみ－変位マトリックス $[B]$ を用い、次のように表される。

$$[K]=\int_A[B]^T\,([D]+\{m\}K_w\{m\}^T/n)\,[B]dA \qquad (7)$$

$$\{E_d\}=\int_A[B]^T[D]\{m_d\}dA \qquad (8)$$

なお、過剰間隙水圧の発生過程では外力の変化は無いので、式(6)ではこの項は入っていない。式(6)は体積ひずみ増分 $d\varepsilon_{vd}$ を与えれば解くことができる。ある載荷ステップにおいて載荷パラメータ λ の値が与えられれば、そのステップで生じるべき有効応力の変化量 $\Delta\sigma_m'$ は、式(1)から求めることが出来る。しかし、$\Delta\sigma_m'$ と $d\varepsilon_{vd}$ は一意的には結びついていないので、ここでは体積弾性係数Ｂを用い近似的に、

$$d\varepsilon_{vd}=\Delta\sigma_m'/B \qquad (9)$$

によりダイレタンシーによる体積ひずみ増分を与えることにする。この結果、各計算ステップでは式(1)は厳密には満たされないことになるが、その差は計算ステップを小さく取ることで十分小さくすることが出来る。

先にも述べたように、本解析では有効応力がほとんど0になる状態までの解析を行う。有効応力が小さくなっても、式(7)の（見かけの）体積弾性係数の値は（水の体積弾性係数の値が支配的なので）余り変わら

ないが、せん断剛性はどんどん小さくなる。このような場合に微小変形理論を用いると、せん断変形は無限に大きくなってしまうので、幾何学的な非線形性を考慮する必要がある。この場合、一般的には式(7)の剛性マトリックスに幾何剛性マトリックスを加えるのが普通である。しかし、次節で述べる抗砂時計マトリックスでは幾何学的な非線形を考慮していないことから、これと釣合を保つ意味で、ここでは幾何剛性マトリックスは考慮せず、幾何学的な非線形の効果は変形後の釣合状態を満たすことにより考慮することにする。すなわち、移動座標の考えを用い、各増分計算時に変形を考慮し座標値を置き換え、新しい座標の元で全応力が重力と釣りあうように収束計算を行うことにする。

2．3　次数低減積分と抗砂時計マトリックス

水の体積弾性係数は土骨格のそれに比べて非常に大きい。また、非排水条件を非圧縮条件として扱うために水の体積弾性係数に非常に大きな値を使うこともある。すなわち、式(7)の見かけの接線剛性マトリックスの体積弾性係数はせん断係数に比べて非常に小さく、したがって、見かけのポアソン比はほとんど0.5となる。このような場合には式(7)の積分に通常用いられる２点（または３点）のGauss積分を用いると数値積分の誤差が非常に大きくなることが知られている。この問題を避けるため、次数低減積分のうちでも非圧縮挙動によいといわれる１点Gauss積分を用いることにする。このとき、式(7)、(8)の積分はそれぞれ次のように表される。

$$[K]=A[B_c]^T([D_c]+\{m\}K_w\{m\}^T/n)[B_c] \tag{10}$$

$$\{E_d\}=A[B_c]^T[D_c]\{m_d\} \tag{11}$$

ここで、添字ｃは要素中心の値であることを示している。この方法によれば、各要素の状態変数は要素中心だけしか計算しなくてよいので、コンピュータの記憶容量、計算時間なども少なくなるという利点もある。

前述のように、次数低減積分はポアソン比が0.5に極端に近い場合には有効であり、実際0.499999程度のポアソン比でも問題なく剛性マトリックスを計算することが出来る。しかし、式(10)で計算される剛性マトリックスは一定ひずみモードに対しては非特異であるが、砂時計モードと呼ばれる変形に対しては特異（すなわち、ひずみエネルギーが０の剛体変位以外の変形パターンがある）ので、砂時計モードといわれる変位が現れることがある。この問題を解決するために、抗砂時計マトリックスを導入する。

