

# **STADAS**

# A COMPUTER PROGRAM FOR STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF GROUND AND SOIL-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS

Nozumu Yoshida

Head, Engineering Research Institute Sato Kogyo Co. Ltd. Japan

and

Visiting Research Engineer Department of Civil Engineering University of British Columbia Vancouver, B.C. V6T 1Z4 Canada

August 1993



# **STADAS**

# A COMPUTER PROGRAM FOR STATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF GROUND AND SOIL-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS

Nozumu Yoshida

Head, Engineering Research Institute Sato Kogyo Co. Ltd. Japan

and

Visiting Research Engineer Department of Civil Engineering University of British Columbia Vancouver, B.C. V6T 1Z4 Canada

August 1993

# CONTENTS

ntroduction	1

# Part I Data input

1	Fundamentals I-1			
	1.1 Elements, stress, and strainI-1			
	1.2	Method for preparing input dataI-4		
	1.3	Input/output through filesI-6		
	1.4	Output I-7		
	1.5	Treatment of pore water I-8		
2	Fun	damental input dataI-10		
	2.1	Title		
	2.2	Fundamental constantsI-10		
	2.3	Model constantsI-11		
	2.4	Element property I-12		
	2.5	Node dataI-13		
	2.6	Element data I-15		
	2.7	Element thickness		
	2.8	Boundary condition for pore waterI-18		
	2.9	Types of analysis I-19		
3	Inp	ut of element propertyI-21		
	3.1	SpringI-21		
	3.2	DashpotI-25		
	3.3	BeamI-27		
	3.4	Solid element for two dimensional analysis I-28		
	3.5	Joint element (slip element)I-34		
	3.6	Solid element for 3-dimensional analysisI-35		
	3.7	Solid element for SH-wave analysisI-36		
	3.8	Rotational springI-37		
4	Inp	ut of analysisI-38		
	4.0	End of the job I-39		

	4.1 Active element and change boundary condition	<b>I-4</b> 0
	4.2 Layer construction and switch-on-gravity analysis	I-46
	4.3 Excavation analysis	I-53
	4.4 Static analysis	<b>I-5</b> 7
	4.5 Earthquake response analysis	<b>I-6</b> 3
	4.6 Dynamic response analysis by node excitation	<b>I-67</b>
	4.7 Change of water table	<b>I-7</b> 1
	4.8 Consolidation analysis	I-74
	4.9 Eigen value problem	I-78
	4.10 Release fixed constraint	<b>I-8</b> 0
	4.11 Change title	I-82
	4.12 Print current state	I-83
	4.13 Export current response value	I-84
	4.14 Import response value	I-85
	4.15 Convergency condition	I-86
	4.16 Change parameter	I-87
5	Comments for preparing input data	<b>I-8</b> 8
6	Error message	I-104

# Part II Theory

1	Governing equations for 2-phase materialII-1			
	1.1 Fundamental equations and notationsII-			
	1.2	Equilibrium equation	II-4	
	1.3	Continuity condition (mass conservation equation)	II-5	
	1.4	Various governing equation of 2-phase material	II-6	
	1.5	Formulation into Finite Element Method	II-11	
	1.6	Boundary condition	II-21	
	1.7	Numerical integration with respect to time	II-30	
		References	II-34	
2	Hou	urglass mode deformation mode	II-36	

1100	grass mode determation mode	-50
2.1	Fundamental equations	I-36
2.2	Element stiffness matrix	[-37

	2.3 Hourglass deformation mode			
		2.4	Orthogonality against rigid body motionII-39	
		2.5	Orthogonality against constant strain modesII-41	
		2.6	Anti-hourglass mode deformation matrixII-41	
		2.7	Coefficient of anti-hourglass deformation matrixII-42	
		2.8	Trigonometric elementII-44	
	3	Var	ious element and constitutive modelII-47	
		3.1	Constitutive models for one-dimensional analysisII-47	
		3.2	SpringII-55	
		3.3	BeamII-57	
		3.4	DashpotII-63	
		3.5	Solid elementII-64	
		3.6	SH wave elementII-83	
		3.7	Joint elementII-83	
	4 Eigen value problem and modal damping			
		4.1	Conversion Into standard eigen value problemII-88	
		4.2	Modal dampingII-89	
		4.3	Strain energy proportional dampingII-92	
Part	ш	۸de	lition of constitutive model	
		/		
	1	Var	iables available in the subroutineIII-1	
		1.1	Array "EMAT"	
		1.2	Arrays "ELPRP" and "ELHST"III-1	
	2	Nan	ne of subroutinesIII-1	
	3	Con	trol by IFLAGIII-2	
	4	Itera	ationIII-4	
	5	Stor	rage of material property, EMATIII-6	

·

6	Elei	ment variable, ELPRP and ELHST	III-7
7	Var	ious element	ШІ-8
	7.1	Spring	III-8
	7.2	Dashpot	ПІ-9
	7.3	Beam	ПІ-9
	7.4	2-D solid element	III-10
	7.5	Joint element	<b>III-1</b> 1
	7.6	3-D solid element	III-12
	7.7	SH wave element	III-12
	7.8	Rocking element	ПІ-13

### Introduction

Many compute codes have been developed to analyze the behavior of ground and soil-structure system. They were usually designed to focus on a single phenomena, such as consolidation analysis, earthquake response analysis, static analysis, etc. In the actual ground, situation is more complicated because they may be appear repeatedly or coupled. For example, the stress state of a earth dam during and after construction is to be treated as layer construction problem or static problem. When water is stored in the dam, the water level changes, which result is the change of effective stress; because of the nonlinear nature of the stress-strain relationships, resultant stress state is no the same with the one obtained by layer construction analysis using present water level. The water table may change due to rainfall, which may affect the stress state. The dam may subject earthquake, in which case earthquake response analysis is required. Consolidation analysis may be suitable to compute excess pore water dissipation after the earthquake. There may be improvement to rise the height or to excavate, which also changed the circumstances.

When analyzing these complicated phenomena, several codes have been sequentially or repeatedly used because each code usually has one function. A few computer codes have functions to analyze variety of phenomena. These codes cannot, however, solve the actual ground situation systematically same as a code with single function because various functions are just gathered. Therefore, the code is to be used repeatedly instead of using various codes with single function sequentially.

STADAS is a multi-purpose computer code for the static, consolidation, and dynamic analysis based on the effective stress concepts. It is designed to analysis complicated ground situations systematically following the time. It has variety of element type, such as spring, beam, dashpot, solid, joint, etc. and nonlinear behavior of these element can be treated. It is also designed so that addition of a new constitutive model is very easy; the subprogram which compute initial or tangent stiffness and stress for gives strain can be installed. Therefore STADAS can be used for almost all phenomena related to the behavior of ground as well as soil-structure system and structure itself.

STADAS is designed to analyze 1-dimensional and multi-dimensional behavior. Present version, unfortunately, can analyze only two-dimensional problem including SH-wave traveling, but structure of the code is designed to deal with other dimension as can be seen in the input manual, part I of this book.

-

# Part I

# Data input

### **1** Fundamentals

STADAS is designed especially to compute the behavior of the ground under various external factors such as earthquake, etc. However, the program has more functions than ordinary structural analysis computer codes. In this chapter, fundamental understandings, methods to use the programs, etc. are described.

# 1.1 Elements, stress, and strain

#### (1) Solid element

STADAS prepares 4-point isoparametric element for 2-dimensional analysis, and 4-point isoparametric element especially designed for SH wave propagation problem for solid element. Because STADAS focuses on the behavior of the ground, compression is taken positive in expressing stresses and strains, which is different to the ordinary structural analysis computer codes. The positive direction of stresses and positive deformation modes of strains are schematically shown in Figure 1.1. It is also noted that engineering strain is employed. The amount of shear strain in the engineering strain is twice as large as the one in the tenser strain (See Equations 1.1.1 and 1.1.3).



Figure 1.1.1 Positive directions of stresses and strains

$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$	tenser strain	(1.1.1)
$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$	engineering strain	(1.1.2)

SH-wave element is a special element specially designed for the analysis of SH-wave propagation. When 2-dimensional ground is defined in the x-y plane, the propagation of SH wave causes displacement in the x-direction. If dilatancy occurs, then displacements appears in both x- and y-directions as well as in z-direction, therefore the behavior is to be analyzed in 3-dimensional. However, if simple shear deformation is considered, then displacement appears only in z-direction, hence can be analyzed in 2-dimensional. Stress components are  $\tau_{zx}$  and  $\tau_{zy}$ , whose positive direction is shown in Figure 1.1.2.



Figure 1.1.2 Stresses and strains in the SH wave analysis

### (2) 1-dimensional element

An element that is defined by two nodes and has one degrees-of-freedom at each node, such as spring and dashpot, is called one-dimensional element in this manual. The positive direction of stresses and strains is defined by the user through input data; direction cosine against x-axis will decide it.

In the ordinary situation, direction cosine is taken as the vector from node 1 (first node at the definition of element nodes) to node 2 (last node at the definition of element nodes). The direction cosine  $\{T\}$  is defined as Equation 1.1.3.

$$\{T\} = \{\cos\theta \quad \sin\theta\}^T \tag{1.1.3}$$

Tensile force and displacement that separates two nodes are positive in this case. On the other hand, if one specify inverse direction as direction cosine,

$$\{T\} = \{-\cos\theta - \sin\theta\}^T \tag{1.1.4}$$

then compressive force is expressed as positive.

The user can define another direction as direction cosine. For example, direction perpendicular to the previous direction can be used so as to consider shearing deformation.

The two nodes may be defined to have the same coordinates, then stresses and strains are positive when the direction of displacement coincide with the defined direction.



Figure 1.1.3 Direction cosine and generalized force and displacement and positive direction.

#### (3) Beam

Positive direction of the generalized stress (Bending moment, M, Shear force, Q, and Axial force, N) of a beam element is shown in Figure 1.1.4. Corresponding generalized strain have the same positive direction, too.



Figure 1.1.4 Generalizes stress, strain and its positive direction of beam element.

### (4) Joint element (slip element)

The positive direction of stress and strain of a joint element have the same feature with solid element, which is shown in Figure 1.1.5.



Figure 1.1.5 Stress and strain and its positive direction of a joint element.

### **1.2 Method for preparing input data**

A method how to construct the input data for STADAS is described in this section. The flow of the sequence of input is basically shown if Figure 1.2.1



Figure 1.2.1 Flow for preparing input data

First of all, data explaining the overall feature of the model is required. Following the input of title, which is printed at the top of the print output, fundamental quantities such as dimensions,

flag numbers on coefficient matrix, treatment of stress, hourglass mode, etc. are required. They are used commonly in the following analysis. The explanation about them is given in section 2.1. Moreover, detailed explanation or commentary is shown in chapter 5.

Next, the model to be analysed must be specified. This indicates element property (element type and constitutive equation), nodal data, element data, and boundary condition against water. In front of them, numbers of these data are required. These data can be read from the files whose name is specified by the user as well as from unit 5 with other data. STADAS recognize what kind of problem is going to be solved, and count the necessary array size to be used in the analysis.

STADAS uses dynamic allocation system for preparing the storage area necessary in the analysis. In other words, STADAS prepares one large size array and divides them into various small arrays such as displacement, stress, coordinate, etc., which is the best method to use memory effectively and does not limit the size of the problem such as number of nodes and elements if a computer has sufficient size. Once STADAS decides the size of each variable, then it becomes impossible to solve the problem that requires more size than prepared.

Following these common and fundamental data, types of analysis and data necessary for the analysis is to be specified. Since STADAS is coded to be used in the analysis of ground and soil-structure interaction problem, sequence of input is designed suitable for various situations.

In the analysis of ground, it is rare to have a case that requires only one analysis. At least, the user should conduct the analysis to obtain initial stress state (because material property depends on effective stress) before analysing the problem in question. In many cases, different external source is to be applied and geometrical configuration may change. For example, let consider the construction of a dam. First, we should make dike (layer construction analysis) and we store water (change water level, hence effective stress). If earthquake strikes, then we need earthquake response analysis. If settlement after the earthquake is required, consolidation analysis will be more rational than to conduct earthquake response analysis at the end of dissipation of excess pore water pressure because the phenomenon is nearly static behavior. There may be excavation, external load application. STADAS can solve these phenomena step by step choosing the method of analysis one-by-one.

Because of these flexible features, nodes and elements specified by the user indicate that these nodes and/or elements have possibility to be used in the analysis. Nodes and elements which are not specified cannot be used in the analysis, but the user can specify whether the nodes and elements are used in the analysis or not through input data, which is described by the term "activate" and "inactivate" in this manual

Two methods are available to activate an element: flag on "ADDELM" and "CONSTRUCT"

which corresponds to activate elements simply and to make layer construction analysis, respectively. The first flag is to be used when initial state of the element (stress and state) is known and the latter flag is used when switch-on-gravity analysis is conducted from stress free state. On the other hand, a flag "EXCAVATE" is used to inactivate an element.

Specification of activate or inactivate nodes is not necessary because it is automatically determined from the element. The user may need to change support condition, in which case a flag "ADDELM" or "FREESUP" can be used.

The following analysis is available at present. Details will be described in chapter 4.

Activate element, change boundary condition for soil skeleton and water: activate element and specify initial stress and strains, specify or modify boundary condition of soil skeleton and water. Specify virtual mass.

Layer construction and switch-on-gravity analysis: activate elements and conduct static analysis applying the gravity load.

Excavation analysis: inactivate element

Static analysis: monotonic or repeated, nodal force or nodal displacement is treated as load. In the effective stress analysis, either drained or undrained condition is analyzed.

Earthquake response analysis: analyze the behavior under earthquake

Dynamic analysis: deals with node excitation problem.

Consolidation analysis: dissipate excess pore water and/or can treat liquefaction of sea bed.

**Eigen value problem**: computes natural period, eigen vector, and compute damping matrix from specified nodal damping or from the modal damping derived by the computer, which will be used in the future dynamic analysis.

Change water table: analyze the behavior when water table changes.

Release fixed constraint: make specified fixed condition free and apply force acted on the node.

### **1.3 Input/Output through files**

STADAS uses files of unit 5 for standard input file and unit 6 for standard output file. Since unit 5 corresponds to card input, maximum number of character in a line is limited to 80, and in the description of input in the following chapters it may call "card input". Unit 6 is used for standard output following the rule of FORTRAN.

STADAS also uses other files, such as working area, storage of input data, and output of time history etc. File names of these files are specified by the user. The program used unit numbers 20

to 29 for them, hence if there exists the same name in the same directory STADAS is going to be run, it may be modified.

The treatment of file name is as follows. If file name for input data is left blank, then the program assumes unit 5 is specified, in which case corresponding data is set in the same sequence of other input data from unit 5. It is noted maximum characters in a line are 80 in this case. It is also noted that, if file names other than unit 5 is specified and there are redundant data after the required input, they do not affect the calculation. However, if unit 5 is specified, number of lines (or cards) should be exactly what the program requires.

If files other then unit 5 is specified, then the program will usually close after reading a sequence of data. Therefore, if the user specifies the same file name at the other place, the program read the data from the beginning of the file. If the user does not want it and want to read following the previous input, the user must specify not to close the unit. This can be done by adding a symbol \* at the end of file name.

There are two different types of files for output. The first is a file to output current state to be used for next calculation. The latter is a file for, for example, time history output. If file name is left blank at first time they required, the program gives file names "fort.20" and "fort.21" for them, respectively. If, after the second input, file name is left blank, it indicates the same file name that previously specified. If file names other than previously defined, then the program close the previous file and open new file. Here it is noted that if the same file name that exists or that is used at previous calculating and closed once, then the content will be replaced.

### 1.4 Output

STADAS make two types of output. The first is to print the result of analysis and/or peak response values in unit 6, and the second one is files for time history etc., whose name is specified by the user.

The format of output in unit 6 can be recognized by the examples in Part III of this manual. The unit 6 is also used as output for the same time response values. This is not output as standard output, but the user can specify it through the input.

If the user wants time histories of specified node or element, then the user must specify node numbers and element numbers. Usually, the user specifies number of nodes and number of elements whose response values are required to be output, and specify node numbers and element numbers. If first input is zero, then there is no output. If negative value is specified, then response values of all nodes and/or elements are output.

If the user specifies a node, all the response value related to the node is output. In the case of

static analysis and consolidation analysis, nodal displacements are output. In the case of dynamic response analysis, velocities and accelerations are output as well. On the other hand, if the user specifies an element, all the state variable at the element is output. They are stresses and strains for solid element and generalized stresses and generalized strains for other types of element. Note that hourglass mode force for 4-point isoparametric element is not output.

These response values are written in the file with unformatted double precision variable. Therefore a computer code will be necessary to retrieve the necessary data from the file. The address is printed in the standard output. The following is an example to retrieve the data.

```
С
      Program to retrieve the result of the analysis
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A - H, O - Z)
      DIMENSION ND(100), ADATA(100), BDATA(1000)
      CHARACTER*30 FIN, FOUT
С
     Number of array should be changed depending on the data
      READ(5, 500) NDATA, FIN, FOUT
      OPEN (UNIT=10, FILE=FIN, FORM='UNFORMATTED', STATUS='OLD')
      OPEN (UNIT=11, FILE=FOUT, FORM='FORMATTED', STATUS='NEW')
      READ(5, 510) (ND(J), J=1, NDATA)
     NN = 1
     DO 10 I = 1, NDATA
     NN = MAXO(NN, ND(I))
   10 CONTINUE
   20 READ(10, END=100) (BDATA(J), J=1,NN)
      DO 30 I = 1, NDATA
     ADATA(I) = BDATA(ND(I))
  30 CONTINUE
     WRITE(11, 600) (ADATA(J), J=1, NDATA)
     GO TO 20
  100 CLOSE (UNIT=10)
     CLOSE (UNIT=11)
     STOP
 500 FORMAT(15, 5X, 2A30)
 510 FORMAT(1615)
  600 FORMAT(1P10E12.5)
      END
```

Here, first READ statement requires number of data to be retrieved and file name into which result is stored, and output file name. The next READ statement requires address numbers.

### **1.5 Treatment of pore water**

In the two-phase problem, pore water pressure is divided into hydrostatic pressure and excess pore water pressure. As shown in Part II of this manual, the difference is to consider gravity load (of body force) or not.

The program sometimes deals with hydrostatic pressure and sometimes excess pore water

pressure, hence output pressure is either of them. The user must recognize them from the output of the program.

Excess pore water pressure is used in the following:

- 1) Earthquake response analysis and dynamic analysis
- 2) Consolidation analysis
- 3) Static analysis (excess pore water pressure is zero in the drained condition)

On the other hand, hydrostatic pressure is used in the case of drained condition and excess pore pressure is used in the case of undrained condition.

1) Layer construction and switch-on-gravity analysis

2) Excavation analysis

3) Change of water table

## 2. Fundamental input data

Structure of the program, and basic rule to use the program is already explained in chapter 1. The explanation of input is described in chapters 2 to 4. In chapter 2, data related to the fundamental information is described. Element property is described in chapter 3, and commands for various analyses are explained in chapter 4.

Here it is noted that the parts shown in italic character do not work by current version of STADAS.

For the ease of the usage, the explanation of each variable in chapters 2 to 4 is made simple. If detailed explanation is supposed to be necessary, it is written in chapter 5. So as to take correspondence between these variables and chapter 5, variables whose detailed explanation and/or note is written in chapter 5 are shown with superscript. For example, if variable A is written like  $A^{20}$ , detailed explanation about variable (or term) A is given in section 5.20.

Most of the input data are read from unit 5, and some of them are read from other unit whose name is specified by the user. Detailed explanation about input files is described in section 1.5.

## 2.1 Title

### TITLE (A80)

1~80 TITLE Title of the problem, which is printed at the head of each standard output.