４辺形要素については、式(12)に示す変位関数$\{\gamma\}$が、剛体変位と一定ひずみ変位モードに対して直交する[5]。

$$\{\gamma\}=\{h\}-(\{h\}^T\{x\}\{b_x\}+\{h\}^T\{y\}\{b_y\})/A \tag{12}$$

ここで、$\{h\}=\{1\ -1\ 1\ -1\}^T$ は砂時計モードに対する基底ベクトル、$\{x\}$, $\{y\}$は節点座標（その成分をx_i、y_iで表す）である。また、

$$\begin{aligned}\{b_x\}&=\{y_2-y_4\quad y_3-y_1\quad y_4-y_2\quad y_1-y_3\}^T/(2A)\\ \{b_y\}&=\{x_4-x_2\quad x_1-x_3\quad x_2-x_4\quad x_3-x_1\}^T/(2A)\end{aligned} \tag{13}$$

この変位関数$\{\gamma\}$を用いると、砂時計モードの変形に対する節点変位増分$\{du\}=\{du^x\quad du_y\}^T$と節点力増分$\{df_H\}$の関係は次のように表される。

$$\{df_H\}=\begin{bmatrix}\{\gamma\}c_x\{\gamma\}^T & 0\\ 0 & \{\gamma\}c_y\{\gamma\}^T\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}du^x\\ du_y\end{Bmatrix} \tag{14}$$

抗砂時計マトリックスは、式(14)の係数マトリックスで、これを式(10)の剛性マトリックスに加えることによって、砂時計モードの変形を抑制する。式(14)の係数c_x、c_yは任意の値でかまわないが、長方形要素に対しては、曲げ剛性を合わせるように決めるのが普通である[6]が、一般の４辺形要素の場合には正確な曲げ剛性を決めることは困難であるので、ここでは、長方形要素との類似から、次のように決めることにする。

$$c_x=\frac{E}{12}\frac{a}{b}\qquad c_y=\frac{E}{12}\frac{b}{a} \tag{15}$$

ここで、

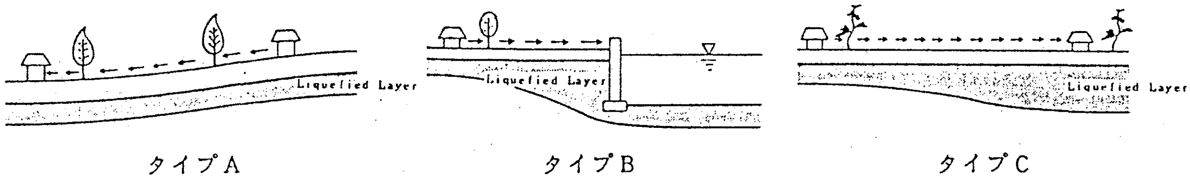
$$a = \sqrt{\{b_x\}^T\{b_x\}} \qquad b = \sqrt{\{b_y\}^T\{b_y\}} \tag{16}$$

また、平面ひずみ条件下ではEは体積弾性係数Bとせん断弾性係数Gより次のように求められる。

$$E = \frac{4G(4B+G)}{3B+4G} \tag{17}$$

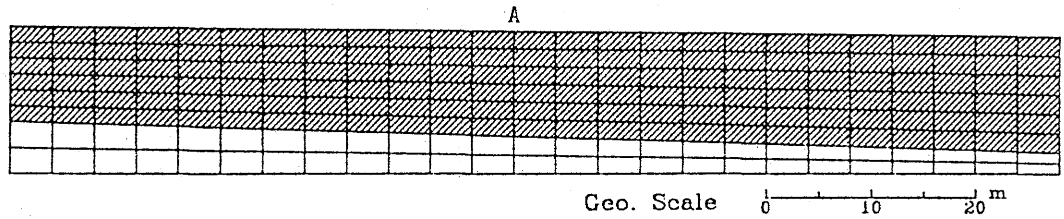
3．解析例および考察

浜田らは、液状化に伴う地盤の永久変位の例として図－1の3つのタイプをあげている。このうち地表層、液状化層とも かなり傾いているタイプA、側方に護岸構造物等がありこれが地震時に変形するタイプBについてはそのメカニズムはかなり明瞭である。しかし、地表面がほぼ水平で、液状化層下面が傾いているタイプCについては、そのメカニズムは明瞭とはいえないようである[2]。ここでは、本解析の適用性を検討するために、このタイプの地盤の解析を行う。