## 2.2 Fundamental constants

11000				
NDIM	NDIM, NSOL, NCMAT, NEFFE, IHGS, GACC, GAMAW, ATM, BUWAT, FIN			
(512, 3	(512, 3F10.0, A20)			
1~2	NDIM <sup>1</sup>	Dimension of the problem, 1, 2 or 3. (Always 2 at present)		
3~ 4	NSOL <sup>2</sup>	Flag number indicating the method to solve simultaneous equation.		
		=1: Symmetrical band matrix by sweep out		
		=2: Unsymmetrical band matrix by sweep out with partial pivoting.		
		Note that NSOL and NCMAT must be in consistent.		
5~ 6	NCMAT <sup>3</sup>	Flag number indication the method to build coefficient matrix.		
		=1: Symmetric matrix		
		=2: Unsymmetric matrix		
7~ 8	NEFFE <sup>5</sup>	Treatment of stress		

		=0: Total stress analysis in which water does not have freedom.
		=1: Effective stress
<b>9~1</b> 0	IHGS <sup>6</sup>	Hourglass mode stiffness consideration
		=0: Anti-hourglass mode matrix is not employed
		=1: Anti-hourglass mode matrix is considered.
11~20	GACC	Acceleration of gravity
		Standard value =9.80665 m/s
21~30	GAMAW	Unit weight of water
		Standard value =1 gf/cm3 = 1 tf/m3 = $9.8 \text{ kN/m}^3$
31~40	ATM <sup>8</sup>	Atmospheric pressure
		Standard value = 760 mmHg = 101325 Pa = $1.03323 \text{ kgf/cm}^2 = 10.3323$ tf/m <sup>2</sup> = 101.325 kN/m <sup>2</sup>
41~50	BUWAT	Bulk modulus of water
		Standard value = $2.2222 \times 10^6 \text{ kN/m}^2 = 2.2676 \text{ tf/m}^2$ (at 20°C)
51~70	FIN <sup>7</sup>	File name to read input data in sections 2.5 and 2.6 (node and element
		information). If FIN is left blank, it indicates unit 5 or card input.

# 2.3 Model constants

# NDPT, NELM, NMAT, NWIDTH, NBCO (1015)

NDPT	Number of node
NELM	Number of element
NMAT	Number of element property. Here the term "element property" indicates
	a couple of element type and a constitutive model in this manual. Even if
	the same constitutive model is used with different values of parameters,
	they are counted as set of element property in this program.
NWIDTH <sup>4</sup>	Number of cards to specify elements which have thickness other than unit
	length in two dimensional analysis. If elements with the same thickness
	are in the sequential order, only one card is used to specify thickness.
NBC0 <sup>10</sup>	Total number of side at which boundary condition of pore water is specified.
	In the case of total stress analysis, $NBC0 = 0$ .
	Here NBC0 does not count the boundary whose boundary value is 0. A
	relavant explanation is given in section 5.10, which is very important.
	Boundary conditions are specified in chapter 2.7. In this input, boundaries
	NDPT NELM NMAT NWIDTH <sup>4</sup> NBC0 <sup>10</sup>

with zero boundary value are also specified, but NBC0 is the number of boundaries with non-zero value. Value of NBC0 larger than actual number of boundary does not cause any problem except that the program uses larger size.

. .

# 2.4 Element properties

NMAT pairs of element property input is required. Element property number is to be in the order from 1 to NMAT.

### (1) Element property number

### IMAT, IELM, ICONST (315)

1~5	IMAT	Element property number
6~10	IELM	Flag number indicating element type (1 to 8)
		=1: Spring
		=2: Dashpot
		=3: Beam
		=4: Solid element (2-dimensional analysis)
		=5: Joint element
		=6: Solid element (3-dimensional analysis)
		=7: Solid element for SH wave analysis
		=8: Rocking element
11~15	ICONST	Flag number for constitutive model

ICONST	1	2	3	4
Beam	elastic	curved	linear	
Dashpot	constant	element	time	
Spring	elastic			
Solid	elastic	Tsujino	Tobita-Yoshida	Dancan-Chang
Joint	elastic			
Solid for SH wave	elastic			
Rocking	elastic			

The following input is described in chapter 3. After finishing input in chapter 3, the flow of input

comes back here.

### 2.5 Nodal data

Node number, coordinate, and boundary condition are specified in this section. They are read from file name FIN specified in section 2.2. If the file name is specified other than blank input, one card is necessary in front of the data in this section.

The FORMAT is different depending on the dimension of the analysis. They are explained in subsection (2), (3), and (4) respectively. It is noted that two-dimensional analysis is possible in current version.

Node number is to be specified from 1 to NDPT in an ascending order. Node number 1 and NDPT is always necessary. If node is not specified, the coordinate of missing node is interpolated from the neighboring nodes, and the boundary condition is set to be the same with previous node.

Here boundary condition indicates the freedom or movement of node. In the case of effective stress analysis, boundary condition in this section is condition of the movement of soil skeleton and that for water is input in section 2.7. Three types of boundary can be used: fixed, free, and dependent. In the case of fixed boundary, flag number is 1. In the case of free boundary, flag number is 0. On the other hand, if node movement is the same with other node, flag number is to be negative value whose absolute value is the node number of independent node. Here it is noted that node number of independent node must be smaller than the node number of dependent node. Moreover, independent node is to be active when dependent node is specified.

Boundary condition can be changed in each stage of analysis. In the input in this section, node must be specified free if the node may become free in the sequence of analysis.

#### (1) Dummy card

Input in this subsection is required only when file name FIN specified in section 2.2 is neither blank nor unit 5. One card is required whose content does not worry. The purpose of this card is that, in usual, the user put one card for memorandum to describe the content of the file.

#### (2) 1-dimensional analysis

The input for one-dimensional analysis (NDIM = 1) follows tin his subsection.

ND, KE	<u>SC, CORL</u>	2(215, F10.0)
1~5	ND	Node number
6 <b>~</b> 10	KBC	Boundary condition (Fixed = 1, Free = 0, Dependent = negative)

### 11~20 CORD Coordinate

## (2) 2-dimensional analysis

The input for two-dimensional analysis (NDIM = 2) follows in this subsection.

ND, KI	<u>BCX, KBC</u>	Y, KBCT, X, Y] (415, 2F10.0)
1~ 5	ND	Node number
6~10	KBCX	boundary condition to x-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)
11~15	KBCY	boundary condition to y-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)
16~20	KBCT	boundary condition rotation (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)
21~30	Х	x-coordinate
31~40	Y	y-coordinate

# (3) 3-dimensional analysis

The input for two-dimensional analysis (NDIM = 3) follows in this subsection.

N <i>D</i> , <i>KB</i>	<u>CX, KBCY,</u>	<u>KBCZ, KBCTX, KBCTY, KBCTZ, X, Y, Z (715, 3F10.0)</u>
1~5	ND	Node number
6 <b>~</b> 10	KBCX	<i>boundary condition to x-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)</i>
11~15	KBCY	<i>boundary condition to y-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)</i>
16 <b>~</b> 20	KBCZ	<i>boundary condition to z-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)</i>
21~25	KBCTX	boundary condition for rotation around x-axis (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)
26~30	KBCTY	boundary condition for rotation around y-axis (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)
31~35	KBCTZ	boundary condition for rotation around z-axis (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)
36~45	X	x-coordinate
46~55	Y	y-coordinate
56 <b>~</b> 65	Ζ	z-coordinate

#### I-14

### 2.6 Element data

Data related to element such as element node numbers, element property number, etc. are the inputs. Element number should be ordered from 1 to NELM in an ascending order. Among them, element number 1 and NELM is necessary. If element number is not specified between 1 to NELM, the element node number is inpterpolated from the neighboring elements, and element property of previous element is used as element property of missing element.

Input FORMAT is different depending on the dimension. Subsection (1), (2), and (3) describe input for 1-, 2- and 3-dimension. For some element, input in subsection (4) is necessary, which depends on constitutive models.

As described in detail in section 5.19, input in this section may be better than input in section 3 for particular parameters depending on constitutive models or element type. Number of these data is written at the beginning of each description of element property type. Here, 6, 5, or 3 data can be written in the first card for 1-, 2- and 3-dimensional analysis, respectively. Therefore input in subsection (4) is required only when data more than that is required.

### (1) 1-dimensional analysis

NE, M/	AT, (ENOD(	$I_{J}, I = 1, 2$ , $(PAR(J), J = 1, 6)$ (415, 6F10.0)
1~5	NE	Element number
6 <b>~</b> 10	MAT <sup>18</sup>	Element property number
		In the case of effective stress analysis, an element that can have degrees of pore water pressure is automatically set to be saturated. If the user want to set them dry (or does not have degree of freedom), MAT is to be set negative, in which case absolute value indicates element property number.
11~15	ENOD(1)	First element node number
16~20	ENOD(2)	Second element node number
21~30 ~	<b>PAR(1)</b>	Value of parameter, when necessary
<b>71~8</b> 0	<b>PAR</b> (6)	Value of parameter, when necessary Elem. Prop.

Note. N1 is the number of element node to define an element. N1 = N2 for one-dimensional analysis.

N2 |

Comment

NI I

2

Element type

Spring

Number

1

## (2) Two-dimensional analysis

NE, M	AT, (ENOD	(I), I = I, 4), (	PAR(J), J = 1, 5	) (615	, 5FI(	J.O)
1~ 5	NE	Element num	Element number			
6~10	MAT <sup>18</sup>	Element prop	perty number			
		In the case o	of effective stress	s analy	ysis, a	n element that can have degrees
		of pore water	r pressure is auto	matica	ally se	et to be saturated. If the user want
		to set them d	dry (or does not	have	degre	e of freedom), MAT is to be set
		negative, in v	which case absol	ute va	lue in	dicates element property number.
11~15	ENOD(1)	First element	node number			
16~20	ENOD(2)	Second elem	ent node number	•		
21~25	ENOD(3)	Third elemen	nt node number (	set 0 d	lepenc	ling on element type)
26~30	ENOD(4)	Fourth eleme	Fourth element node number (set 0 depending on element type)			
31~40	<b>PAR</b> (1)	Value of parameter, which is used when necessary				
~						
71~80	<b>PAR</b> (5)	Value of para	ameter, which is	used v	when	necessary
		Element type				
		number	Element type	N1	N2	Comment
	[	1	Spring	4	2	
		2	Dashpot		2	
		3	Beam	]	2	
		4	Solid		4	Counter clockwise direction
						4th element node = 0 for
						trigonometric element.
		5	Joint		4	Counter clockwise direction
						Longitudinal direct, first

Note. N1 is total number to be input to define an element, among which first N2 nodes are actually required and the rest of element node number should be set zero.

4

Counter clockwise

### (3) Three dimension analysis

# NE, MAT, (ENOD(I), I=1,8), (PAR(J), J=1,3) (1015,3F10.0) $1 \sim 5$ NE Element number

7

8

SH-wave

Rotational

- 6~10 MAT<sup>18</sup> Element property number In the case of effective stress analysis, an element that can have degrees of pore water pressure is automatically set to be saturated. If the user want to set them dry (or does not have degree of freedom), MAT is to be set negative, in which case absolute value indicates element property number.
- 11~15 ENOD(1) Element node number
- 16~20 ENOD(2) Element node number
- 21~25 ENOD(3) Element node number (set 0 depending on element type)
- 26~30 ENOD(4) Element node number (set 0 depending on element type)
- 31~35 ENOD(5) Element node number (set 0 depending on element type)
- 36~40 ENOD(6) Element node number (set 0 depending on element type)
- 41~45 ENOD(7) Element node number (set 0 depending on element type)
- 46~50 ENOD(8) Element node number (set 0 depending on element type)
- 51~60 PAR(1) Value of parameter, which is used when necessary
  - ~

71~80 PAR(3) Value of parameter, which is used when necessary

Element type				
number	Element type	NI	N2	Comment
1	Spring	8	2	
2	Dashpot		2	
3	Beam		2	
5	Joint		4	Counter clockwise direction
				Longitudinal direct. first
6	Solid		8	
8	Rotational		2	

Note. N1 is total number to be input to define an element, among which first N2 nodes are actually required and the rest of element node number should be set zero.

#### (4) Parameters

If total number of parameters input in the preceding card is smaller than the one that the program requires, the rest parameters are specified in this section. Eight data is written in a card.

PAR(J), J = 1, 8 (8F10.0)

### **2.7 Element thickness**

Input in this section is necessary only when NWIDTH in section 2.3 is greater than 0. Totally NWIDTH cards is required. Elements from element number IS to element number IE is set to have thickness THICK.

IS, IE, THICK (215, F10.0)		
1~5	IS	First element number
6~10	IE	Last element number. If $IE < IS$ , the program set $IE = IS$ .
11~20	WIDTH	Thickness

### 2.8 Boundary condition for pore water

Input in this section is not necessary for total stress analysis. The program automatically assumes undrained boundary for the side of the element that has degrees of freedom of pore water pressure, if there is no neighboring element or an element with no degrees of freedom, unless specified in this section. Therefore undrained boundaries need not specified in this section; drained boundary and flex boundary is to be specified. Element number and its side number is to be specified to define boundary.

The boundary condition can be modified in each analysis. Therefore boundary conditions which will not change through the analyses is recommended to be specified in this section.

If boundary condition within the analyzed region, it is usual that one boundary belongs to several element, in which case the user needs to specify one side. The program finds elements which have the same side and set the same boundary condition.

#### NBC (15)

1~5 NBC

Number of boundaries. If NBC=0, input in the following is not necessary. Otherwise, NBC cards is required.

NBCS, NE,	NSIDE,	BCVAL	(315, F10.0)

	1~5	NBCS	Type of boundary
--	-----	------	------------------

=-1: Undrained boundary

=-2: Drained boundary whose boundary value = 0.

=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero

		=-4: Fundamental boundary with nonzero boundary value
6~10	NE	Element number
11~15	NSIDE	Side number. Side number 1 is a side composed with first and second
		element node, 2 with second and third, 3 with 3rd and 4th, 4 with 4th and
		first. For trigonometric element, 3 with 3rd and 1st element node.
16~25	BCVAL	Boundary value

# 2.9 Type of analysis

As described in chapter 1, analyses are sequentially conducted by choosing the type of analysis and specify required input shown in chapter 4. The flow of the analyses are as follows. First chose type of analysis shown in this section, then move to corresponding input in chapter 4. After finishing the analysis, the flow comes back to this section. This cycle is continued till the end of analyses.

At the beginning of analysis, all the elements are inactive, therefore first work is to activate them. It can be done by choosing ADDELM or CONSTRUCT. After that, necessary analytical sequences are specified.

### KATYPE (A40)

1~40 KATYPE Flag indicating a type of analysis. It is capital letter character. The program retrieve first non-blank set of character that does not include blank to identify the analysis type. Therefore input of character after the first nonblank character set is neglected, which indicate this part can be used to write memorandum for memory of the analysis by the user.

END	End of job
ADDELM	Activate element, change boundary condition
CONSTRUCT	Layer construction and switch-on-gravity analysis
EXCAVATE	Excavation analysis or inactivate element
STATIC	Static analysis
EARTHQUAKE	Earthquake response analysis
DYNAMIC	Dynamic analysis under node excitation
WATER	Change of water table and saturation condition
CONSOL	Consolidation analysis

EIGEN	Eigen value problem
FREESUP	Release of fixed constraint
TITLE	Change title
PRTSTATE	Print current state
OUTPUT	Export current response value
INPUT	Import response value
CONVERGE	Change convergency condition
PARAM	Change value of parameter

For SH-wave analysis, only ADDELM and EARTHQUAKE is available. No effective analysis

See chapter 4 for the following input
# **3** Input for element property

Input of element property, i.e., element type and constitutive equation, is described in this chapter. The difference of input in each element mainly depends on the difference of constitutive equation. Element type and type of constitutive law is specified in chapter 2.4. The input following this is described in this section.

For some parameters, it may be convenient to input at section 2.6 instead of this section<sup>19</sup>. The same discussion is true for some material properties<sup>19</sup>. The input for these two types of data is described at the beginning of each section corresponding to element type and at the beginning of subsection corresponding to material or constitutive model. Since input format for these parameters are described in section 2.6 and section 5.19, it is not written in this section.

# 3.1 Spring element

The following four data are to be input in section 2.6 besides the input in this section<sup>19</sup>.

FRFLD,ALEN,AL	DIR,AKO (Data to be specified with element property in section 2.6)
FRFLD <sup>20</sup>	Usually 0. If first element node is on the free field, $FRFLD = 1.0$ . If
	second element node is on the free field, $FRFLD = 2.0$ .
ALEN	Length of element. When ALEN is set 0.0, the program set distance
	between nodes to the length. This length is not used for calculating a
	spring constant, but to calculate weight of element.
ADIR	Direction to which spring works, i.e., flag number on the direction cosine
	vector.
	=0: Longitudinal direction.
	=1.0: Transverse direction. $ADIR = 1.0$ for one-dimensional analysis. Not
	used for three dimensional analysis.
	=2.0: x-axis direction. ADIR = 2.0 for SH wave analysis.
	=3.0: y-axis direction
	=4.0: z-axis direction
	=5.0: x-axis negative direction
	=6.0: y-axis negative direction
	=7.0: z-axis negative direction
AK0	If value not equal to 0 is specified, the program uses specified value for

spring constant regardless the spring constant value specified in the following. This enable to avoid to prepare many element properties for the elements with same material property except spring constant.

#### **3.1.1 Elastic:** Constitutive model number =1

# UWEI, AK, ALPHA, BETA, PERM, AN (6F10.0)

1~10	UWEI	Weight per unit length
11~20	AK	Spring constant
21~30	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain
		energy proportional damping ratio (when negative)
31~40	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
41~50	PERM	Permeability
51~60	AN	Porosity.

#### 3.1.2 Curved skeleton: Constitutive model number =2

UWEI	UWEI, AK, ALPHA, BETA, PERM, AN (6F10.0) (First card)			
1~10	UWEI	Weight per unit length		
11~20	AK	Spring constant		
21~30	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain		
		energy proportional damping ratio (when negative)		
31~40	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .		
41~50	PERM	Permeability		
51~60	AN	Porosity.		

# TTP, NREV, PAR1, PAR2, PAR3 (215, 3F10.0) (Second card)

1~ 5	ITP	Flag number showing the type of constitutive model <sup>13</sup>
		=1: hyperbolic model
		$P = \frac{K\delta}{\delta}$
		$1 + \frac{\delta}{\delta_y}$
		=2: Ramberg-Osgood model
	$\delta = \frac{P}{K} \left( 1 + \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^{r-1} \right)$	
		=3: Davidenkov model

$$p = K\delta \left( 1 - \left( \frac{\left( \frac{\delta}{\delta_{y}} \right)^{2B}}{1 + \left( \frac{\delta}{\delta_{y}} \right)^{2B}} \right)^{A} \right)$$

- 5~10 NREV<sup>14</sup> Maximum storage size to memorize unloaded point. NREV  $\leq$  100. Usually 20 to 40 is sufficient.
- 11~20 PAR1 Value of parameter (See table below)
- 21~30 PAR2 Value of parameter (See table below)

31~40 PAR3 Value of parameter (See table below)

ITP	PAR1	PAR2	PAR3
1	$\gamma_r$	-	-
2	α	r	$ au_y$
3	$\gamma_r$	A	В

#### 3.1.3 Curved skeleton: constitutive model number 3

Shear strain dependent shear modulus ratio and damping characteristics is given at discrete points. Hyperbolic model is used for hysteresis curve.

#### 3.1.4 Piesewise linear model: constitutive model number 4

UWEI,	AK, ALPH	A, BETA, PERM, AN (6F10.0) (First card)
1~10	UWEI	Weight per unit length
11~20	AK	Spring constant
21~30	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain
		energy proportional damping ratio (when negative)
31~40	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
41~50	PERM	Permeability
51~60	AN	Porosity.

#### ITP, G2, G3, T1, T2 (15, 5X, 3F10.0) (Second card)

1~ 5	ITP	Flag number showing the type of constitutive model <sup>15</sup>
		=1: tri-linear elastic model
		=2: Bi-linear model
		=3: Tri-linear model

=4: Bi-linear slip model

- =5: Tri-linear slip model
- =6: Origin orientated model
- =7: Origin to peak orientated model
- =ÇW: Peak orientated model
- =ÇX: Degrading trilinear model by Fukada
- =10: Degrading trilinear model by Nomura
- =11: Degrading trilinear model by Muto
- 11~20 G2 Ratio of second stiffness to initial stiffness.  $G_2 > 0$ .
- 21~30 G3 Ratio of third stiffness to initial stiffness. G3 > 0.
- 31~40 T1 Force at first kink.
- 41~50 T2 Force at second kink.



## **3.2 Dashpot element**

The following three data are to be input in section 2.6 besides the input in this section<sup>19</sup>.

[FRFLD, ALEN, ADIR] (Data to be specified with element property in section 2.6)

- FRFLD<sup>20</sup> Usually 0. If first element node is on the free field, FRFLD = 1.0. If second element node is on the free field, FRFLD = 2.0.
  - ALEN Length of element. When ALEN is set 0.0, the program set distance between nodes to the length. This length is not used for calculating a spring constant, but to calculate weight of element.
  - ADIR Direction to which spring works, i.e., flag number on the direction cosine vector.
    - =0: Longitudinal direction.
    - =1.0: Transverse direction. ADIR = 1.0 for one-dimensional analysis. Not used for three dimensional analysis.
    - =2.0: x-axis direction. ADIR = 2.0 for SH wave analysis.
    - =3.0: y-axis direction
    - =4.0: z-axis direction
    - =5.0: x-axis negative direction
    - =6.0: y-axis negative direction
    - =7.0: z-axis negative direction

#### 3.2.1 Constant property: Constitutive model number 1

#### **VIS** (F10.0)

1~10 VIS Viscous coefficient per unit area. Viscous coefficient multiplied by the area input in section 2.6 is used as viscous coefficient of an element.

#### 3.2.2 Element whose property depend on other element: Constitutive model number 2

In addition to the data in the followings, two kind of data is required at the input in section 2.6. The one is the data specified at the beginning of this section, FRFLD, ALEN, and ADIR. The other is an element number to which property of the dashpot element uses. Here it is noted that element number is an integer but input is a real number, which will be converted to integer in the program.

#### KELM (15)

1~5 KELM Number of elements. Viscous coefficient is computed as weighted average

of these elements.

[(NE(J), WVS(J), WVP(J), J = 1, KELM] (Data to be specified with element property in section 2.6)

- NE(J) Element number
- WVS(J) Weight for shear wave velocity
- WVP(J) Weight for p-wave velocity

$$\mu = \text{VIS} \cdot \text{AREA} \cdot \sum_{J=1}^{KELM} \rho_{NE(J)} \left[ \text{WVS}(J) \cdot V_{s,NE(J)} + \text{WVP}(J) \cdot V_{p,NE(J)} \right]$$

# 3.2.3 Property specified as time history: constitutive model number 3

#### KDAT, KFILE (215)

- 1~5 KDAT Number of data in a file.
- 6~10 KFILE Unit number in which data is written.

Note that the value of KDAT and KFILE is to be unique in one job. Moreover, it is assumed that the data is written with format (8F10.0).

## 3.3 Beam

The following three data are to be input in section 2.6 besides the input in this section<sup>19</sup>.

A, AI, AS	
Α	Cross sectional area
AI	Second moment of inertia
AS	Effective area against shear deformation. $AS = 0$ indicates no shear
	deformation, i.e., AS=∞.

(Note) These three values are usually to be specified as element property. However, there may be a frequent case that there are many element whose material properties are the same but geometrical configuration such as length and above shown are different. In this case it is not convenient to make different element property for each element. Input above is prepared to avoid this inconveniency. Namely, element property is basically input at the input of element property in the followings, but if nonzero value is specified at the input in section 2.6 described above, then the program uses these values regardless of the input in this section.

Here treatment of effective area against shear deformation is done carefully because AS = 0indicates no shear deformation, i.e., infinite area. Therefore we employ new rule that if the want to specify infinite area in the input in section 2.6 and AS in the following input is greater than zero, input negative value (any value) in the input in section 2.6.

3.1 Elast	ic: Constit	utive model number 1 HA, BETA, A, AI, ASI (8F10.0)
1~10	UWEI	Unit weight
11~20	E	Young's modulus
21~30	G	Shear modulus
31~40	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain
		energy proportional damping ratio (when negative)
41~50	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~60	А	Cross sectional area
61~70	AI	Second moment of inertia
71~80	AS	Effective area against shear deformation. $AS = 0$ indicates no shear
		deformation, i.e., AS=∞.
41~50 51~60 61~70 71~80	BETA <sup>12</sup> A AI AS	energy proportional damping ratio (when negative) Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ . Cross sectional area Second moment of inertia Effective area against shear deformation. AS = 0 indicates no she deformation, i.e., AS= $\infty$ .

#### 3.

# 3.4 Solid element for two dimensional analysis

Four point isoparametric element is used as solid element.

## 3.4.1 Elastic: constitutive model number 1

UWEI,	GG, AK, A	LPHA, BETA, AKX, AKY (8F10.0)
1~10	UWEI <sup>11</sup>	Wet unit weight
11~20	GG	Shear modulus
21~30	AK	Bulk modulus
31~40	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain
		energy proportional damping ratio (when negative)
41~50	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~60	AKX	Permeability in x-direction
61~70	AKY	Permeability in y-direction
71~80	AN	Porosity

# 3.4.2 Ishihara-Tsujino model: constitutive model number 2

Tangent modulus is not computed in this constitutive model. Three cards are required for 22 data.

# EPSV, UWEI, ALPHA, BETA AKX, AKY, AKZ, H (8F10.0)

1~10	EPSV	always set 0.
11~20	UWEI <sup>11</sup>	wet unit weight
21~30	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain
		energy proportional damping ratio (when negative)
31~40	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
41~50	AKX	Permeability in x-direction.
51~60	AKY	Permeability in y-direction.
61~70	AKZ	any value
71~80	Н	always set 0.

# P, AN, E, ANYU, SFC, SFT, GMIN, SFP (8F10.0)

1~10 P	always	set 1.	•
--------	--------	--------	---

11~20	AN	Porosity
-------	----	----------

21~30 Cd Young modulus at reference confining pressure,  $\sigma$ 

31~40	ANYU	Poisson ratio at small strain.
41~50	SFC	sine of $E''_{fc}$ , internal friction angle at compression side
51~60	SFT	sine of $E''_{n}$ , internal friction angle at tension side.
61~70	GMIN	Minimum strain increment.
71~80	SFP	sine of $E''_{p}$ , phase transformation angle.

# EP, SS, AMYUF, AMYU0, SC, AN (6F10.0)

1~10	EP	Plastic shear modulus at reference confining pressure, $\sigma$ . It is usually 5 to
		10 times as large as shear modulus at small strains. Plastic deformation
		becomes small as plastic shear modulus increases.
11~20	SS	Reference confining pressure
21~30	AMYUF	Always set 1.258
31~40	AMYU0	Always set 1.258
41~50	SC	Always set 0.0035
51~60	AN	Exponent for plastic shear modulus

# 3.4.3 Tobita-Yoshida model: constitutive model number 3

Element stiffness matrix is unsymmetrical in this model. Three cards is required in this section.

UWEI,	G0, AK0, I	20, GN, AKN, ALPHA, BETA (8F10.0)
1~10	UWEI <sup>11</sup>	wet unit weight
11~20	<b>G</b> 0	Shear modulus constant. $G = GO\left(\frac{\sigma'_m}{PO}\right)^{GN}$
21~30	AK0	Bulk modulus constant. $K = AKO\left(\frac{\sigma'_m}{PO}\right)^{AKN}$
31~40	P0	Reference confining pressure
41~50	GN	Shear modulus exponent
51~60	AKN	Bulk modulus exponent
61~70	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy proportional damping ratio (when negative)
71~80	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
AKX, A	KY, AN, A	A, B, AM, HR0, AR (8F1.0)
1~10	AKX	Permeability in x-direction.

11	~20	AKY	Permeability in y-direction.
----	-----	-----	------------------------------

21~30	AN	Porosity
31~40	Α	Parameter, A
41~50	В	Parameter, B
51~60	AM	Parameter, $M$ , sine of phase transformation angle
61~70	HR0	Parameter, $H_{RO}$
71~80	AR	Parameter, <i>a</i> : $H_R = H_{Ro} e^{a\lambda^p}$
ARM	(F10.0)	

		_	$\left( \begin{array}{c} 0 \end{array} \right)^{m}$
1~10	ARM	Parameter, m,	$H_P = H_R - \left(H_R - H_P^*\right) \left(\frac{P}{\rho_c}\right)$

# 3.4.4 Improved Duncan-Chang model: constitutive model number 4

## (1) Fundamental data

ISTYP	<u>, IDAYTP, </u>	NREV, IFLGR, UWEI, ALPHA, BETA, AKX, AKY, AN
(415, 6)	F10.0)	
1~5	ISTYP	Flag number indicating the mode for shear deformation
		=0: Hyperbolic model
		=1: Hyperbolic model (Duncan-Chang type)
		=2: Ramberg-Osgood model
		=3: Hardin-Drnevich model
		=4: Yoshida
6~10	IDAYTP	Flag number indicating dilatancy model
		=0: Dilatancy is not considered.
		=1: Stress-dilatancy model
11~15	NREV	Maximum number of storage size to memorize unloading point. NREV $\leq$
		100. Usually the value of 20 to 40 is sufficient.
16~20	IFLGR	If IFLGR = 1, stress ratio does not violate Mohr-Coulomb failure condition.
		If IFLGR = 0, stress state may move outside Mohr-Coulomb failure criteria
		depending on the model specified by ISTYP.
21~30	UWEI <sup>11</sup>	wet unit weight.
31~40	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain
		energy proportional damping ratio (when negative)
41~50	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~60	AKX	Permeability in x-direction.
61~70	AKY	Permeability in y-direction.

71~80 AN Porosity.

#### COHE, THETA, GO, AM, EINIT, ALAMDA, AKAPPA, EREF, PREF (8F10.0)

(Note, there is 9 data, hence two cards are required.)

- 1~10 COHE Cohesion
- 11~20 THETA Internal friction angle. THETA > 0
- 21~30 G0 Shear modulus constant
- 31~40 AM Shear modulus exponent
- 41~50 EINIT Flag number indicating the method to treat volume change.

>0: Combination of normal consolidation line and rebound, in which case EINIT denotes initial void ratio.



 $\leq 0$ : Incrementally elastic treatment, or rebound only, in which case the value of EINIT is meaningless. Volumetric strain is expressed as  $dp = Kd\varepsilon_v$ 

```
K = (ALAMDA)p^{(AKAPPA)}
```

51~60 ALAMDA The value of  $\lambda$  in the above figure when EINIT > 0. Bulk modulus constant when EINIT  $\leq 0$ .

61~70 AKAPPA The value of  $\kappa$ , when EINIT > 0. Bulk modulus exponent when EINIT  $\leq$  0.

71~80 EREF Reference void ratio,  $e_o$ , (see above Figure) when EINIT > 0. No meaning when EINIT  $\leq 0$ .

(Second card)

1~10 PREF Reference confining pressure,  $p_o$  when EINIT > 0 (See above figure). No meaning when EINIT  $\leq 0$ .

#### (2) Input related to shear deformation.

No input is required when ISTYP = 0.

i) ISTYP = 1 (Hyperbolic model, Duncan-Chang type)

## FACT (8F10.0)

1~10 FACT Shear strength is set 1/FACT times larger than Mohr-Coulomb failure strength, which can be used to adjust stress-strain relation until peak. FACT≥1.0.

$$\sigma_e = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{\text{FACT} \cdot G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$

ii) ISTYP = 2 (Ramberg-Osgood model)

$$e = \frac{\sigma_e}{G_{max}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\tau_{max}} \right)^{\beta - 1} \right)$$
ALPH, BTA (8F10.0)
1~10 ALPH Coefficient,  $\alpha$ 
11~20 BTA Coefficient,  $\beta$ 

#### (2) Dilatancy model

There is no input in this subsection when IDAYTP = 0.

#### i) IDAYTP = 1

1~10	AMYU	Stress ratio at phase transform. (Ratio of equivalent stress to average stress)
11~20	FFF	Volumetric strain degradation factor at unloading stage. $C \frac{\sigma_e}{p} = \mu - \frac{k \cdot d\varepsilon_{vd}}{ de },  C = 1.0, k = 1.0 \text{ when } \sigma_e / p \ge 0.$ $C = -1.0, k = FFF \text{ when } \sigma_e / p < 0.$

#### 3.4.5 Elastic with confining pressure dependency: Constitutive model number 5

#### UWEI, GG, AK, ALPHA, BETA, AKX, AKY (8F10.0)

$1 \sim 10$ UWEI <sup>11</sup>	wet unit weight
--------------------------------	-----------------

11~20 GG Shear modulus constant

- 21~30 AK Bulk modulus constant
- 31~40 ALPHA<sup>12</sup> Coefficient of mass proportional damping,  $\alpha$ . (when positive), or strain energy proportional damping ratio (when negative)

41~50	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~60	AKX	Permeability in x-direction.
61~70	AKY	Permeability in y-direction.
71~80	AN	Porosity.

# PO, GN, AKN (3F10.0)

1~10	PO	Reference confining pressure
11~20	GN	Shear modulus exponent: $G = GG * (p/PO)^{GN}$
21~30	AKN	Bulk modulus exponent: $K = AK * (p/PO)^{AKN}$

.

# **3.5 Joint element (Slip element)**

Confining pressure dependency of elastic modulus is automatically taken in this model.

Four data, shown below, is required in the input in section 2.6 beside input in this section. They are essentially the same with the input in this section. The difference appears which value is used in the analysis. If data specified in section 2.6 is not zero, then they are used in the analysis regardless to the input in this section.

#### AKV, AKH, AKVP, AKHP (Data to be specified with element property in section 2.6)

AKV	Spring constant per unit length in normal direction at the reference confining
	pressure, i.e., elastic spring constant =AKV $\sigma'_{m}^{AKNP}$ .
AKH	Spring constant per unit length in tangential direction at the reference
	confining pressure, i.e., elastic spring constant=AKH $\sigma'_m^{AKHP}$
AKVP	Spring constant exponent in normal direction.
AKHP	Spring constant exponent in tangential direction.

#### 3.5.1 Bilinear model: constitutive model number 1

# AKV, AHK, AKVP, AKHP, BETA, PHI (5F10.0)

1~10	AKV	Spring constant per unit length in normal direction at the reference confining
		pressure, i.e., elastic spring constant =AKV $\sigma'_{m}^{AKNP}$
11~20	AKH	Spring constant per unit length in tangential direction at the reference
		confining pressure, i.e., elastic spring constant=AKH $\sigma'_{m}^{AKHP}$
21~30	AKVP	Spring constant exponent in normal direction.
31~40	AKHP	Spring constant exponent in tangential direction.
41~50	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~60	PHI	Friction angle in degree. When $PHI = 0$ , no slip occur, i.e., linear model
		in compression side.

3.6 Solid element for 3-dimensional analysis

# 3.7 Solid element for SH-wave analysis

This element is specially designed for SH-wave propagation analysis. Effective stress analysis is not available in this element. Since there is only z-direction movement, analysis which may cause the movement in another direction, such as layer construction analysis, is not available, too.

3.7.1 Elastic model: constitutive model number 1					
UWEI, GG, AK, ALPHA, BETA, AKX, AKY (8F10.0)					
1~10	UWEI <sup>11</sup>	Wet unit weight			
11~20	AK	Shear modulus			
21~30	ALPHA <sup>12</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain			
		energy proportional damping ratio (when negative)			
31~40	BETA <sup>12</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .			
	7.1 Elast UWEI, 0 1~10 11~20 21~30 31~40	7.1 Elastic model: c         UWEI, GG, AK, AI         1~10       UWEI <sup>11</sup> 11~20       AK         21~30       ALPHA <sup>12</sup> 31~40       BETA <sup>12</sup>			

#### I-36

## **3.8 Rotational spring**

The following three data are to be input in section 2.6 besides the input in this section<sup>19</sup>.

#### FRFLD, ADIR, AKO

FRFLD Usually 0. If first element node is on the free field, FRFLD = 1.0. If second element node is on the free field, FRFLD = 2.0.

ADIR Direction to which spring works, i.e., flag number on the direction cosine vector. In the case of 2-dimensional analysis, ADIR is always set 2.0. =0: x-axis direction.

=1: y-axis direction.

=2: z-axis direction.

=3: x-axis negative direction

=4: y-axis negative direction

=5: z-axis negative direction

AK0 If AK0 > 0, spring constant is set AK0 regardless to input in this section

# 3.8.1 Elastic: constitutive model number 1

#### UWEI, AK, ALPHA, BETA (8F10.0)

# 4 Input of analysis

Input related to the variety of analysis that STADAS has is described in this section. Some of them are to conduct nonlinear analysis, and some of them are for changing current situation.

It is recommended to recognize the fundamental feature of STADAS as follows:

- i) STADAS employes incremental analysis.
- ii) pore water pressure is divided into hydrostatic pressure and excess pore water pressure. See section 5.10 related to this.

iii) the flow of the run comes back at the beginning of this section after finishing a job.

Content of analysis	Section
End of job	4.0
Activate element, change boundary condition	4.1
Layer construction and switch-on-gravity analysis	4.2
Excavation analysis or inactivate element	4.3
Static analysis	4.4
Earthquake response analysis	4.5
Dynamic analysis under node excitation	4.6
Change of water table and saturation condition	4.7
Consolidation analysis	4.8
Eigen value problem	4.9
Release of fixed constraint	4.10
Change title	4.11
Print current state	4.12
Export current response value	4.13
Import response value	4.14
Change convergency condition	4.15
Change value of parameter	4.16
	Content of analysis End of job Activate element, change boundary condition Layer construction and switch-on-gravity analysis Excavation analysis or inactivate element Static analysis Earthquake response analysis Dynamic analysis under node excitation Change of water table and saturation condition Consolidation analysis Eigen value problem Release of fixed constrain Change title Print current state Export current response value Import response value Change convergency condition

# 4.0 End of the job

The run of job can be terminated by two methods.

1) In the case there is no more data or when the program arrived at the end of input

2) "END" is specified as analysis identifier.

#### 4.1 Activate element and change boundary condition

By nature, if an element is activated or boundary condition is changed, it affect the overall behavior of the model. For example, weight of a newly activated element will increase stresses and strains of other element. In this option, however, it is assumed that the element appears suddenly without changing pre-existing element. Therefore this option is to be used for the case that state variable is known (may be computed separately). This option is also valid for the problem in which initial stress state does not affect the result.

Suppose that we are analyzing elastic problem. If we activate element by this option and inactivate them, then the stress state of the rest part will change. This is because we assumed that activation does not affect the other part, but in the process of inactivate, we consider the effect of equivalent nodal force of inactivated element. Use other option (CONSTRUCT) to avoid this inconsistency.

#### 4.1.1 Fundamental input

MADD, MBNODE, MBSIDE, NPRT1, NPRT2, MISTRS, NADMAS, FIN			
(715, 52	(, A20)		
1~ 5	MADD	Number of element blocks to activate	
6~10	MBNODE	Number of node whose boundary condition is changed.	
		>0: Modify from the previous condition	
		<0: Modify from the original condition	
11~15	MBSIDE	Number of side where boundary condition against water is changed.	
16~20	NPRT1	=0: Print the state variable of activated element.	
		=1: State variable of activated element is not printed.	
21~25	NPRT2	=0: Print the state after activating the elements.	
		=1: They are not printed.	
26~30	MISTRS	=0: State variable is specified by the user.	
		=1: Stresses and strains are zero.	
31~35	NADMAS	Flag number to add virtual mass. NADMAS is a number of node blocks	
		whose node numbers are in sequence and whose virtual mass is the same	
		to each other.	
41~60	FIN	File name from which element information in section 4.1.2 is read. If FIN	
		is left blank, it indicates that data is read from unit 5 or from card.	

#### **4.1.2 Element information**

I-40

Boundary condition of activated nodes according to the activation of the element is set to be the one input in section 2.5. If the user want to modify it, it must be done in this section through input of MBNODE.

At the beginning of each input in the following, two element numbers JELM and KELM are read, which indicates that elements from element number JELM to element number KELM are activate and have the same characteristics. If the user want to specify only one element, put KELM = 0, or put KELM = JELM.

It is also noted that KELM  $\geq$  JELM. If the user want to specify that the element is dry, put JELM a negative value, in which case absolute of JELM denotes an element number.

When MISTRS = 1 (Initial stresses and strains are zero), only one card is required. If the user specify an element that is already active, the program print warning but job will continue by initializing the state variables.

#### (1) Spring

#### JELM, KELM, SIG, PWP0, PWP, EPS (215, 4F10.0)

1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number
11~20	SIG	Generalized stress (spring force)
21~30	PWP0	Hydrostatic pressure (valid for only 1-dimensional analysis)
31~40	PWP	Excess pore water pressure (valid for only 1-dimensional analysis)
41~50	EPS	Generalizes strain (Relative displacement between node in the direction cosine direction)

#### (2) Dashpot

#### JELM, KELM (215)

1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number

#### (3) Beam

JELM, KELM, AM1, AM2, Q, N (215, 4F10.0)				
AKAPPA1, AKAPPA2, GAMMA, DELTA (4F10.0)				
1~ 5	JELM	First element number		
6~10	KELM	Last element number		
11~20	AM1	Bending moment at first node.		
21~30	AM2	Bending moment at second node.		