図－1　液状化による地盤の永久変形のタイプ[7]

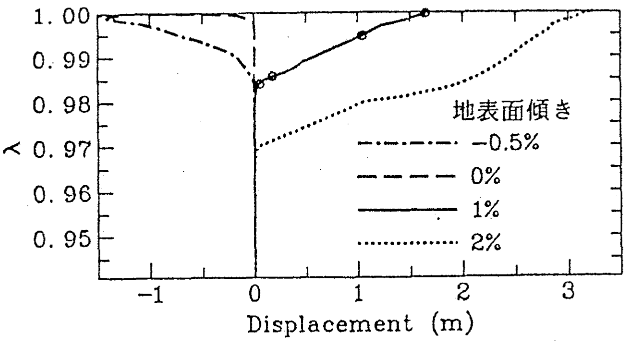
図－2に示す地盤を解析する。解析範囲は水平方向に100mの範囲で、解析範囲の側方では水平方向の変位は拘束されている（すなわち永久変位は生じていない）としている。地盤は2層地盤で、表層地盤（図の斜線部）はN値3程度で平均層厚10m、地表面勾配1％の砂層とし、この層を液状化層（仮定②のk＝1）とする。下方地盤はN値10程度で平均層厚3.5m、上面傾き3％の砂層としこの層では間隙水圧の発生はない（k＝0）とする。図－2のA点は地表のほぼ中央の位置であり、以後この位置の水平変位を永久変位の指標とすることにする。