31~40	Q	Shear force
41~50	Ν	Axial force

#### Second card

- 11~20 AKAPPA1 Curvature at first node.
- 21~30 AKAPPA2 Curvature at second node
- 31~40 GAMMA Shear strain
- 41~50 DELTA Axial displacement

# (4) Solid element for 2-dimensional analysis

# JELM, KELM, SIGX, SIGY, TAUXY, PWP0, SIGZ, PWP (215, 6F10.0)

	EPSX, EPSY, GAMXY, EPSVD ((4F10.0))				
	1~ 5	JELM	First element number		
	6~10	KELM	Last element number		
	11~20	SIGX	$\sigma'_{x}$		
	21~30	SIGY	$\sigma'_{y}$		
	31~40	TAUXY	$ au_{xy}$		
	41~50	PWP0	Hydrostatic pressure		
	51~60	SIGZ	$\sigma'_{z}$		
	61~70	PWP	Excess pore water pressure		
Second card (Not necessary when MISTRS = 1)					

11~20	EPSX	$\mathcal{E}_{x}$
21~30	EPSY	$\mathcal{E}_{y}$
31~40	GAMXY	$\gamma_{xy}$
41~50	EPSVD	$\mathcal{E}_{vd}$

# (5) Joint element

JELM, KELM, SIGN, SIGS, PWP0, PWP, V, U (215, 6F10.0)				
1~ 5	JELM	First element number		
6~10	KELM	Last element number		
11~20	SIGN	Normal stress		
21~30	SIGS	Shear stress		
31~40	HGSN	Hourglass mode force in normal direction		
41~50	HGSS	Hourglass mode force in tangential direction		
51~60	V	Displacement in normal direction		
61~70	U	Displacement in tangential direction		

#### (6) Solid element for 3-dimensional analysis

#### (7) Solid element for SH-wave analysis

## JELM, KELM, TAUYZ, TAUZX, GAMYZ, GAMZX (215, 4F10.0)

1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number
11~20	TAUYZ	$ au_{_{yz}}$
21~30	TAUZX	$ au_{xz}$
31~40	GAMYZ	$\gamma_{yz}$
41~50	GAMZX	$\gamma_{xz}$

#### (8) Rotational spring

#### JELM, KELM, SIG, EPS (215, 2F10.0)

1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number
11~20	SIG	Moment
21~30	EPS	Rotational angle in radian

#### 4.1.3 Boundary condition of node

Input in this section is necessary only when MBNODE > 0. Totally MBNODE card are input.

[NODE, MBDRY(NDIM)] (1615)] (NDIM = 1, 3, or 6 depending on 1-, 2-, or 3-dimensional

- analysis)
- 1~ 5 NODE Node number

## 6~ MBDRY(I) Flag number indicating the change of fixed condition

- =0: Not modified
- =1: Fixed
- =2: Make free
- <0: Dependent degree of freedom, in which case independent node number is to be specified with minus sign.

For 2-dimensional analysis, MBDRY(1), (2), and (3) correspond to x- and y-direction, and rotation, respectively.

#### 4.1.4 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE > 0. Totally MBSIDE card are input. [ITYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE][(615)]

1~ 5	ITYPE	Flag number indicating a type of the boundary
		=-1: Undrained boundary
		=-2: Drained boundary
		=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero.
		=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero.
		=0: The program select suitable boundary condition. If there is an
		neighboring element, drainage to the element is considered. If there
		is no neighboring element, undrained boundary is set.
		>0: Neighbouring element number. By this option it becomes possible to
		connect any elements. This option is also used to correct the network
		that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote
		neighboring element number and side number.
6~10	IELM	Element number
11~15	ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element
		node and (n+1)-th element node is n. For 2-dimensional analysis, side
		number between 4th element node and first element node is 4, except the
		case of trigonometric element in which side number between 3rd and first
		is 3.
16~20	BVAL	Boundary value
21~25	JELM	Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$ .
26~30	JSIDE	Side number of element JELM.

#### 4.1.5 Virtual mass

Input in this section is necessary only when NADMAS > 0. Totally NADMAS cards are required. It is noted that input in this section is not by mass but by weight. Input virtual mass in added to the previous mass, hence if negative value is input it will be subtracted.

Number of virtual mass input in a node depends on the dimension of the analysis. At any dimension, first data is a weight against directional movement (same with any direction), and the rest are weight against rotation that may be different in the direction because it depend on the shape. There is 0, 1, and 3 rotational component in 1-, 2-, and 3-dimension, respectively.

IS, IE, 7	AMASS(I), ]	I = 1, K (215, 4F10.0) K = 1, 2, and 4 for 1-, 2- and 3-dimension
1~5	IS	First node number
6~10	IE	Last node number. The same weight is added to the node between IS and

IE. If IE < 0, the program set IE = IS.

11~20 AMASS Virtual mass component to be added. For 2-dimensional analysis, two weight is to be prepared: directional movement and rotational movement.

-

# 4.2 Layer construction and switch-on-gravity analysis

Weight of activated elements is applied as external load in the layer construction or switch-ongravity analysis. External load is divided by NSTEP, which is specified as input, and applied NSTEP times in this analysis.

Treatment of water is to be done carefully in the layer construction analysis. It is few case that saturated soil is used as construction material. Usually either soil is thrown in the water (fill land) or water level is increased after the construction of the structure (dam, for example). In this analysis the former analysis is employed because we intend to avoid the stress cycle which may occur in the latter analysis. The latter analysis is also possible in STADAS by constructing the dry element and use option "WATER" that changes water level.

#### 4.2.1 Flag on analytical method

NONS	OL, NSTEP	, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (715)
1~ 5	NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis
		=1: Tangent modulus
		=2: Initial stress
		=3: Modified initial stress
		=4: Modified Newton-Raphson
6~10	NSTEP	Incremental analysis is conducted NSTEP times to apply the load.
11~15	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		=C: Displacement starts from zero.
		=1: Displacement is a continuum value from previous analysis.
16~20	NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
		=0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.
		=1: Displacement is carried into next analysis.
21~25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
		analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program
		print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis.
		If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set
		ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum
		number of iteration.
26~30	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, It is not printed. It is noted that final state

is printed regardless the value of NPRT.

31~35 NDRAIN Flag number indicating the drainage condition.

=0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated.

=1: Undrained condition

# 4.2.2 Fundamental data

MADI	D, MBNOD	E, MBSIDE, NPRT1, NPRT2, MISTRS, NADMAS, NADLD, FIN
(815, A	20)	
1~ 5	MADD	Number of element blocks to activate
6~10	MBNODE	E Number of node whose boundary condition is changed.
		>0: Modify from the previous condition
		<0: Modify from the original condition
		The change of boundary condition specified here become valid for the
		coming analysis. For example, it fixed boundary is changed to free boundary,
an an Arian Arian		force acting the support is released, therefore state of the analyzed region
		changes. However, such kind of effect is not considered here. If the user
		want to do it, use "FREESUP" option.
11~15	MBSIDE	Number of side where boundary condition against water is changed.
16~20	NPRT1	=0: Print the state variable of activated element.
		=1: State variable of activated element is not printed.
21~25	NPRT2	=0: Print the state after activating the elements.
		=1: They are not printed.
26~30	MISTRS <sup>17</sup>	Flag number to give initial stress of activated element.
		=0: The program compute it suitably.
		=1: Initial stresses are set zero. Use it if constitutive models of all activated
		elements are not effective stress independent one.
		=2: Stresses are given by the user through input data
		=3: Stresses and strains are give by the user through input data.
		=4: same as MISTRS = 0, except that the analysis starts from the given
		state, which will result in a little larger stress.
		=5, 6: same as MISTRS = 2 and 3, except that the analysis starts from the
		given state, which will result in a little larger stress.
31~35	NADMAS	Flag number to add virtual mass. NADMAS is a number of node blocks
		whose node numbers are in sequence and whose virtual mass is the same
		to each other.
		I-47

36~40	NADLD	Number of nodal loads to be applied at the same time. Load acting one
		direction of a node is counted one.
41~60	FIN	File name from which element information in section 4.2.3 is read. If FIN

is left blank, it indicate data is read from unit 5 or from card.

#### **4.2.3 Element information**

Boundary condition of activated nodes according to the activation of the element is set to be the one input in section 2.5. If the user want to modify it, it must be done in this section through input of MBNODE.

At the beginning of each input in the following, two element numbers JELM and KELM are read, which indicates that elements from element number JELM to element number KELM are activate and have the same characteristics. If the user want to specify only one element, put KELM = 0, or put KELM = JELM.

It is also noted that KELM  $\geq$  JELM. If the user want to specify that the element is dry, put JELM a negative value, in which case absolute of JELM denotes an element number.

When MISTRS = 0 or 1 (Initial stresses and strains are determined by the program), only one card is required.

#### (1) Spring

JELM	, KELM, FC	DRCE, DISP ((215, 2F10.0)
1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number
Following	data are rec	quired only when MISTRS = $2, 3, 5, and 6$ .
11~20	FORCE	Generalized stress (spring force)
Following	data is requ	aired only when $MISTRS = 3$ and 6.
21~30	DISP	Generalizes strain (Relative displacement between node in the direction
		cosine direction)

#### (2) Dashpot

#### JELM, KELM (215)

1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number

#### (3) Beam

#### JELM, KELM, AM1, AM2, Q, N (215, 4F10.0)

#### AKAPPA1, AKAPPA2, GAMMA, DELTA (4F10.0)

1~ 5 JELM FIrst element nu

6~10 KELM Last element number

Following data are required only when MISTRS = 2, 3, 5, and 6.

- 11~20 AM1 Bending moment at first node.
- 21~30 AM2 Bending moment at second node.
- 31~40 Q Shear force
- 41~50 N Axial force

Following data are required only when MISTRS = 3 and 6.

- 11~20 AKAPPA1 Curvature at first node.
- 21~30 AKAPPA2 Curvature at second node
- 31~40 GAMMA Shear strain
- 41~50 DELTA Axial displacement

#### (4) Solid element for 2-dimensional analysis

# ELM, KELM, SIGX, SIGY, TAUXY, SIGZ (215, 6F10.0)[EPSX, EPSY, GAMXY, EPSVD][(4F10.0)]1~ 5JELMFirst element number6~10KELMLast element number

Following data are required only when MISTRS = 2, 3, 5, and 6.

11~20	SIGX	$\sigma'_x$
21~30	SIGY	$\sigma'_{y}$
31~40	TAUXY	$ au_{xy}$

41~50 SIGZ  $\sigma'_{z}$ 

Following data are required only when MISTRS = 3 and 6.

11~20	EPSX	$\mathcal{E}_{x}$
21~30	EPSY	$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{y}$
31~40	GAMXY	$\gamma_{xy}$
41~50	EPSVD	$\mathcal{E}_{vd}$

#### (5) Joint element

JELM,	KELM, SI	GN, SIGS, HGSN, HGSS, V, U (215, 6F10.0)
1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number

Following data are required only when MISTRS = 2, 3, 5, and 6.

11~20	SIGN	Normal stress
21~30	SIGS	Shear stress
31~40	HGSN	Hourglass mode force in normal direction
41~50	HGSS	Hourglass mode force in tangential direction
Following data are required only when $MISTRS = 3$ and 6.		
51~60	V	Displacement in normal direction

61~70 U Displacement in tangential direction

(6) Solid element for 3-dimensional analysis

(7) Solid element for SH-wave analysis

JULITI, ILLITI,	THULL, THULLA	, OAMIZ, OAM	(210, 4110.0)

1~ 5 JELM First element number

6~10 KELM Last element number

Following data are required only when MISTRS = 2, 3, 5, and 6.

11~20 TAUYZ  $\tau_{yz}$ 

21~30 TAUZX  $\tau_{zx}$ 

Following data are required only when MISTRS = 3 and 6.

31~40 GAMYZ  $\gamma_{yz}$ 41~50 GAMZX  $\gamma_{zx}$ 

#### (8) Rotational spring

JELM, KELM, FORCE, DISP (215, 2F10.0)

1~ 5 JELM First element number

6~10 KELM Last element number

Following data are required only when MISTRS = 2, 3, 5, and 6.

11~20 FORCE Moment

Following data is required only when MISTRS = 3 and 6.

21~30 DISP Rotational angle in radian

#### 4.2.4 Boundary condition of node

Input in this section is necessary only when MBNODE > 0. Totally MBNODE card are input. [NODE, MBDRY(NDIM][(1615)] (NDIM = 1, 3, or 6 depending on 1-, 2-, or 3-dimensional lucie)

		analysis)
1~ 5	NODE	Node number
6~	MBDRY(I)	Flag number indicating the change of fixed condition
		=0: Not modified
		=1: Fixed
		=2: Make free
		<0: Dependent degree of freedom, in which case independent node number is to be specified with minus sign.
		For 2-dimensional analysis, MBDRY(1), (2), and (3) correspond to x- and
		y-direction, and rotation, respectively.
415 Rou	ndary oondi	tion for nore water
4.2.5 DOU	this section	tion for pore water
Input in	this section	is necessary only when MBSIDE > 0. Totally MBSIDE card are input.
Saturati	on condition	1 (dry or wet of an element) cannot be changed by layer construction
analysis.	Saturated con	idition of activated element must agree with the boundary condition.
TYPE	, IELM, ISIL	)E, BVAL, JELM, JSIDE ((615)
1~ 6	ITYPE	Flag number indicating a type of the boundary
		=-1: Undrained boundary
		=-2: Drained boundary
		=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero.
		=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero.
		=0: The program select suitable boundary condition. If there is an
		neighboring element, drainage to the element is considered. If there
		is no neighboring element, undrained boundary is set.
		>0: Neighbouring element number. By this option it becomes possible to
		connect any elements. This option is also used to correct the network
		that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote
		neighboring element number and side number.
6~10	IELM	Element number
11~15	ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element
		node and $(n+1)$ -th element node is n. For 2-dimensional analysis, side
		number between 4th element node and first element node is 4, except the
		case of trigonometric element in which side number between 3rd and first

16~20 BVAL Boundary value

is 3.

21~25	JELM	Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$ .
26~30	JSIDE	Side number of element JELM.

#### 4.2.6 Virtual mass

Input in this section is necessary only when NADMAS > 0. Totally NADMAS cards are required. It is noted that input in this section is not by mass but by weight. Input virtual mass in added to the previous mass, hence if negative value is input it will be subtracted.

Number of virtual mass input in a node depends on the dimension of the analysis. At any dimension, first data is a weight against directional movement (same with any direction), and the rest are weight against rotation that may be different in the direction because it depend on the shape. There is 0, 1, and 3 rotational component in 1-, 2-, and 3-dimension, respectively.

IS, IE, (	AMASS(J),	J = 1, 4 (215, 4F10.0) K = 1, 2, and 4 for 1-, 2- and 3-dimension
1~5	IS	First node number
6~10	IE	Last node number. The same weight is added to the node between IS and
		IE. If $IE < 0$ , the program set $IE = IS$ .
11~50	AMASS	Virtual mass component to be added. For 2-dimensional analysis, two
		weight is to be prepared: directional movement and rotational movement.

#### 4.2.7 Nodal load

Input in this section is require only when NADLD > 0. Totally NADLD cards are required.

#### ND, IDR, ALOAD (215, 2F10.0)

1~5	ND	Node number
6~10	IDR	Flag number indicating the direction to which load is applied.
		For 1-dimensional analysis, always set 1.
		For 2-dimensional analysis, 1, 2, and 3 for x-, and y-direction, and rotation.
		For 3-dimensional analysis, 1 to 3 corresponds to x, y, and z direction,
		and 4 to 6 corresponds moment around x-, y- and z-axis, respectively.
11~20	ALOAD	Applied load

# 4.3 Excavation analysis

Elements are inactivated in the excavation analysis. Equivalent nodal forces of inactivate element are released. They are released by NSTEP step of calculation.

## 4.3.1 Flag on analytical method

NONS	OL, NSTEP	, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (715)
1~5	NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis
		=1: Tangent modulus
		=2: Initial stress
		=3: Modified initial stress
		=4: Modified Newton-Raphson
6~10	NSTEP	Incremental analysis is conducted NSTEP times to apply the load.
11~15	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		=0: Displacement starts from zero.
		=1: Displacement is a continuum value from previous analysis.
16~20	NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
		=0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.
		=1: Displacement is carried into next analysis.
21~25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
		analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program
		print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis.
		If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set
		ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum
		number of iteration.
26~30	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, It is not printed. It is noted that final state
		is printed regardless the value of NPRT.
31~35	NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition.
		=0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated.
		=1: Undrained condition

#### 4.3.2 Fundamental data

# MSUB, MBNODE, MBSIDE, NADMAS, NADLD (515)

- 1~ 5 MSUB Number of element blocks to inactivate
- 6~10 MBNODE Number of node whose boundary condition is changed.

>0: Modify from the previous condition

<0: Modify from the original condition

The change of boundary condition specified here become valid for the coming analysis. For example, it fixed boundary is changed to free boundary, force acting the support is released, therefore state of the analyzed region changes. However, such kind of effect is not considered here. If the user want to do it, use "FREESUP" option.

- 11~15 MBSIDE Number of side where boundary condition against water is changed.
- 16~20 NADMAS Flag number to add virtual mass. NADMAS is a number of node blocks whose node numbers are in sequence and whose virtual mass is the same to each other.
- 21~25 NADLD Number of nodal loads to be applied at the same time. Load acting one direction of a node is counted one.

#### **4.3.3 Element information**

Inactivated elements is specified by their element number. In the following input two element numbers, JELM and KELM, are read. This indicates that elements from element number JELM to element number KELM are inactivated. When KELM is set less than JELM, the program set KELM = JELM.

#### JELM, KELM (215)

1~ 5	JELM	First element number
6~10	KELM	Last element number

#### 4.3.4 Boundary condition of node

[NODE, MBDRY(NDIM)] (1615) (NDIM = 1, 3, or 6 depending on 1-, 2-, or 3-dimensional analysis)

1~5 NODE Node number

6~MBDRY(I) Flag number indicating the change of fixed condition

=0: Not modified

- =1: Fixed
- =2: Make free

<0: Dependent degree of freedom, in which case independent node number is to be specified with minus sign.

For 2-dimensional analysis, MBDRY(1), (2), and (3) correspond to x- and y-direction, and rotation, respectively.

# 4.3.5 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE > 0. Totally MBSIDE card are input. Saturation condition (dry or wet of an element) cannot be changed by excavation analysis. Saturated condition of inactivate element must agree with the boundary condition.

TYPE	, IELM, IS	IDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)
1~6	ITYPE	Flag number indicating a type of the boundary
		=-1: Undrained boundary
		=-2: Drained boundary
		=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero.
		=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero.
		=0: The program select suitable boundary condition. If there is an
		neighboring element, drainage to the element is considered. If there
		is no neighboring element, undrained boundary is set.
		>0: Neighbouring element number. By this option it becomes possible to
		connect any elements. This option is also used to correct the network
		that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote
		neighboring element number and side number.
6~10	IELM	Element number
11~15	ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element
		node and (n+1)-th element node is n. For 2-dimensional analysis, side
		number between 4th element node and first element node is 4, except the
		case of trigonometric element in which side number between 3rd and first
		is 3.
16~20	BVAL	Boundary value
21~25	JELM	Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$ .
26~30	JSIDE	Side number of element JELM.

#### 4.3.6 Virtual mass

Input in this section is necessary only when NADMAS > 0. Totally NADMAS cards are

required. It is noted that input in this section is not by mass but by weight. Input virtual mass in added to the previous mass, hence if negative value is input it will be subtracted.

Number of virtual mass input in a node depends on the dimension of the analysis. At any dimension, first data is a weight against directional movement (same with any direction), and the rest are weight against rotation that may be different in the direction because it depend on the shape. There is 0, 1, and 3 rotational component in 1-, 2-, and 3-dimension, respectively.

IS, IE, (AMASS(J), J = 1, 4)	(215, 4F10.0) K = 1, 2, and 4 for 1-, 2- and 3-dimension
------------------------------	--

1~5	IS	First node number
6~10	IE	Last node number. The same weight is added to the node between IS and
		IE. If $IE < 0$ , the program set $IE = IS$ .
11~50	AMASS	Virtual mass component to be added. For 2-dimensional analysis, two
		weight is to be prepared: directional movement and rotational movement.
		Negative value indicate to subtract weight.

#### 4.3.7 Nodal load

Input in this section is require only when NADLD > 0. Totally NADLD cards are required.

ND, IDR, ALOAD	(215, 2F10.0)
----------------	---------------

1~5	ND	Node number
6~10	IDR	Flag number indicating the direction to which load is applied.
		For 1-dimensional analysis, always set 1.
		For 2-dimensional analysis, 1, 2, and 3 for x-, and y-direction, and rotation.
		For 3-dimensional analysis, 1 to 3 corresponds to x, y, and z direction,
		and 4 to 6 corresponds moment around x-, y- and z-axis, respectively.
11~20	ALOAD	Applied load
# 4.4 Static analysis

Fundamental feature of static analysis in STADAS is as follows:

- 1) Nodal load or nodal displacement (displacement constraint) is applied at several nodes simultaneously. They are proportional to each other.
- 2) Either monotonic load or repeated load is applied. In the repeated loading, loading is controlled either by specifying unload points or by specifying increments. In the monotonic loading or repeated loading in which unload points are specified, step by step procedure is necessary because STADAS assumes nonlinear analysis. The user can control this procedure by specifying load increment or by specifying total number of steps.
- 3) The control that load is applied and unload is controlled by displacement, or displacement is applied and unload is controlled by load is possible. In this control, STADAS does not find exact unloading points; loading direction is reversed when control parameter cross the unloading point. It is also noted that whenever control parameter crosses the specified point, then the direction of loading reversed.

### 4.4.1 Flag on analytical method

IN, NSTEI	, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, NOUTND, NOUTEM, NPRT (1015)
NONLIN	Flag number indicating the method of numerical analysis
	=1: Tangent modulus
	=2: Initial stress
	=3: Modified initial stress
	=4: Modified Newton-Raphson
NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
	=0: Displacement starts from zero.
	=1: Displacement is a continuum value from previous analysis.
NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
	=0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.
	=1: Displacement is carried into next analysis.
ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program
	print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis.
	If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set
	ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum
	IN, NSTEL NONLIN NSTE1 <sup>16</sup> NSTE2 <sup>16</sup> ITERMX

number of iteration.

- 21~25 NDRAIN Flag number indicating the drainage condition.
  - =0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated.
  - =1: Undrained condition
- 26~30 NOUTND Number of nodes at which response value at all steps is output in the file. When NOUTND < 0, response value of all node is output.
- 31~35 NOUTEM Number of elements at which response value at all steps is output in the file. When NOUTEM < 0, response value of all node is output.
- 36~40 NPRT Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result of specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is printed regardless the value of NPRT.

It is noted that NPRT = -9999 has special meaning. It is used only when NCTRL (input in next card) is 3 to 5, and indicates that the result of analysis is printed at the time when unload occurs.

## 4.4.2 Control input

NCTR	L, NLCTRL	, NRCTRL, NLOAD, NCTRLN, NCTRLD, NCYC, ASTOP (715, F10.0)
1~5	NCTRL	Loading method. The correlation of NCTRL and the following data is
		shown in the table below.
		=1: Monotonic loading in which goal is specified.
		=2: Monotonic loading by specified steps loading.
		=3: Constant amplitude loading.
		=4: Constatn amplitude loading and go back to origin (see figure below).
		=5: Repeated loading
		=6: All loading points are input
6~10	NLCTRL	Loading method.
		=1: by nodal load
		=2: by nodal displacement
11~15	NRCTRL	Flag number indicating the control of unloading.
		=0: same value with NLCTRL.
		=1: by nodal load.
		=2: by nodal displacement.
16~20	NLOAD	Number of loading points. A load acting in one direction of a node is
		counted as 1.

21~25	NCTRLN	Node number by which unloading is controlled. If input 0, first degrees of
		freedom (the user cannot control it). When both NLCTRL and NRCTRL
		are 1, and NCTRLN is set -1, sum of all the load at loading points are
		used as control parameter. It is possible to specify NCTRLN = NCTRLD
		0 when NCTRL = 6. It may be convenient, however, to specify them
		because response value is printed.
26~30	NCTRLD	Flag number indicating the direction for unloading control.
		1-dimensional analysis, $NCTRLD = 1$ .
		2-dimensional analysis, $1 = x$ , $2 = y$ , $3 = rotation$
		3-dimensional analysis, $1 \sim 3 = x$ , y, and z; $4 \sim 6 = rotation$ around x, y, and z.
31~35	NCYC	Number of half cycle when $NCTRL = 3$ , 4, and 5, or total steps when
		NCTRL = $2$ and $6$ .
36~45	ASTOP	If absolute value of displacement in the NCTRLD direction of node
		NCTRLN exceeds ASTOP, the program terminates. This flag is to control
		too much displacement, which may occur due to error of input data and
		insufficient coding of constitutive model, etc. If $ASTOP = 0$ , this function
		does not work.

NCTRL	1	2	3	4	5	6
NLCTRL	1~2	1~2	1~2	1~2	1~2	1~2
NRCTRL	0~2	-	0~2	0~2	0~2	-
NLOAD	0	0	0	0	0	0
NCTRLN	0	-	0	0	0	D
NCTRLD	0	-	0	0	0	D
NLOADP	0	0	0	0	0	0
ANLOAD	0	0	0	0	0	-
NCYC		0	0	0	0	0
AMPL	0	0	0	0	0	-

Table showing the parameters required for each control of NCTRL

# 4.4.3 Input and output file name

FOUT,	FIN (2A20	
1~20	FOUT	File name to output nodal response value and/or element response value.
		(See section 1.5)
11~40	FIN	This input is required only when $NCTRL = 6$ , and indicates the file name

from which loading value is input. Blank input for FIN indicates unit 5 or card input.

# 4.4.4 Loading node and direction

[((NLOADP(J, I), J = 1, 2), I = 1, NLOAD] [(1015)] Five loading data per one card.

- 1~ 5 NLOADP(1,I) Node number of I-th loading point.
- 6~10 NLOADP(2,I) Direction

1-dimension; always set 1
2-dimension; 1, 2, and 3 indicate x-, and y-direction and rotation.
3-dimension; 1~3=x, y, and z direction. 4~6=moment around x-, y-, and z- axis.

## 4.4.5 Ratio of proportional

## (ANLOAD(I), I = 1, NLOAD) (8F10.0)

1~10 ANLOAD(I)Ratio of proportional at I-th loading point. ALOAD(I) multiplied by the AMPL input later gives actual load.

## 4.4.6 Response value at node

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output are required are specified. Ten node numbers are input in one card.

### (NNDOUT(J), J=1, NOUTND) (1015)

NNDOUT(J) Node numbers. If NNDOUT(J) = 0, input earthquake is printed.

### 4.4.7 Response value of element.

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output are required are specified. Ten element numbers are input in one card.

### (NELOUT(J), J=1, NOUTEL) ((1015)

NELOUT(J) Element numbers.

# 4.4.8 Step number for print the result of analysis

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. step number for printing state variable of the model is specified by the user. Step numbers at which state variable of that step is printed are specified. Ten step numbers are input in one card.

(NPRTSTP(J), J=1, NPRT) (1015)

NPRTSTP(J) Step numbers

### 4.4.8 Magnitude of loading

Input in this section is different depending on the value of NCTRL.

(1) NCTRL = 1 (Monotonic loading)

AINCRE, AEND (2F10.0)

1~10 AINCRE Increment. Sign of AINCRE has sense.

11~20 AEND Final response value. The analysis stops when response value exceeds AEND.

(2) NCTRL = 2 (Monotonic loading, controlled by step)

The analysis stops after computing NCYC incremental analysis.

#### AINCRE, (F10.0)

1~10 AINCRE Increment. Sign of AINCRE has sense.

(3) NCTRL = 3, 4 (Cyclic loading)

The difference between NCTRL = 3 and 4 are to compute additional analysis after the end of NCYC half cycles of loading (see following figure).



#### AINCRE, AMP (2F10.0)

1~10 AINCRE Increment. Sign of AINCRE has sense; it shows the direction of first loading.

11~20 AMP Amplitude.

(4) NCTRL = 5 (Repeated loading)

In this section, two kind of data are required. The first input related to incremental value, which can be done by one card. After that, NCYC unloading points are input, eight data per one card. In general, specified points are unloading points at which loading direction reversed, but not necessary to be unloading points. The program determines the direction of loading after passing the specified points by looking the current response value and coming specified points.

i) Increments (first one card)

## AINCRE ((F10.0)

1~10 AINCRE Increments. Sign of AINCRE has sense; it indicates loading direction at the beginning of analysis.

ii) Unloading points (Total NCYC data)

RTN(J), J = 1, NCYO (8F10.0)

RTN(J) Unloading points.

(5) NCTRL = 6 (Specify each loading)

The following input is to be repeated NCYC times.

ANLOAD(J), J :	= 1, NLOAD (8F10.0)
ANLOAD(J)	J-th loading value

# 4.5 Earthquake response analysis

# 4.5.1 Control input (1)

NINT	EG, NDMP	M, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, FOUT] [(615, A20)]
1~ 5	NINTEG	Flag number indicating the method of numerical integration
		=1: Newmark's b method.
		=2: Predictor-corrector method using initial stiffness (stress transfer)
		=3: Predictor-corrector method in which initial modulus is computed at
		each incremental analysis.
		=4: Predictor-corrector method in which tangent modulus is computed at
		each incremental analysis.
6~10	NDMPM	Flag number indicating the method to build damping matrix.
		=0: Rayleigh damping (mass and stiffness proportional damping), which
		is computed at the beginning of analysis and kept constant through
		the analysis.
		=1: Raiyeigh damping (mass and stiffness proportional damping), which
		is computed at ever incremental procedure.
		Note. Do not use NDMPM = 1 when constitutive model does not output
		tangent modulus. It is also noted that damping matrix here is computed
		from global mass and stiffness matrix; proportional damping in each
		element is also computed and added to the damping matrix.
		=2: Modal damping. Modal damping matrix is to be computed before
		using this option by option "EIGEN".
11~15	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		=0: Displacement, velocity and acceleration start from zero.
		=1: Thy are a continuum value from previous analysis.
16~20	NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement, velocity and acceleration at the
		end of the analysis
		=0: They are not left in the subsequent analysis.
		=1: They are carried into next analysis.
		=2: Displacement is carried into next analysis, but velocity and acceleration are not left.
21~25	ITERMX	ITERMX has sense when NINTEG $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
		analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program

print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum number of iteration.

- 26~30 NDRAIN Flag number indicating the drainage condition.
   =0: Drainage, hence boundary condition of pore water works.
   =1: Undrained condition
- 31~50 FOUT File name for output time history of response values. If left blank, same with previous file name is used.

# **4.5.2 Control data (2)**

ALPHA	, BETA, N	OUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, COEF1, COEF2			
(2F10.0	(2F10.0, 415, 2F10.0)				
1~10	ALPHA	Coefficient for mass matrix proportional damping (Rayleigh damping).			
11~20	BETA	Coefficient for stiffness proportional damping (Rayleigh damping).			
21~25	NOUTND	Number of nodes whose time history is output. NOUTND $< 0$ indicates			
		time histories of all nodes are output.			
26~30	NOUTEM	Number of elements whose time history is output. NOUTEM < 0 indicates			
		time histories of all nodes are output.			
31~35	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps			
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result $cf$			
		specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is			
		printed regardless the value of NPRT.			
36~40	MXPRT	Temporary peak response value is printed every MXPRT steps when			
		MXPRT > 0. It is not printed if $MXPRT = 0$ . If $MXPRT < 0$ , peak			
		response value is of specified steps (input by the user) is printed. It is			
		noted that peak response value at the end of earthquake is always printed			
		regardless to the value of MXPRT.			
41~50	COEF1	The value of $\beta$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.25			
		(constant acceleration) or 1/6 (linear acceleration)			
51~60	COEF2	The value of $\alpha$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.5			
		(Crank-Nicholson).			

# 4.5.3 Input related to earthquake wave

# NDATA, NSDIV, DT, (IBASND(I), I = 1, 3), EQFMT [(215, F10.0, 315, 5X, A40)

- 1~5 NDATA Number of earthquake data.
- $6\sim 10$  NSDIV Number of earthquake data written in a card ( $\leq 20$ ).
- 11~20 DT Time increment; duration of earthquake =NDATA\*DT
- 21~25 IBASND $(\overline{1})$
- 26~30 IBASND(2) Flag to output displacement and velocity in x-, y-, and z-direction.
- 31~35 IBASND(3)
  - =0: Absolute value for rigid base and Relative response value to outcropping for elastic base.
  - =-1: Absolute value
  - >0: Node number. Response value relative to this node is output.
- 41~80 FRMT FORMAT by which earthquake wave is read.

## 4.5.4 Earthquake name

#### IX, IY, IZ, EQNAM (311, 7X, A40)

1~1	$\mathbf{IX}$	Set 1 when there is earthquake input in x-direction, otherwise set 0.
2~ 2	IY	Set 1 when there is earthquake input in y-direction, otherwise set 0.
3~3	IZ	Set 1 when there is earthquake input in z-direction, otherwise set 0.
11~50	EQNAM	Name of earthquake wave, which is printed with the result.

# 4.5.5 File name of earthquake wave

Input in this subsection is to be done every time when the input of either IX, IY, or IZ = 1.

EQMULT, NSKP, FILNAM ((F10.0, 15, 5X, A20)

1~10 EQMULT Multiplication factor for the earthquake data read in the file. (default 1.0)

11~15 NSKP Data in the file starts (NSKP+1) lines, therefore first NSKP lines are skipped.

21~40 FILNAM File name

## 4.5.6 Node numbers for response output

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output are required are specified. Ten node numbers are input in one card.

# (NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) ((1015)

NNDOUT(J) Node number. If NNDOUT(J) = 0, input earthquake wave is output.

#### 4.5.7 Element numbers for response output

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output are required are specified. Ten element numbers are input in one card.

(NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (1015) NELOUT(J) Element number

#### 4.5.8 Time for temporary response value print

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(PRTTIM(J), J = 1, NPRT) (8F10.0)

PRTTIM(J) Times

#### 4.5.9 Time for temporary peak response value

Input in this subsection is required only when MXPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(AMXPRT(J), J = 1, MXPRT) (8F10.0)

AMXPRT(J) Times

### 4.5.10 Earthquake wave

**XCOMP(I)**, I = 1, NSDIV (EQFMT) Necessary only when IX > 0 (see subsection 4.5.5)

<u>YCOMP(I), I = I, NSDIV (EQFMT)</u> Necessary only when IY > 0 (see subsection 4.5.5)

ZCOMP(1), I = 1, NSDIV (EQFMT) Necessary only when IZ > 0 (see subsection 4.5.5)

XCOMP(I) Acceleration of input earthquake in x-direction.

YCOMP(I) Acceleration of input earthquake in y-direction.

ZCOMP(I) Acceleration of input earthquake in z-direction.

In general, the program assumes that files are different in each direction of acceleration wave. It is, however, possible to use the same file. The program read NSDIV earthquake input in the same time under the format EQFMT in each directions, therefore earthquake data must corresponds to this input procedure.

# 4.6 Dynamic response analysis by node excitation

Input for the dynamic analysis by node excitation is described in this section.

# 4.61 Fundamental data (1)

NINT	EG, NDMP	M, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, FOUT ((615, A20)
1~ 5	NINTEG	Flag number indicating the method of numerical integration
		=1: Newmark's b method.
		=2: Predictor-corrector method using initial stiffness (stress transfer)
		=3: Predictor-corrector method in which initial modulus is computed at
		each incremental analysis.
		=4: Predictor-corrector method in which tangent modulus is computed at
		each incremental analysis.
6~10	NDMPM	Flag number indicating the method to build damping matrix.
		=0: Rayleigh damping (mass and stiffness proportional damping), which
7 1		is computed at the beginning of analysis and kept constant through
		the analysis.
		=1: Raiyeigh damping (mass and stiffness proportional damping), which
		is computed at ever incremental procedure.
		Note. Do not use NDMPM = 1 when constitutive model does not output
		tangent modulus. It is also noted that damping matrix here is computed
		from global mass and stiffness matrix; proportional damping in each
		element is also computed and added to the damping matrix.
		=2: Modal damping. Modal damping matrix is to be computed before using this option by option "EIGEN".
11~15	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		=0: Displacement, velocity and acceleration start from zero.
		=1: Thy are a continuum value from previous analysis.
16~20	NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement, velocity and acceleration at the
		end of the analysis
		=0: They are not left in the subsequent analysis.
		=1: They are carried into next analysis.
		=2: Displacement is carried into next analysis, but velocity and acceleration are not left.
21~25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative

procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum number of iteration.

26~30 NDRAIN Flag number indicating the drainage condition.
=0: Drainage, hence boundary condition of pore water works.
=1: Undrained condition
31~50 FOUT File name for output time history of response values. If left blank, same with previous file name is used.

### 4.6.2 Fundamental data (2)

ALPHA	, BETA, NO	DUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, COEF1, COEF2, NLOAD
(2F10.0	), 415, 2F10.	0, 15)
1~10	ALPHA	Coefficient for mass matrix proportional damping (Rayleigh damping)
11~20	BETA	Coefficient for stiffness proportional damping (Rayleigh damping).
21~25	NOUTND	Number of nodes whose time history is output. NOUTND < 0 indicates
		time histories of all nodes are output.
26~30	NOUTEM	Number of elements whose time history is output. NOUTEM < 0 indicates
		time histories of all nodes are output.
31~35	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result of
		specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is
		printed regardless the value of NPRT.
36~40	MXPRT	Temporary peak response value is printed every MXPRT steps when
		MXPRT > 0. It is not printed if MXPRT = 0. If MXPRT < 0, peak
		response value is of specified steps (input by the user) is printed. It is
		noted that peak response value at the end of earthquake is always printed
		regardless to the value of MXPRT.
41~50	COEF1	The value of $\beta$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.25
		(constant acceleration) or 1/6 (linear acceleration)
51~60	COEF2	The value of $\alpha$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.5
		(Crank-Nicholson).

61~65 NLOAD Total number of load component.

## 4.6.3 Indication of loading method

NDAT	A, DT, (IBA	SND(1), 1 = 1, 3), FRMT (15, F10.0, 315, A40)
1~ 5	NDATA	Number of steps for the analysis
6~15	DT	Time increment, therefore analysis is conducted NSTEP*DT
16~20	IBASND(1	$\mathcal{T}$
21~25	IBASND(2	Flag to output displacement and velocity in x-, y-, and z-direction.
26~30	IBASND(3	
		=0: Absolute value for rigid base and Relative response value to outcropping
		for elastic base.
		=-1: Absolute value
		>0: Node number. Response value relative to this node is output.
31~40	FRMT	File name to output time histories.

## 4.6.5 Loading point

(NODEP(J, I), J =	(1615)
NODEP(1,I)	Node number
NODEP(2,I)	Direction. For 2-dimensional analyses, 1, 2, and 3 indicate x- and y-direction,
	and rotation.

## 4.6.5 File name for lading data

FILNA	M, FRMT	(A20, A40)
1~20	FILNAM	File name
21~60	FRMT	FORMAT

# 4.6.6 Node numbers for response output

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output are required are specified. Ten node numbers are input in one card.

(NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (1015)NNDOUT(J) Node number.

# 4.6.7 Element numbers for response output

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output are required are specified. Ten element numbers are input in one card.

# (NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (1015) NELOUT(J) Element number

# 4.6.8 Time for temporary response value print

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

[(PRTTIM(J), J = 1, NPRT)] (8F10.0)PRTTIM(J) Times

### 4.6.9 Time for temporary peak response value

Input in this subsection is required only when MXPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(AMXPRT(J), J = 1, MXPRT) (8F10.0)

AMXPRT(J) Times

#### 4.5.10 Loading data

XCOMP(I), I = 1, NDATA (FRMT)

# 4.7 Change of water table

Change of saturation condition (dry to wet, or wet to dry) is possible only by this analysis. Boundary condition of pore water must correspond to a new saturation condition.

# 4.7.1 Fundamental data

NONS	OL, NSTEP	, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (715)
1~ 5	NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis
		=1: Tangent modulus
		=2: Initial stress
		=3: Modified initial stress
		=4: Modified Newton-Raphson
6~10	NSTEP	Load caused by the change of water table is divided into NSTEP, and
		applied NSTEP times.
11~15	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		=0: Displacement starts from zero.
		=1: Displacement is a continuum value from previous analysis.
16~20	NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
		=0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.
		=1: Displacement is carried into next analysis.
21~25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
		analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program
		print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis.
		If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set
		ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum
		number of iteration.
26~30	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, It is not printed. It is noted that final state
		is printed regardless the value of NPRT.
31~35	NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition.
		=0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated.
		=1: Undrained condition

## 4.7.2 Fundamental data

#### MADD, MBSIDE, NADLD (315)

1~ 5 MADD Number of element blocks where saturation condition changes.

6~10 MBSIDE Number of side where boundary condition of pore water change.

11~15 NADLD Number of nodal loads to be applied at the same time. Load acting one direction of a node is counted one.

### 4.7.3 Elements

Elements whose saturation condition is changed are specified here. Totally MADD cards are to be specified. It is noted that boundary condition of pore water is to be consistent with a new configuration; the program does not check the inconsistency.

### JELM, KELM, IFLG (315)

1~ 5	JELM	Start element number
6~10	KELM	End element number; saturation condition of elements from JELM to
		KELM is changed.
11~15	IFLG	Change of saturation condition.
		=1: To dry
		=2: To wet

## 4.7.4 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE > 0. Totally MBSIDE card are input.

Saturation condition (dry or wet o<sup>f</sup> an element) cannot be changed by layer construction analysis. Saturated condition of activated element must agree with the boundary condition.

### TYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)

1~6	ITYPE	Flag number indicating a type of the boundary
		=-1: Undrained boundary
		=-2: Drained boundary
		=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero.
		=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero.
		=0: The program select suitable boundary condition. If there is an
		neighboring element, drainage to the element is considered. If there
		is no neighboring element, undrained boundary is set.
		>0: Neighbouring element number. By this option it becomes possible to
-		connect any elements. This option is also used to correct the network

that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote neighboring element number and side number.

6~10	IELM	Element number
11~15	ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element
		node and (n+1)-th element node is n. For 2-dimensional analysis, side
		number between 4th element node and first element node is 4, except the
		case of trigonometric element in which side number between 3rd and first
		is 3.
16~20	BVAL	Boundary value
21~25	JELM	Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$ .
26~30	JSIDE	Side number of element JELM.

# 4.7.5 Nodal load

Input in this section is require only when NADLD > 0. Totally NADLD cards are required.

ND, IDR, ALUAD (215, 2F10.0)	ND, IDR, ALOAD (2	(15, 2F10.0)
------------------------------	-------------------	--------------

1~5	ND	Node number
6~10	IDR	Flag number indicating the direction to which load is applied.
		For 1-dimensional analysis, always set 1.
		For 2-dimensional analysis, 1, 2, and 3 for x-, and y-direction, and rotation.
		For 3-dimensional analysis, 1 to 3 corresponds to x, y, and z direction,
		and 4 to 6 corresponds moment around x-, y- and z-axis, respectively.
11~20	ALOAD	Applied load

.

# 4.8 Consolidation analysis

# 4.8.1 Control input

NINT	EG, NTCSI	, NCSLD, NCSLW, NSTE1, NSTE2, ITERMX, TEND (715, F10.0)
1~ 5	NINTEG	Flag number indicating the method of numerical integration
		=1: Tangent modulus
		=2: Predictor-corrector method using initial stiffness (stress transfer)
		=3: Predictor-corrector method in which initial modulus is computed at
		each incremental analysis.
		=4: Predictor-corrector method in which tangent modulus is computed at
		each incremental analysis.
6~10	NTCSL	Flag number to indicate time increment
		=0: Constant, $\Delta t$
		>0: Pairs of time increment and total steps in which specified time increment
		is used are specified.
		=-1: Time increment is specified by the user
		=-2: Time increment increases gradually, such as $\Delta t = \Delta_{told}$ factor, where
		factor is input later.
11~15	NCSLD	Flag number indicating the load applied at each incremental analysis.
		=0: No external load
		>0: NCSLD components of external load are applied.
16~20	NCSLW	Change of boundary value of pore water in each incremental analysis,
		which can be used on the analysis of liquefaction of sea bed.
		=0: No change is specified.
		>0: Bounday value changes at NCSLW sides.
21~25	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement and velocity for output
		=0: Displacement and velocity start from zero.
	16	=1: Thy are a continuum value from previous analysis.
26~30	NSTE2 <sup>10</sup>	Flag number indicating the displacement and velocity at the end of the
		analysis
	,	=0: They are not left in the subsequent analysis.
		=1: They are carried into next analysis.
• • • -		=2: Displacement is carried into next analysis, but velocity are not left.
31~35	ITERMX	ITERMX has sense when NINTEG $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental

analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum number of iteration.

36~45 TEND If TEND > 0, the program stops analysis at time TEND regardless of the input above.

#### 4.8.2 Output identification

#### NOUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, FOUT (415, A20)

1~ 5	NOUTND	Number of nodes whose time history is output. NOUTND < 0 indicates
		time histories of all nodes are output.
6~10	NOUTEM	Number of elements whose time history is output. NOUTEM < 0 indicates
		time histories of all nodes are output.
11~15	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result of
		specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is
		printed regardless the value of NPRT.
16~20	MXPRT	Temporary peak response value is printed every MXPRT steps when
		MXPRT > 0. It is not printed if $MXPRT = 0$ . If $MXPRT < 0$ , peak
		response value is of specified steps (input by the user) is printed. It is
		noted that peak response value at the end of earthquake is always printed
		regardless to the value of MXPRT.
21~40	FOUT	File name for time history output.

#### **4.8.3** Time increments

Input in this section depends on the value of NTCSL

(1) NTCSL = 0 DELT (F10.0) $1 \sim 10$  DELT Time increments

(2) NTCSL > 0

## NSTP(I), DELT(I), I = 1, NTCSL (15, 5X, F10.0)

 $1 \sim 5$  NSTP(I) Total steps in which DEPT(I) is used for time increment

11~20 DELT(I) Time increment

#### (3) NTCSL = -1

## NSDIV, FIN, CSLFM1 (15, 5X, A20, A40)

1~5 NSDIV Number of data in one FORMAT.

11~30 FIN File name

31~70 CSLFM1 FORMAT

#### (4) NTCSL = -2

|--|

1~10 DELT First time increment

11~20 FACTOR Multiplication factor

### 4.8.4 External load

Input in this section is required only when NCSLD > 0.

#### FILN0, CSLFMT (A20, A40)

1~20 FILN0 File name from which external load is read.

21~60 CSLFMT FORMAT, which should be consistent to read NCSLD nodal loads.

#### NODCSL(I, J), J = 1, 2), I = 1, NCSLD ((1015))

Node number and direction of the external load. For 2-dimensional analysis, input of direction number 1, 2, and 3 denote x- and y-direction and rotation.

### 4.8.4 Boundary condition of pore water

Input in this section is required only when NCSLW > 0.

## FILNI, CSLFMT (A20, A40)

- 1~20 FILN1 File name from which data is read.
- 21~60 CSWFMT FORMAT

#### NODCSL(I, J), J = 1, 2), I = 1, NCSLD (1015)

Element number and side number

#### **4.8.6** Node numbers for response output

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output are required are specified. Ten node numbers are input in one card.

#### (NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) ((1015)

NNDOUT(J) Node number. If NNDOUT(J) = 0, input earthquake wave is output.

#### **4.8.7 Element numbers for response output**

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output are required are specified. Ten element numbers are input in one card.

# (NELOUT(J), J=1, NOUTEL) (1015)

NELOUT(J) Element number

#### 4.8.8 Time for temporary response value print

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

[(PRTTIM(J), J=1, NPRT)] [(8F10.0)] PRTTIM(J) Times

#### 4.8.9 Time for temporary peak response value

Input in this subsection is required only when MXPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(AMXPRT(J), J=1, MXPRT) (8F10.0) AMXPRT(J) Times

#### 4.8.10 Time for analysis

Input in this section is required only when NTCSL > 0.

4.8.11 External load <u>CLOSED</u>[(CSLFMT] Nodal load

4.8.12 Boundary value of pore water <u>CLOSED</u>[(CSLFMT] Baundamuschese

Boundary values

# 4.9 Eigen value problem

In the eigen value analysis, natural period, frequency, eigen vector, etc. are computed. Moreover, modal damping matrix are computed. Eigen values and eigen vectors are computed for all dynamic degrees of freedom. Eigen values are printed for all modes. Eigen vectors are printed up to specified mode. Participation factor, effective stiffness, effective mass, etc. are printed at the same time to print eigen vectors. In this case, eight modes are printed at the same time, therefore it is recommended to specify the number proportional to 8.

In the eigen value problem, it is required that stiffness matrix is to be symmetric. However, it may become unsymmetrical depending on constitutive model. The program makes symmetric matrix by using average value of the symmetrically positioned arguments.

#### **4.9.1** Control input

NSTIF	, NMODE,	NDMP, NDRAIN, NFOUT, FOUT [(515, A20)]
1~5	NSTIF	Types of stiffness matrix.
		=1: Initial modulus corresponding to current confining pressure.
		=2: Tangent modulus
6~10	NMODE	Mode number until which eigen vectors are printed.
11~15	NDMP	Flag number indicating the method to compute modal damping matrix.
		=0: Not computed.
		=1: Computed from modal damping value (specified by the user).
		=2: Strain energy proportional damping matrix.
16~20	NDRAIN	Flag number indicating the drained condition.
		=0: Drained, in which only soil skeleton is interested.
		=1: Undrained, in which coupling with water is considered.
21~25	NFOUT	Mode number until which eigen vectors are output in file FOUT.
26~30	FOUT	File name to output eigen vectors.

#### 4.9.2 Modal damping value

Input in this section is required only when NDMP = 1, i.e., damping matrix based on modal damping is computed.

NCRD [[15] 1~5 NCRD Number of mode blocks which have the same damping value. [M, JM, DAMP (215, F10.0) Totally NCRD cards are input.

1~5	IM	Start mode number.
6~10	JM	End mode number. No that $JM \ge IM$ . If $JM < IM$ , the program set $JM =$
		IM. Modes from IM to JM have modal damping value DAMP.

11~20 DAMP Modal damping value in fracture.

Note! Number of modes of the model is equal to the dynamic degrees of freedom of the model, i.e., number of degrees of freedom of nonzero mass. If the user does not exactly know it, set sufficiently larger value (number of node times number of degrees of freedom in a node, for example). If input of mode number is greater than dynamic degrees of freedom, the program change it into dynamic degrees of freedom. It is not recommended to input mode number smaller than dynamic degrees of freedom based on the consideration that the behavior at higher mode does not affect the overall behavior, because response value may be extraordinary large by resonant with higher mode since there is no damping in higher mode behavior.

# 4.10 Release fixed constraint.

Release the reaction acting on the fixed support.

# 4.10.1 Control input

NONS	OL, NSTEF	, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN, NDFRE (815)
1~ 5	NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis
		=1: Tangent modulus
		=2: Initial stress
		=3: Modified initial stress
		=4: Modified Newton-Raphson
6~10	NSTEP	Incremental analysis is conducted NSTEP times to apply the load.
11~15	NSTE1 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		=0: Displacement starts from zero.
		=1: Displacement is a continuum value from previous analysis.
16~20	NSTE2 <sup>16</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
		=0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.
		=1: Displacement is carried into next analysis.
21~25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
		analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program
		print a message and carries unbalanced force into next incremental analysis.
		If the user want to stop at the time when convergency is not obtained, set
		ITERMX be negative value, in which case absolute value denotes maximum
		number of iteration.
26~30	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps
		when NPRT > 0. If NPRT = 0, It is not printed. It is noted that final state
		is printed regardless the value of NPRT.
31~35	NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition.
		=0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated.
		=1: Undrained condition
36~40	NDFRE	Number of degrees of freedom to release fixed support condition.

# 4.10.2 Free support

Specify node number and direction number where fixed condition is released. Totally NDFRE cards are input.

# [IND, IDIR (215)]

	1~	5	IND	Node	number.
1~ 5 IND Node number.		<b>E</b>	INTEN		
	~	5	IND	Node	numper
	-	÷		11000	

- 6~10 IDIR Direction number
  - 1-dimensional analysis, set 1
    - 2-dimensional analysis, set  $1 \sim 3$ , for x- and y-direction and rotation.
    - 3-dimensional analysis, 1~3 for x-, y-, and z-direction, 4~6 for rotation around x-, y-, and z-axis.

# 4.11 Change title

Title is printed at every time where result of the analysis is printed. Therefore it is natural to use the same title throughout the analysis. There may be a case, however, to change title to distinguish each case of analysis. It is controlled by input in this section.

-

# TITLE (A80)

1~80 TITLE A new title.

# 4.12 Print current state

By this option, current state of the model such as constraint condition etc. is printed. No card input is necessary to complete this job.

.

# 4.13 Export current response value

Current response value is output in the file. This information is used by the option in next section.

# FILEOUT (A20)

1~20 FILEOUT File name.

# **4.14 Import response value**

This option can be used only when the following conditions are satisfied.

1) Input through chapters 2 and 3 except the identification of the analysis.

2) Put this option just before the input of identification of the analysis input.

The program replace initial state of the model into input value, which enable to continue the analysis from the end of previous analysis. It is noted that result of eigen value problem (Modal damping matrix) is lost.

#### FILEOUT (A20)

1~20 FILEOUT Output file name

# 4.15 Convergency condition

Convergency condition is modified through the input in this section.

DERR	(F10.0)
1~10	DERR

New error value. Initial value =  $10^{-3}$ 

# 4.16 Change parameter

Values of parameters used in the analysis is modified by this input.

,

# 5 Comments for preparing input data

# **5.1 Dimension**

Dimension of the analysis has a value of either 1, 2, or 3. A node has only x-directional freedom for 1-dimensional analysis. It has 3 degrees of freedom, both x- and y-directional and rotational freedoms, in two directional analysis, and 6 degrees of freedoms, x-, y-, and z-directional freedom and rotational freedom around x-, y-, and z-axis, in the 3-dimensional analysis.

In addition to these standard analysis, STADAS prepare SH-wave propagation analysis. Although SHwave propagation analysis can be conducted in threedimensional analysis, SH-wave analysis in STADAS saves the amount of the calculation by using a characteristic behavior; the model is defined in the x-y plane, but have only z-directional freedom. Therefore volume change does not occur and deformation of the element can be described by only strains,  $\gamma_{zy}$  and  $\gamma_{zx}$ , and stresses  $\tau_{zy}$ ,  $\tau_{zx}$ .



Figure 5.1.1 Deformation due to SH-wave propagation

Table 5.1.1 shows types of an element available in each dimension.

Dimension	1	2	3	SH-wave
Element type				
Spring	0	0	0	0
Dashpot	0	0	0	0
Beam	0	0	0	
2-D solid		0		
Joint	0	0	0	
3-D solid			0	
SH-wave				0

Table 5.1.1 Available element type in each dimensi	on
--	----

It is also noted that element type which can have degrees of pore water changes depending on the dimension (see section 5.5).

## **5.2 Simultaneous equation**

Sweep out methods are used to solve simultaneous equation in STADAS. As shown in section 5.3, coefficient matrix may be symmetric or unsymmetric. In addition, the subprogram may employ pivoting or not. It is recommended to employ pivoting for liquefaction and consolidation analysis because differences between the arguments of coefficient matrix may be very large in these analyses. The user should recognize these and choose suitable combination of NSOL (method to build coefficient matrix) and NCMAT (method to solve simultaneous equation). Table 5.2.1 shows the combination of these two variables.

NCMAT NSOL	1 (symmetric)	2 (unsymmetric, pivoting)	3 (unsymmetric)
1 (symmetric)	0		
2 (unsymmetric)		0	

Table 5.2.1 Combination of NSOL and NCMAT

# **5.3 Coefficient matrix**

In general, coefficient matrix or stiffness matrix is symmetric, but it may not be symmetric in STADAS in the following cases.

- (1) When the constitutive model used different function for potential function and yield surface, and when tangent modulus method is choose to solve the nonlinear equation. It is noted that even if potential function and yield function are not the same to each other, coefficient matrix is symmetric if the user select initial stress method.
- (2) Analyzed region and free field are connected by spring and/or dashpot.
- (3) Effect of kinematic energy on the head of water is considered in the liquefaction analysis.

The user should choose whether coefficient matrix is symmetric or unsymmetric. It does not cause problem when unsymmetric matrix is chosen for symmetric case, except that it requires more memory and more computing time than for symmetric matrix. However, it cause problem in the other case: symmetric matrix is chosen for unsymmetric matrix.

STADAS build band matrix for coefficient matrix to save memory and computing time except the case of eigen value problem and dynamic response analysis using modal damping matrix. Let band width  $N_B$  and number of unknowns N, required memory size is as follows:

Symmetric matrix  $N \cdot N_B$ 

Unsymmetric matrix  $N \cdot (2N_B - 1)$ 

It indicates that unsymmetric matrix requires about double memory size than that of symmetric matrix. Computing time also increases for unsymmetric matrix. Therefore it has advantage to use symmetric matrix, NCMAT=1.

It may be recommended, however, to choose unsymmetric matrix although coefficient matrix is symmetric. In the effective stress analysis, the difference of the arguments between stiffness term and pore water term may be very large. It depend on the unit system, of course, but the difference of order of more than 10 digit is not rare case for the conventional unit system. Moreover, in the nonlinear analysis stiffness may decrease very much to nearly zero. The accuracy in these cases may not be good.

STADAS employ special technique for the former case, but it mat not be perfect. Pivoting technique (NCMAT = 2) may solve the problem. Pivoting technique cannot be used in the symmetric matrix since rows are exchanged. As described above, however, using an unsymmetric matrix requires more time and more memory. Therefore it is recommended for the user to run both case for some examples to recognize the order of error.

## **5.4 Thickness of element**

In the two dimensional analysis, width of element is assumed to be unit length. However, the user may want to use different thickness to conduct, for example, pseudo 3-dimensional analysis. This flag is efficient in these case.

# 5.5 Total and effective stress analysis

The user should choose effective stress analysis if more than one element are 2-phase material (mixture of soil skeleton and water, both of which have degrees of freedom), and total stress analysis for other case. Of course, it is possible to choose effective stress analysis for 1-phase material, but it requires more input data and possible more memory and computing time. Especially it is noted that boundary condition of pore water pressure in section 2.7 is necessary for only effective stress analysis.

Not all the type of element can be treated as 2-phase material. Only spring element can have degrees of pore water pressure for 1-dimensional analysis. For 2- and 3-dimensional analyses, solid element and joint element can have degrees of pore water.

# 5.6 Hourglass mode deformation

STADAS employs significantly reduced integral method (one-pint Gauss integration) to compute element stiffness matrix to increase the efficiency of computing time and to compute element stiffness matrix accurate for the case that Poisson's ration is nearly 0.5 (it may occur in the undrained condition). It may cause, however, hourglass instability problem because deformation mode shown in Figure 5.6.1 does not dissipate energy in one-point integration. This deformation mode may appear such as Figure 5.6.2.



Figure 5.6.1 Hourglass deformation mode of solid element



Figure 5.6.2 Typical hourglass mode deformation

STADAS employs anti-hourglass mode deformation matrix in addition to the ordinary stiffness matrix to avoid hourglass instability. The computing time increase by employing anti-hourglass mode matrix, but it is still much smaller to compute stiffness matrix by ordinary method. Therefore it is always recommended to set IHGS=1.

# 5.7 Unit number from which model is read

In general, node information and element information input in sections 2.5 and 2.6 occupy large

amount among the whole input data. Therefore it may not be inconvenient or it may cause difficulty to recognize the flow of the analysis to prepare them with other data.

Therefore, in STADAS, the user can choose either to input them with other data or from separate file. If the user want to input with other name, leave the input of file name blank, otherwise input file name.

It is noted that, when other file is chosen, one line is required before the node information. The user can use this line to write memorandum etc.

#### **5.8 Atmospheric pressure**

Input of atmospheric pressure seems not to have sense. It is, however, necessary because of the following two reason.

- i) In some constitutive model, minimum values of stresses and stiffness are set for the stability of the computation. The value itself depends on unit system, therefore it is not possible to prepare fixed value for them. Atmospheric pressure is used for this purpose.
- ii) Empirical equations are frequently used in the analysis of ground. For example, shear modulus of Toyoura sand at small strains,  $G_{max}$ , is expressed as follows:

$$G_{max} = 840 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} (\sigma'_m)^{0.12}$$

This equation is valid in the unit of kgf/cm<sup>2</sup>. If this equation is modified to

$$G_{max} = 840 P_a^{0.5} \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{\sigma'_m}{P_a}\right)^{0.5} = 853.8 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{\sigma'_m}{P_a}\right)^0$$

then the equation does not depend on unit system. Some of the empirical equations used in STADAS are modified by this kind of technique. Therefore use of arbitrary value cannot be allowed if this kind of equation is used; standard value shown in the input is to be used.

# **5.9 Coordinate system**

It is noted that y-axis is taken as vertical axis for 2- and 3-dimensional analysis in STADAS. The positive direction is shown in Figure 5.9.1.


Figure 5.9.1 Positive directions (1-, 2-, and 3-dimensional analysis from the left)

## **5.10 Boundary condition**

Boundary conditions of pore water classified as follows:

- Fundamental boundary where boundary value is specified. It may call drained boundary in this manual.
- Natural boundary where flow of water through the boundary is specified. If there is no flow, it is called undrained boundary in this manual.

Boundary condition is to be specified at the side of an element in STADAS. Boundary value at the center of side is specified for fundamental boundary. On the other hand, amount of water passing through the side per unit time is specified for natural boundary. In this case if water flow in the model, boundary value must be negative.

Side of joint element cannot become fundamental boundary.