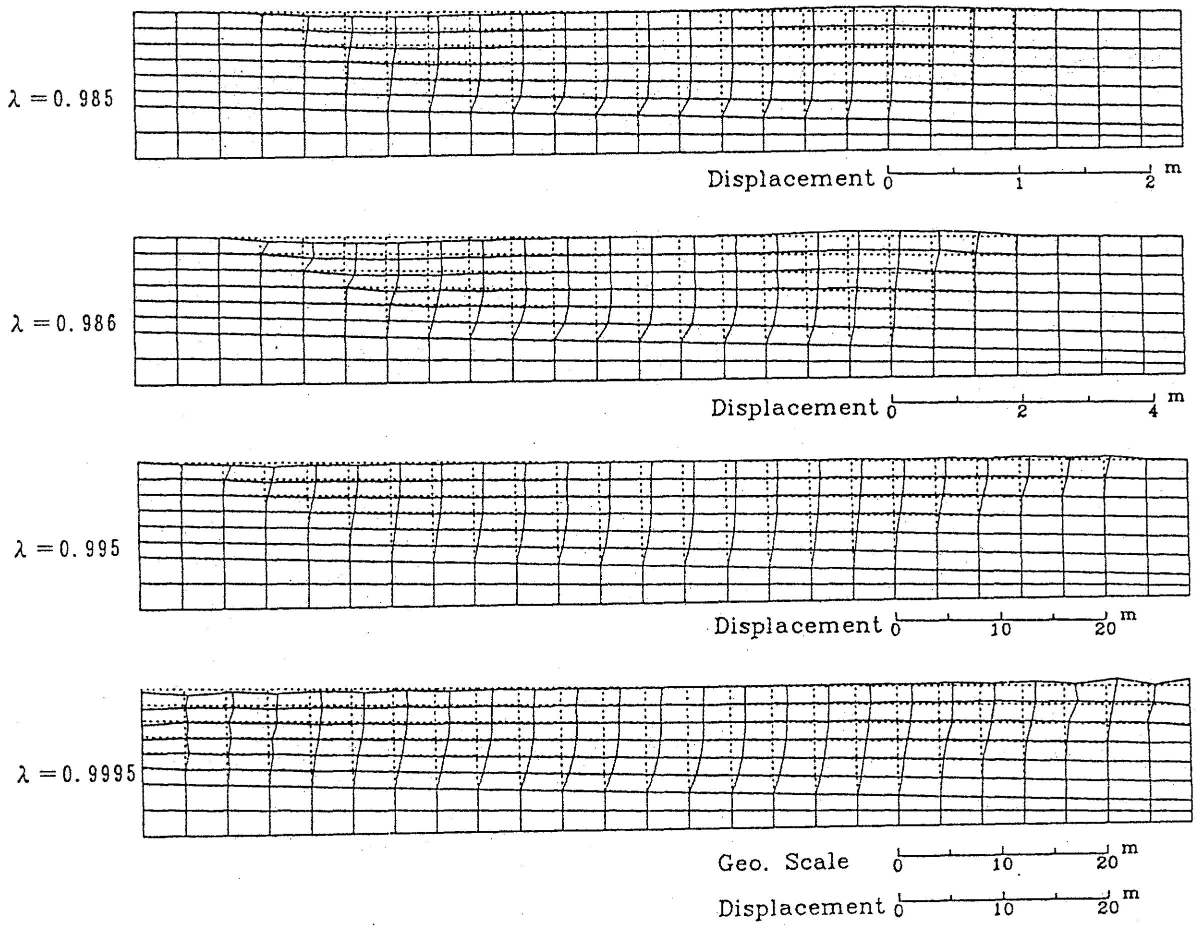
図－2　解析した地盤とFEMモデル

図－3に実線でA点の水平変位（他の線については後に説明する）を、図－4に図－3で○で示した状態の変位図を示す。水平変位はλが0.98を越える（有効拘束圧が初期値の0.2%より減少する）頃より大きくなりはじめ、有効応力の減少と共に直線的に増加して行く。λ＝0.9995（有効拘束圧が初期有効拘束圧の0.05%）でA点の水平変位は約1.64mとなり、その後は水平変位はほとんど変化しない。次に図－4で変位の現れ方を見ると、水平変位の大きな領域は最初地盤中央部に現れ、次第に側方に広がってゆく。この領域では水平変位が大きいのはもちろんであるが、地表近くでは鉛直変位も大きく、左側の部分は沈下し、右側の部分は浮き上がり、全体として地表面は次第に水平になって行く。中央部で先に変位が大きくなるのは次のようなメカニズムによると考えられる。すなわち、中央部の方が側方近くに比べて体積変化に対する変位の拘束が小さいので、式(2)の$\{m_d\}$は端部に比べて成分間の差が小さく、有効応力はより等方的に減少する。

この結果中央部の方が側方に比べ早く降伏することになる。もちろん、降伏したとしてもそれが直ちに大変位に結びつくわけではなく、降伏後の有効応力の減少に伴い解放された応力を周辺の要素が受け持てる間は変位は大きくはならない。しかし、周辺の要素も降伏してくれば、解放される応力の再配分ができなくなり変形が大きくなるのである。先に降伏した中央部の方がこの様な状態なりやすく、したがって先に大きく変形し始めることになる。