In the analysis of STADAS, total pore water pressure (sum of hydrostatic pressure and excess pore water pressure) or excess pore water pressure is used depending on the type of analysis. As shown in Part II of this manual, the difference of governing equation is whether to consider body force (inertia due to gravity of acceleration in STADAS) or not. In other words, if governing equation is solved considering the body force, resultant pressure is total pressure, otherwise excess pore water pressure. In the engineering stand point of view, only the excess pore water pressure is usually important, therefore STADAS usually compute only excess pore water pressure. This, however, does not mean that calculation of hydrostatic pressure is not necessary. Whenever hydrostatic pressure changes, it must be computed. They are the following cases:

1) CNSTRACT: switch-on-gravity or layer construction analysis

2) EXCAVATE: excavation analysis

3) WATTABLE: change of water table and saturation condition

When one of these analyses is chosen, STADAS conduct seepage analysis based on the specified

boundary condition for pore water pressure, and set the solution as hydrostatic pressure. If these analyses are conducted under drained condition, no excess pore water pressure is generated. On the other hand, solution under the undrained condition is total pressure, the difference between the solution and hydrostatic pressure gives excess pore water pressure. It is noted that this is the definition of hydrostatic and excess pore water pressure in STADAS.

Boundary condition of pore water pressure may be different to compute total pressure, hydrostatic pressure, and excess pore water pressure. For example, hydrostatic pressure at point A is  $\gamma_w h$ , therefore this value is to be specified as boundary value in the input. The boundary value, however, is zero if excess pore water pressure is of interested. The user does not worry these change because the program modify boundary condition suitable. However, when boundary condition changes during the analysis (possible in the consolidation analysis), then the user correctly recognize that which value is required (boundary value of excess pore water pressure in this case).



Figure 5.10.1 Example of boundary condition of pore water

# 5.11 Unit weight

In the effective stress analysis, wet unit weight  $\gamma_i$  of the element which can have degrees of freedom (Element type = 4, 6, and 7) is expressed as

 $\gamma'_t = (1 - n)\gamma_s + n\gamma_w$  (5.11.1) where  $\gamma_s$  and  $\gamma_w$  are unit weight of soil particle and water, and *n* denotes porosity. The program

always require wet unit weight regardless of the saturation condition although it is possible to specify dry element at the input in subsection 3.1.5. In each analysis, the program uses suitable value for unit weight judging the saturation condition.

Set porosity n=0 for the impermeable material such as concrete and steel. In this case, it must be taken care to prepare input data such that they do not have degrees of freedom of pore water. Do not set n=0 for the element which may have degrees of freedom of pore water. If the user want to input dry unit weight,  $(1-n)\gamma_s$ , put minus sign at the input of unit weight. It is noted that this input also indicates that elements that uses this material are dry at the beginning of the analysis.

There is no degrees of freedom of pore water pressure in total stress analysis. Therefore input wet unit weight for wet element and dry unit weight for dry element.

# 5.12 Rayleigh damping

Damping matrix [C] is made as the sum of mass matrix proportional term and stiffness matrix proportional term as

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \tag{5.12.1}$$

)

where [M] and [K] denotes mass matrix and stiffness matrix at the beginning of the analysis.

It is known that modal damping is expressed as

$$h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2} \tag{5.12.2}$$

where  $h_i$  and  $\omega_i$  denotes modal damping and circular frequency of i-th mode. From Equation (5.12.2) it is recognized that mass matrix proportional term works more at low frequency mode and stiffness proportional term works more at high frequency mode.

In the above, all the matrices are global ones. Damping matrix can also be computed as the sum of each element damping matrix using the same equation, in which case coefficients input at the element properties are used. There is a discussion that definition in element by element has more physical meaning than computation from global one because damping is a characteristic of material. However, it depends on how to use this damping in the dynamic analysis because of the various reasons:

- 1)In the nonlinear analysis, Rayleigh damping is frequently used not to express hysteretic damping but to make the analysis more stable by cutting high frequency term.
- 2)Usually lower modes affect the result more than higher mode, hence it may be reasonable to control lower mode response by setting suitable damping based on Equation (5.12.2)
- 3) It is very difficult to obtain damping coefficient (physical quantity). Usually damping is expressed as damping ratio in which case Equation (5.12.2) is useful.

Two parameters,  $\alpha$  and  $\beta$ , are required as input in STADAS to use Rayleigh damping. If the value of  $\alpha$  is negative, proportional damping is not computed since it indicate strain energy proportional damping, therefore value of  $\beta$  is meaningless. In the actual calculation, STADAS always moves to the routine to compute Rayleigh damping, and when the program finds that the value of  $\alpha$  is negative, then comes out from the routine. Therefore if one does not use Rayleigh

damping, set the value of  $\alpha$  negative; the computing time becomes shorter than to put  $\alpha = \beta = 0$ .

# 5.13 Curves skeleton curves

STADAS prepare two model, hyperbolic model and Ramberg-Osgood model. The skeleton curve of these models are expressed as follows:

$$P = \frac{KP}{1 + \frac{\delta}{\delta_y}}$$
Hyperbolic model (5.13.1)  

$$\delta = \frac{P}{K} \left( 1 + \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^{r-1} \right)$$
Ramberg-Osgood model<sup>1</sup> (5.13.2)

In these model, hysteresis curve is made by applying Masing's rule shown in next section.

# 5.14 Masing's rule

Masing's rule is a rule to make hysteretic curve from the skeleton curve, which is composed of the following two rules in STADAS.

i) When skeleton curve is expressed as

$$\tau = f(\gamma) \tag{5.14.1}$$

Then hysteresis curve unloaded from point  $(\gamma_R, \tau_R)$  is expressed by

$$\frac{\tau - \tau_R}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_R}{2}\right) \tag{5.14.2}$$

ii) If hysteretic curve passed previous unloaded point, then previous skeleton or hysteresis curve is used.

The unloaded points should be memorize to satisfy the second rule. Because of the limitation of the computer, however, it is impossible to prepare infinite area for memorizing them. The value of NREV is used to limit the size.

Usually the value of 20 to 30 is sufficient for NREV, it is because we can forget unloaded points if strains larger than the unloaded strain appears. Therefore memorized unloading point increases only when unloading occurs at the strain smaller than previous unloaded strain. The only exception is free vibration of damped system, in which unloaded strain gradually decreases. However, the second rule does not work in this case. Therefore the coding of STADAS is

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Jenning, P.C., Periodic Response of a General Yeilding Structure, Proc. ASCE, Vol.80, No.EM2, 1964, pp.133-166

conducted such that if required storage area exceed NREV, the second rule is not applied. However, since many of unloaded point at larger unloading strain is still saved, hence the program will work well even if strains increases again. Of course a pulse wave may appear at the inconsistency part, which usually does not significant. Therefore the user need not be so sensitive in determining the value of NREV.

# 5.15 Piesewise linear stress-strain models.

STADAS prepare 11 piesewise linear type stress-strain models. The skeleton curve of these models are bi-linear or trilinear. Required inputs are initial stiffness (or simply spring constant)  $G_{max}$ , stiffness ratio of second and third stiffness to the initial stiffness,  $G_2$  and  $G_3$ , and load at second and third kinks,  $T_1$  and  $T_2$ . (see Figure 5.15.1)

These values must satisfy the conditions that  $0 < G_2 < 1$ ,  $0 < G_3 < G_2$ , and  $T_2 > T_1 > 0$ . For the bilinear model the values of  $G_3$  and  $T_2$  do not used.



Figure 5.15.1 Schematic figure showing the skeleton curve and required parameters.

# 5.16 Output of displacement

Among the fundamental input data in each analysis there are NSTE1 and NSTE2, which is explained in this section. In the analysis of STADAS, each analysis is conducted step by step. State variables such as stresses and strains should be computed sequetially following the procedure of the analysis, but the output of displacement, velocity and acceleration have more flexibility because they are relative ones.

Let's suppose, for example, the sequence of four analyses, switch-on-gravity analysis to obtain initial state, construction analysis to build structures, earthquake response analysis, and consolidation analysis to dissipate excess pore water pressure generated during the earthquake. Does the user actually want the displacement at the end of the consolidation analysis as the sum of these four analyses? May be he is interested at the displacement caused by consolidation or caused by earthquake response analysis and consolidation analysis. If the user is interested in the displacement by consolidation analysis, set NSTE1 = 0 at the input of consolidation analysis, then the program output displacement caused by only consolidation analysis. Next, does the user want to carry displacement into next analysis? If so, then set NSTE2 = 1, otherwise set NSTE2 = 0.

As shown in this example, the program has two kinds of storage area for displacement, velocity and acceleration. Let's call them permanent and temporary ones. Temporary ones are the response value at only the analysis that are going on and permanent ones are the sum of all response value of the analysis when NSTE2 = 1 is input. If NSTE1 = 0, the program output only temporary response value, but if NSTE1 = 1, the program output sum of permanent and temporary response value. If NSTE2 = 1, the program add temporary response value to permanent response value.

# 5.17 Initial stress at switch-on-gravity analysis

Theoretically, initial stresses of a newly constructed elements are zero because weight of the element is applied as load in the switch-on-gravity analysis. It may cause problems, however, when effective stress dependent material properties are used. In these models, stiffness at zero stress is zero, therefore displacement may become infinite. There may be several techniques to escape from this problem. The one method may be to set minimum rigidity in each constitutive models. Considering that, however, STADAS can analyze liquefaction phenomena, in which case the determination of minimum value may be a difficult problem. Therefore, as a standard method, STADAS assumes small stress values (1/20 of the weight for normal stress) for newly constructed element (MISTRS = 0). In this case, if we apply the whole weight as a load in the analysis, resulting stresses will be larger than actual one. To avoid it, STADAS applies whole weight minus equivalent nodal force of existing stress as load, therefore obtained stress is correct. However, by this operation resulting displacement becomes a little smaller than the actual response.

If effective stress dependent constitutive model is not used, set MISTRS=1. If the user want to specify small stress value instead of that computed by the program, set MISTRS = 2 or 3 depending on the situation.

If the user does not like displacement which is a little smaller than exact when MISTRS = 0, he can use MISTRS = 4. The whole weight of the constructed element is applied as load, therefore obtained initial stress is a little larger than the actual one.

# **5.18 Saturation condition**

In addition to the freedom of node movement, pore water pressure can also have freedom. As described in the theoretical part, Part II, pore water pressure is assumed to be constant in an element, hence degrees of freedom of pore water is specified by element.

The status of an element is whether the element is dry or completely saturated: no intermediate state. Moreover, type of element which can have freedom of pore water pressure is limited, which are shown in the table below.

Type No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Type of element	Spring	Dashpot	Beam	2D solid	Joint	3D solid	SH	Rotation
Status	x	х	0	0	0	0	x	x

Element type which can have freedom of pore water pressure

It is noted that STADAS automatically set the status of the element wet unless the user specify. There are a few method by which status of the element is set dry.

1) Use a negative element property number at the input in section 2.6 (element data), in which case absolute value denotes actual element property number. It is noted that wet unit weight is to be input in this case, too.

2) Specify negative value for unit weight input in chapter 3 (element property). The element never move to wet condition in this case. Absolute value of the input denotes dry unit weight in this case (see section 5.11).

3) Change saturation condition by choosing the analysis "WATER" in chapter 4. It is noted that at the beginning, the element has freedom of pore water pressure in this case.

# 5.19 Element data

Input of element data is described in this manual in three parts, which represents different

nature of element.

The most fundamental data is described in section 2.6 were element number, element property number, and element nodes are input. This data is necessary for all elements.

In addition to this fundamental data, two kinds of data may be required depending on element type and constitutive model. Basically, these data is input in section 3 with other material properties. However, it may be convenient to input them with the fundamental data in section 2.6 for some parameters. It is noted that the input of these parameters are described not in section 2.6 but in chapter 3, i.e., at the beginning of each section (common to element type) and/or at the beginning of each subsection (data related to constitutive model).

The program reads these three different type of data simultaneously at the input of section 2.6. Therefore data sequence of input data in section 2.6 are as follows:

A, B, C

where A denotes fundamental data that is described in section 2.6 (element number, element property number an element nodes). B denotes parameters that depend on element type and are described at the beginning of each section in chapter 3. C denotes parameters that depend on constitutive model and are described at the beginning of each subsection in chapter 3. A is always required, but B and C may not be necessary depending on element.

Number of characters in a line is limited to 80, therefore necessary data may not be written in a line. For example, in two dimensional analysis, input of A requires 30 character. Therefore if total number of input of B and C exceed 5, then data cannot be written in a line because each data uses a space of 10 character. In the same manner, 6 and 3 data can be written in a first card for 1-and 3-dimensional analysis, respectively. The rest of data is t be written in the second and subsequent card where input FORMAT is (8F10.0).

## **5.20** Connection between free field

Figure 5.20.1 schematically shows a model in which analyzed region is connected to the free field by dashpot. Similar modeling may be conducted in the seismic deformation method or Penzien model, in which case spring is used to connect to free field instead of dashpot. In the ordinary program this kind of problem is treated as multiple excitation problem, hence may not be possible or special treatment is required. STADAS, however, solve this model simultaneously. In this case, the behavior of the free field affect the behavior of analyzed region, but that of analyzed region should not affect the behavior of free field. This can be done approximately by using fairly large mass in the free field in the ordinary program. However, in STADAS, the input of the variable FRFLD enable to solve this problem exactly (see Part II, section 1.6.3). If first

element node lies on the free field, put FRFLD = 1.0. If second element node lies on the free field, put FRFLD = 2. Of course, if FRFLD = 0, both element nodes are located within the analyzed region.



Figure 5.20.1 Example of the modeling with free field.

# **5.21 Stiffness for the initial stress method**

In the ordinary analysis using stress transfer method or initial stress method, coefficient matrix is computed at the beginning of the analysis and it is used in whole the process of the analysis. In the case to use confining pressure dependent material, it may cause unconvergency problem. Suppose that you are analyzing 1-directional compression test or consolidation test, effective confining pressure increases as load increases. Therefore, tangent modulus may become larger than initial stiffness because it is computed at the beginning of the analysis where confining pressure is small. Convergency may become difficult to obtain in this case. Similar phenomena may occur when there is large dilatancy component. Convergency will obtain in these cases if larger stiffness may be used in the analysis. It can be done by computing coefficient matrix at every incremental calculation and use a little larger value in the analysis.

# **5.22** Nonlinear analysis

STADAS prepares four methods to solve nonlinear equation. The user must choose suitable method depending on the situation or problem that are going to be solved. It is noted that all the

methods may not be used for a particular constitutive models.

#### (1) Tangent modulus method

Tangent modulus is computed at each incremental calculation, and each incremental calculation is conducted once. This is the fastest method. Since unbalanced load generated in an incremental calculation is carried out into next calculation, unbalanced force do not increase too much.

When considering the multi-degrees of freedom problem, it is impossible to compute actual tangent modulus. Even in one degrees of freedom problem, tangent modulus is different for loading and unloading paths, and effective confining pressure may change, therefore, so called tangent modulus value is usually approximate value. Although tangent modulus may not be a actual one, total error may not become too much because unbalanced force is carried into next step, but calculation in each step may have relatively large error.

In many constitutive models, tangent modulus is computed in the following method.

1) Suppose that shear stress is expressed as a function of shear strain and pore water pressure,

$$\tau = \tau(\gamma, p)$$

then, stress increments are computed as  $\partial \tau \quad \partial \tau$ 

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \tau}{\partial p} dp$$

Here, calculation at second term requires stress increment, which is knot known.

2) If we look at previous step, we already know a tangent modulus at previous analysis. It is used instead of tangent modulus at current state.

It is noted that this option may not be used depending on constitutive model; some constitutive model does not output tangent modulus.

## (2)Stress transfer method

Coefficient matrix is compute only once at each analysis, and iterative procedure is employed to obtain the solution. This method can be used for any constitutive models. However, if phenomena described in section 5.21 occurs, then iterative procedure does not converge. The other method is to be used in these case.



# (3) Modified initial stiffness method

If convergency is difficult to obtain because of the above mentioned reason or the reason described in section 5.21, this method may be a solution. Initial stiffness (or alternate value) is computed at the beginning of each incremental calculation.

# (4) Modified Newton-Raphson method

This method is an iterative method based on the tangent modulus. Since computing the tangent modulus at every incremental procedure, it is computed once only at the beginning of each incremental calculation. Since tangent modulus is computed assuming that the loading direction holds, convergency may not be good when unloading occurs because at that time we should use initial stiffness, not tangent modulus.

# **6** Error Massage

STADAS will stop the run when it finds error of input data or the continuation of the run becomes impossible, printing the error massages in the following form:

where \$\$\$ denote error code number, and ### denotes explanation of the error. The explanation of the error is simple, which is explained here in more detail.

It is noted that SATDAS does not prepare detailed error check routine. Moreover, there are many errors which will not affect the run, in which case the program cannot find them.

- (1) Dynamic allocation size is short. Contact the programmer, and enlarge the size of array ZZ and the value of MXAREA in main routine.
- (2) NBC0 must be set 0 for total stress analysis since there is no freedom for porewater pressure.
- (3) All the input file name should be the same to each other for the dashpot element whose constitutive model number is 3 (time dependent material), but different number is input.
- (4) Either element type number or constitutive model number is not correct. Element type number should be between 1 to 8, and limitation of constitutive model number depends on element type.
- (5) Sequence of node number is not correct. Order should be from 1 to NDPT.
- (6) Node number is greater than number of element.
- (7) Sequence of element number is not correct. Order should be from 1 to NELM.
- (8) Specified element number is larger than number of element.
- (9) Element property number of the specified element number exceeds limit value, or specified element number does not allowed.
- (10) Element node number is greater than maximum node number.
- (11) Total number of element nodes used to identify the element is larger or smaller than that to identify a element.
- (12) Number of sides of boundary condition where nonzero boundary value is specified exceeds allowable limit, NBC0. Input larger value for NBC0 in section 2.3.
- (13) Flag number on boundary type of boundary condition of porewater. They should be between

-1 to -4.

- (14) Element number is incorrect when specifying the boundary condition of water. It must be between 1 to NELM.
- (15) Side number is incorrect when specifying the boundary condition of porewater.
- (16) Trial to specify the boundary condition of water in an element which does not have freedom of porewater pressure.
- (17) Area is negative or zero for two dimensional solid element. It usually occurs when the sequence of element nodes is incorrect. It is to be ordered in an counter-clockwise direction.
- (18) Degrees of freedom specified as independent degrees of freedom depends on other freedom.
- (19) Dependency of degrees of freedom is the same node.
- (20) Either element type number or constitutive model number is incorrect.
- (21) Short of dynamic allocation size to complete the subsequence analysis. See (1),
- (22) Specified degrees of freedom cannot be free. For the fixed condition node which may become free must be set free at the input of node.
- (23) Activated element number is incorrect.
- (24) Node number is incorrect, which occurs when changing the boundary condition of node.
- (25) Specified dependent degrees of freedom number is incorrect.
- (26) A trial to change boundary condition of porewater is specified, but specified element is not active.
- (27) A trial to change boundary condition of porewater is specified, but specified element does not have freedom of porewater.
- (28) Specified side number at changing the boundary condition or porewater is larger than allowable number or actual number of side.
- (29) Switch-on-gravity analysis is not allowed for SH-wave analysis.
- (30) In the static analyses, constraint displacement is given at dependent degrees of freedom.
- (31) Since coordinates at two elements nodes are the same for dashpot, beam, and spring element, direction cosine or length cannot be computed. Specify it through input data.
- (32) Flag number for direction cosine is to be between 0 to 7.
- (33) Input element number is incorrect. Usually, this error appears when element number is negative or greater than total number of elements.
- (34) Input node number is incorrect. Usually, this error appears when node number is negative or greater than total number of nodes.
- (35) Flag number for control data is incorrect. Please consult the manual.
- (36) The boundary value of porewater are going to be changed, but the boundary value is fixed to be 0. Change boundary type number to -3 or -4.

.

# Part II

Theory

-و

# 1 Governing equations for 2-phase material

Application of Biot's 2-phase material equation into Finite Element method is described in this chapter. Biot's formulation<sup>1)2)3/4)</sup> have been extended into various form by many researchers<sup>5)-11)</sup>. These are not explained here one-by-one, but contents here include almost all of them in the field of small deformation theory. After that, fundamental equations used in STADAS are introduced.

# **1.1 Fundamental equations and notations**

# 1.1.1 Strain and stress

Total stress and strain are represented by vector form as

$$\{\sigma\} = \left\{\sigma_{x} \quad \sigma_{y} \quad \sigma_{\tau_{xy}} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\right\}^{T} \quad \text{total stress vector, and}$$
(1.1)  
$$\{\varepsilon\} = \left\{\varepsilon_{x} \quad \varepsilon_{y} \quad \varepsilon_{\tau_{xy}} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\right\}^{T} \quad \text{strain vector.}$$
(1.2)

Next, effective stress or stress acting on soil skeleton is represented as

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{m\}p \tag{1.3}$$

where

$$\{\sigma'\} = \{\sigma'_{x} \ \sigma'_{y} \ \sigma'_{z} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^{\mathrm{T}} \quad \text{effective stress vector, and}$$
(1.4)  
$$\{m\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^{\mathrm{T}}.$$
(1.5)

Vector  $\{m\}$  corresponds to Kronecker's  $\delta$  in the tenser form, and p denotes pore water pressure.