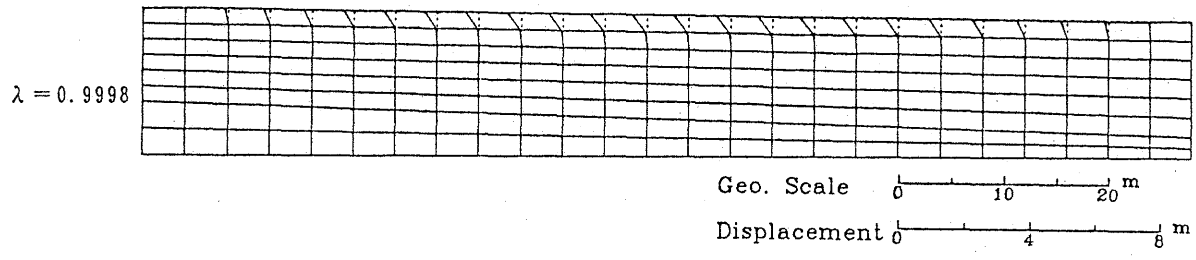


図－３　地表面中央（Ａ点）の水平変位



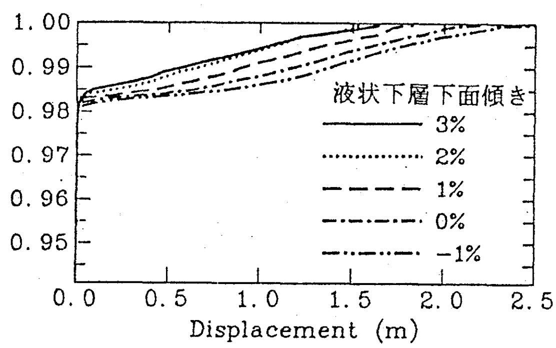
図－４　地盤変位の例

次に、地表面の傾きが永久変位に与える影響について調べてみる。図－２の地盤では地表の傾きは１％とした（以後これを基準モデルと呼ぶ）が、地盤の平均層厚を変えず地表面の傾きを変えた計算を行った。図－３に解析結果を基準モデルに対する計算結果とともに示す。地表面勾配が２％の場合には基準モデルと比べて、変位が大きくなり始めるλの値は小さく、変位の増加は大きい。しかし、変位が大きくなり始めると



図－5　地盤変位の例（地表面水平のとき）

変位が全体として直線的に増加するという傾向は同じである。地表面が水平の場合には変位はほとんど現れないが、解析の最後近くになって負の変位が生じるようになる。図－5に変形図を示すが、変位は地表近くの要素でのみ生じている。地表面勾配が逆転すると地盤変位の向きも逆転する。以上の結果より地表面の傾きが大きくなるほど変位は早く大きくなり、また、変位の大きさも大きくなるということが言える。この様な定性的な傾向は、変位の主な原因が初期応力の解放にあることから当然と言えるが定量的な考察ができるのが本解析の特徴である。



図－6　液状化層下面の影響

最後に液状化層下面の傾きが永久変位に与える影響について調べる。図－6は地表面の傾きを基準モデルと同じ1％にしたままで液状化層下面の傾きを基準モデルの3％から－1％まで変化させたときのA点の水平変位である。図よりまず地盤の変位が大きくなり始めるλの値は液状化層下面の傾きによらずにほぼ同じであることがわかる。その後の変位は、液状化層の傾きが小さくなるほど大きくなって行き、液状化層下面の傾きが地表の傾きと反対の場合が一番大きくなっている。

4　おわりに

液状化による地盤の永久変形を求めるための解析を行った。モデル地盤を用いた解析例の結果、地表面がほとんど水平な場合でも地震被害に見られるのと同じオーダーの変形を得ることが出来た。また、パラメトリックスタディの結果、永久変位にもっとも大きく影響するのは地表面の傾きであることが分かった。

参考文献　1) 浜田政則、安田進、磯山龍二、恵本克利、液状化による地盤の永久変位の測定と考察、土木学会論文集、第376号/Ⅲ-6、pp.211-220、1986年12月
2) 例えば、Yoshida,N., Numerical Analysis on Liquefaction-Induced Ground Displacement, Abstract, First Japan-US Workshop on Liquefaction, Large Ground Deformation and Their Effects on Lifeline Facilities, Nov. 1988
3) 例えば、地盤変状と地中構造物の地震被害に関する研究委員会、第1分科会資料
4) Zienkiewicz,O.C. et al, Liquefaction and Permanent Deformation under Dynamic Conditions-Numerical Solution and Constitutive Relations, Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads, Zienkiewicz,O.C. and Pande,G.N. ed., John Wiley and Sons, 1982
5) Flanagan,D.P. and Belytschko,T.A., A Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral with Orthogonal Hourglass Control, Int. J. Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp.679-706, 1981
6) Kosloff,D. and Grazier,G.A., Treatment of Hourglass Patterns in Low Order Finite Element Codes, Int. J. NUmerical and Analytical Methods in Geomechanics, Vol. 2, pp.57-72, 1978
7) Hamada,M., Yasuda,S., Isoyama,R. and Emoto,K., Study on Liquefaction Induced Permanent Ground Displacements, ADEP, 1986