Using the vector  $\{m\}$ , confining pressure  $\sigma_m$ , effective confining pressure  $\sigma'_m$ , and volumetric strain  $\varepsilon_v$  are expressed as follows:



Figure 1.1 Positive direction of stress and strain

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\sigma\} = \frac{1}{3} \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{m\}$$

$$\sigma'_{m} = \frac{1}{3} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\sigma'\} = \frac{1}{3} \{\sigma'\}^{\mathrm{T}} \{m\}$$

$$\varepsilon_{v} = \{m\}^{\mathrm{T}} \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} \{m\}$$
(1.6)

Figure 1.1 shows positive direction of stress and strain. Following the conventional soil mechanics rule, compression is taken positive, and strain indicates engineering strain, i.e., shear component is twice larger than that of tenser strain.

#### **1.1.2 Constitutive relation**

In the two phase problem, we should treat three different materials such as soil particle, soil skeleton, and pore water. Constitutive relations of them are expressed as follows:

#### 1) Soil particle

Deformation of soil particle is sometimes considered, but usually neglected, because stiffness of soil particle is fairly large compared with that of soil skeleton. Even when it is considered, only the volume change is taken into account and shear deformation is neglected. In the following, we assume that stiffness of soil particle is infinite, hence it does not deform. Therefore, deformation of soil depends on soil skeleton.

#### 2) Soil skeleton

In the nonlinear analysis, it is not sometimes impossible to express the behavior using total strain, therefore incremental form is used hereafter. Constitutive relation of soil skeleton is expressed in the incremental form as

 $\{d\sigma'\} = [D]\{d\varepsilon\} \tag{1.7}$ 

where [D] denotes tangent modulus matrix. Constitutive models in which volumetric strain due to dilatancy is computed separately, constitutive relation is expressed as follows instead of Equation 1.7.

(1.8)

$$\{d\sigma'\} = [D](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_d\})$$

However, it is usually possible to modify Equation 1.8 into the form of Equation  $1.7^{1}$ 

#### 3) pore water

<sup>1</sup> Volumetric strain component is computed from the volumetric strain due to dilatancy as  $\{d\varepsilon_d\} = \{\alpha \ \beta \ \gamma \ 0 \ 0 \ 0\}^T d\varepsilon_{vd}$ , where  $\alpha + \beta + \gamma = 1$ . Here,  $d\varepsilon_{vd}$  is expressed as a function of strain (increment), therefore second term can be eliminated. It is noted even if [D] was symmetric, resultant coefficient matrix is unsymmetric. pore water is treated as a material which does not resist shear deformation. Moreover, time dependent characteristics such as viscosity does not considered. Therefore, only the relation between volumetric strain of water  $e_{wv}$  and pore pressure p has sense. They are expressed as

$$p = K_{w} \varepsilon_{wv} \tag{1.9}$$

where  $K_w$  denotes bulk modulus of water.

## **1.1.3 Strain-displacement relation**

Strain-displacement relationships is expressed as follows in the matrix form under small strain,

 $\{\varepsilon\} = -[L]\{u\}$ (1.10) where [L] denotes differential operator,

	$\frac{\partial}{\partial x}$	0	0		
	0	$\frac{\partial}{\partial v}$	0		
	0	0	0		
[ <i>L</i> ] =	$\frac{\partial}{\partial x}$	$\frac{\partial}{\partial x}$	02		(1.11)
	<i>0y</i>	$\frac{\partial x}{\partial x}$	0		
	$\frac{\partial}{\partial z}$	<i>dz</i> Ο	$\frac{\partial y}{\partial x}$		
${u} =$	$\{u_x\}$	u <sub>y</sub>	$u_{z}$	displacement vector	(1.12)
$u_{x}, u_{y},$	<i>U</i> ,			displacement in x-, y-, and z-direction	

Here, the minus sign in Equation (1.10) comes from the definition that contractive strain is taken positive.

## 1.1.4 Darcy's law and displacement of water

General form of the Darcy's law in the 3-dimensional space is expressed as

$$\{\dot{w}\} = -k\{\nabla\}h\tag{1.13}$$

where  $\{\nabla\}$  is a differential operator,

$$\{\nabla\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right\}^{T}, \text{ and}$$
(1.14)

 $\{\dot{w}\}$ : (approach velocity or superficial velocity,

k: coefficient of permeability, and

h: total head.

In Equation (1.13), k is assumed to be isotropic, i.e., permeability is the same in any directions. It is, however, usual that permeability is different in direction reflecting the sedimentation condition, for example, in which case we treat permeability to be tenser quantity, such that

 $\{\dot{w}\} = -[k]\{\nabla\}h\tag{1.15}$ 

where

 $[k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$ (1.16)

and  $k_x$ ,  $k_y$ , and  $k_z$  are permeability in x-, y-, and z-direction, respectively.

# **1.2 Equilibrium equation**

In the analysis of 2-phase material, soil particles, soil skeleton, and pore water are treated separately because they behaves in a different manner. The deformation of soil particle, however, is assumed to be negligible, we will build two types of equilibrium equations, i.e., whole equilibrium and equilibrium of water.

## 1.2.1 Equilibrium equation of 2-phase material

Soil and water are treated as one body, therefore equilibrium equation yields,

 $[L]^{T} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{\ddot{w}\} = \{0\}$  (1.17) where  $\{b\}$  is acceleration which causes body force (but sign is opposite because we consider inertia component). In other words, body force is obtained by multiplying mass density. It seems, however, that this difference will not cause confusion, therefore  $\{b\}$  may call body force in the following. The third term of left hand side appears because soil particle and pore water moves in the same manner, and the fourth term corresponds to the difference of acceleration of soil particle and pore water.

## 1.2.2 Equilibrium equation and Darcy's law

Referring to Figure 1.2, which schematically shows forces acting in x-direction, equilibrium of water yields,

 $\{\nabla\}p + \{R\} + \rho_f\{\dot{U}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$ (1.18) where *R* is a restraint force when pore water flows through the soil skeleton, and is expressed as  $\{R\} = \rho_f g[k]^{-1} \{\dot{w}\}, \text{ and }$ 

U denotes absolute displacement of water, which is related to the displacement of soil particle and approach velocity as

(1.19)

 $\{U\} = \{u\} + \frac{\{w\}}{n}$ 

where *n* denotes porosity.



Figure 1.2 Force in x-direction acting the infinitesimally small element

Substituting these equations into Equation (1.18), we obtain

$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n}\{\ddot{w}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$$
(1.20)

Equation (1.20) can be rewritten in the following form, focusing on the relation that  $\{\nabla\}\{x\}^{T}\{b\}=\{b\}$ , in which  $\{x\}$  denotes a position vector of an element.

$$\{\dot{w}\} = -\frac{[k]}{\rho_f g} \{\nabla\} \left( p + \rho_f \{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n} \{\ddot{w}\} - \rho_f \{b\} \right)$$
(1.21)

This equation is identical to Equation (1.13), or Darcy's law, because total head h is expressed as

$$h = \frac{p}{\rho_f g} - \frac{\{x\}^1 \{b\}}{g} + \frac{\{x\}^1}{g} \left(\{\ddot{u}\} + \frac{1}{n}\{\ddot{w}\}\right)$$
(1.22)

where  $\{x\}$  denotes position vector. The first term of Equation (1.22) is pressure head, the second term is position head, and the third term is kinematic head which usually is not considered in the analysis of soil mechanics.

# **1.3** Continuity condition (mass conservation equation)

Volume change may occur when water flows into or go out of the material, which causes volume change. Factors causing the volume change of soil skeleton are (1) residual water as a result of water flow, and (2) volume change of water. Again volume change of soil particle itself is neglected.

The difference of pore water that flowed in and goes out of the material is  $\{\nabla\}^T \{\dot{w}\}$ , in which positive sign indicates residual water decreases. On the other hand, decrease of volume of pore water in a unit time duration is computed from Equation (1.9) as

$$\dot{\varepsilon}_{wv} = \frac{p}{K_w} \tag{1.23}$$

Since total volume of water is *n* times as large as total volume, the effect of the volume change of water in the total body is  $n\dot{p}/K_{w}$ . As a result, volume change (decrease) of a unit body yields,

$$\dot{\varepsilon}_{v} = \{m\}^{T} \{\dot{\varepsilon}\}$$
(1.24)

Continuum condition describes that the amount of water that flowed out is equal to the volume change of a body, i.e.,

$$\{m\}^{T}\{\dot{\varepsilon}\} = \{\nabla\}^{T}\{\dot{w}\} + \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$
(1.25)

Here, since constitutive equation of water, Equation (1.9), is used to make Equation (1.25), right-hand side of Equation (1.25) is expressed in terms of pore pressure, not strain.

# 1.4 Various governing equation of 2-phase material

## **1.4.1 Exact equation**

Fundamental equations necessary in the analysis of 2-phase material are already explained in sections 1.2 and 1.3. They are summarized as follows:

(1) Definition of effective stress  

$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{m\}p$$
(1.3)  
(2) Constitutive relation of soil skeleton  

$$\{d\sigma'\} = [D]\{d\varepsilon\}$$
(1.7)

(3) Strain-displacement relationship

$$\{\varepsilon\} = -[L]\{u\} \tag{1.10}$$

(4) Overall equilibrium

$$[L]' \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} + \rho_f\{\ddot{w}\} = \{0\}$$
(1.17)

(5) Equilibrium of pore water

$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n}\{\ddot{w}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$$
(1.20)

(6) Continuum condition

$$\{m\}^{T}\{\dot{\varepsilon}\} = \{\nabla\}^{T}\{\dot{w}\} + \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$
(1.25)

Since u, w, and p are used as independent variable in these equations, these formulation is called as u-w-p formulation.

If supposing that water is compressible, i.e.,  $K_w \neq \infty$ , pore pressure p can be removed from Equations (1.25) and (1.20). This types of formulation is called u-w formulation. When pore water is incompressible, or  $K_w = \infty$ , pore water pressure appears only in Equation (1.20), therefore cannot be removed. Both u-w-p formulation and u-w formulation are exact expressions of Biot's equation considering the kinematic condition.

#### **1.4.2 u-p** formulation, approximate formulation

So called u-w-p formulation which is the exact is introduced in the previous section. It requires, however, large amount of memory size and computing time to solve exact formulation, therefore there is no computer code which solves exact formulation. There are several codes which solves u-w formulation (or u-U formulation). In the u-w formulation, pore water pressure term is removed, but it is an important quantity to be known. Therefore it should be computed separately. Moreover, total number of independent variables is still large because only pore water pressure term is removed from the fundamental equation. In addition, in the consolidation analysis, it is usual to assume incompressible water, in which case complicated technique is necessary to solve the governing equation.

An approximate equation, called u-p formulation, is introduced in this section, which is consistent with consolidation equation, and is convenient to deal with water outside the analyzed region.

First approximation is that the pore water flow is very slow, so that acceleration of water relative to soil skeleton is neglected. Putting  $\ddot{w}=0$ , Equations (1.17) and (1.20) are rewritten as

$$[L]^{T} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$$
(1.26)

$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$$
(1.27)

Equation (1.27) is solved in terms of  $\dot{w}$  as

$$\{\dot{w}\} = \frac{|k|}{\rho_f g} \left( -\{\nabla\} p - \rho_f \{\ddot{u}\} + \rho_f \{b\} \right)$$
(1.28)

Substituting this equation into Equation (1.25), we obtain

$$\left\{\nabla\right\}^{\mathrm{T}}\frac{\left[k\right]}{\rho_{f}g}\left(-\left\{\nabla\right\}p-\rho_{f}\left\{\ddot{u}\right\}+\rho_{f}\left\{b\right\}\right)=\left\{m\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\dot{\varepsilon}\right\}-\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$
(1.29)

Equations (1.26) and (1.29) are governing equations when  $\ddot{w}$  is neglected. This formulation is called u-p formulation since u and p appear as variable. It is seen that there is no w term in the u-p formulation. Accordingly, number of equations reduced by 3. This formulation holds in sufficient accuracy in the ordinary liquefaction analysis.

In addition to the approximation above, the term of  $\rho_f(\ddot{u})$  in Equation (1.29) is frequently neglected, whose physical meaning is expressed in Equation (1.76) later. If this term can be neglected, acceleration appears only in the overall equilibrium equation. Zienkiewicz et al. conducted case study by numerical example<sup>9)</sup> and describes "we do not recommend that this term should be generally suppressed, although at low permeabilities its importance is small." Equation (1.29) is again rewritten as

$$\{\nabla\}^{T} \frac{[k]}{\rho_{f}g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_{f}\{b\}\right) = \{m\}^{T} \{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

$$(1.30)$$

A combination of Equations (1.26) and (1.30) is also a set of governing equations and is called u-p formulation, too.

## **1.4.3** Consolidation formulation

In the u-p formulation, the term  $\ddot{w}$  is assumed to be negligibly small compared with  $\ddot{u}$ . If acceleration itself is small (or inertia force is small), the term itself can be neglected. This assumption obviously does not hold during the earthquake, but may be reasonable in the process of excess pore water pressure dissipation after the earthquake, and holds in the ordinary consolidation problems.

Suppressing  $\ddot{u}$  and  $\ddot{w}$ , we obtain the following governing equations,

$$[L]' \{\sigma\} - \rho\{b\} = \{0\}$$

$$(1.31)$$

$$[\nabla]^T [k] ( [\nabla] = \{\sigma\} + \rho\{b\}) = [m]^T [\dot{\sigma}] \quad \stackrel{n}{\to} \dot{\sigma}$$

$$(1.32)$$

$$\{\nabla\}^{T} \frac{[k]}{\rho_{fg}} \left(-\{\nabla\}p + \rho_{f}\{b\}\right) = \{m\}^{T}\{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

$$(1.32)$$

This set of equations is so called consolidation equations. Equation (1.30) is identical with Equation (1.32), which indicate that the same equation can be used for pore water pressure terms in the consolidation and liquefaction analyses. It is usual in the consolidation analysis that  $K_w$  is assumed to be infinite, therefore the term  $p/K_w$  is neglected, in which case Equation (1.32) becomes

$$\{\nabla\}^{T} \frac{[k]}{\rho_{f}g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_{f}\{b\}\right) = \{m\}^{T} \{\dot{\varepsilon}\}p$$
(1.33)

A combination of Equations (1.31) and (1.33) is ordinary governing equation for consolidation problem.

## 1.4.4 Seepage analysis

In the above formulation, we consider interacting effect between soil and water, therefore governing equations are coupled. In this subsection, on the other hand, we treat the case that the behaviors of soil and pore water are separated. Overall equilibrium equation does not change under any condition, because, as recognized in the definition of effective stress, behavior of soil skeleton is anyway affected by pore water. However, it may become possible to separate the behavior of water from the total behavior under suitable condition.

There are two reasons by which interactive term appears in the equation of pore water; (1) existence of soil particle constrain the flow of water, which corresponds to Darcy's law, and (2) volume of soil skeleton changes depending on the change of pore water pressure (continuity condition).

The latter effect is neglected here. In other word, volume change of soil skeleton is assumed not to occur by the change of pore pressure, which condition always hold in steady state. Equation (1.29) result in

$$[\nabla]^{T} \frac{[k]}{\rho_{f}g} (-\{\nabla\}p - \rho_{f}\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{b\}) = -\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$
(1.34)

Interactive term still exists in this equation, but it can become non-interactive if the term  $r_f{\ddot{u}}$  is suppressed, whose validity is already explained in the preceding section. If, as conducted in the consolidation formulation, acceleration is assumed to be negligibly small, interactive term disappears, too. This indicates that in the quasi-static case, governing equation against pore water yields

$$\{\nabla\}^{T} \frac{[k]}{\rho_{f}g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_{f}\{b\}\right) = -\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

$$(1.35)$$

This equation if a governing equation in the unsteady seepage analysis. Moreover, right hand side becomes 0 under the steady condition, therefore

$$\left(\left\{\nabla\right\}^{T}\frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g}\left(-\left\{\nabla\right\}p+\rho_{f}\left\{b\right\}\right)=0$$
(1.36)

This equation is governing equation against steady flow.

Considering that there is no body force change and that acceleration term is neglected, and substituting Equation (1.22) into Equations (1.35) and (1.36), we obtain

$$\{\nabla\}^{T}[k]\{\nabla\}h = \frac{n\rho_{f}g}{K_{w}}\dot{h}$$
(1.37)

$$\{\nabla\}^{T}[k]\{\nabla\}h = 0 \tag{1.38}$$

These equations are familiar seepage equation appears in the soil mechanics.

## 1.4.5 Excess pore water pressure

Excess pore water pressure is the change of pore water pressure from the hydrostatic pressure, i.e.,

$$p_d = p - p_s \tag{1.39}$$

where  $p_d$  denotes excess pore water pressure, and  $p_s$  denote hydrostatic pressure obtained as a solution of seepage equation. Considering that  $p_s$  is a solution of Equation (1.36), and substituting Equation (1.39) into Equation (1.29), we obtain

$$\{\nabla\}^T \frac{[k]}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p_d - \rho_f\{\ddot{u}\}\right) = \{m\}^T \{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_w} \dot{p}$$
(1.40)

Equation (1.40) indicates that governing equations based on excess pore water pressure and total pore water pressure are the same to each other, except the existence of the term of body force.

#### **1.4.6 Undrained condition**

Undrained condition indicates that pore water does not move. This condition holds exactly or approximately in many situations in the soil mechanics. It is used one of the test condition of laboratory tests, in which case this condition is exactly true. In the actual field, this condition is approximately holds in such a situation that the phenomena occurs very rapidly. An example is a problem to compute initial condition of consolidation analysis in which load is applied almost suddenly. Liquefaction during the earthquake is suppose to be another example, in which duration of the earthquake is supposed to be sufficiently short for excess pore water to dissipate.

This condition can be written mathematically as

$$w = 0 \tag{1.41}$$

which indicate the pore water does not move relative to soil skeleton. Then  $\ddot{w}$  is always 0, which indicate that u-p formulation is an exact form under undrained condition.

It seems that, in the u-p formulation, Equation (1.41) seems not to be applicable because w is removed from the governing equation. Putting  $\ddot{w}=0$  in Equation (1.25), we obtain the constraint condition of undrained condition to be used instead of Equation (1.41) as

$$\{m\}^{T}\{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p} = 0 \tag{1.42}$$

Governing equation is derived using this condition. Staring from u-w-p formulation, Equation (1.17) is rewritten as

$$[L]^{T} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$$
(1.43)

Next, the differential with respect to time in Equation (1.42) can be replaced into incremental form since there is no velocity term, as

$$dp = \frac{K_w}{m} \{m\}^T \{d\varepsilon\}$$
(1.44)

Rewriting the definition of effective stress, Equation (1.3), into incremental form, we obtain

$$\{d\sigma'\} = \{d\sigma\} - \{m\}dp \tag{1.45}$$

Substituting constitutive relation, Equation (1.7), and Equation (1.44) into Equation (1.45), we obtain

$$\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} + \{m\}\frac{K_w}{n}\{m\}^T\{d\varepsilon\} = [\overline{D}]\{d\varepsilon\}$$
(1.46)

Here,  $\left[\overline{D}\right]$  is a tangent stiffness matrix, represented as

$$\left[\overline{D}\right] = \left[D\right] + \left\{m\right\} \frac{K_{w}}{n} \left\{m\right\}^{T}$$
(1.47)

Equations (1.43), (1.10), and (1.46) are governing equation under undrained condition. These equations do not include the pore water explicitly. In other words, number of unknowns can be reduced by the undrained condition. Related to it, interactive term disappears, hence equations are more easy to solve. Here, coefficient matrix  $[\overline{D}]$  is obtained from the elastic matrix [D] by replacing bulk modulus of soil skeleton K into  $(K+K_w/n)$ . It becomes clear in this formulation that bulk modulus of water cannot be an infinite value, which assumption is frequently used in the consolidation analysis. It is dangerous to use very large value for  $K_w$  instead for using infinite value, because element stiffness matrix in the Finite Element formulation cannot be computed or inaccurate. In STADAS, we solve this difficulty by another method, which is described later in the formulation of Finite Element method.

# **1.5 Formulation into Finite Element Method**

## 1.5.1 Formulation by weighted residuals

Let  $\{u^n\}$  nodal displacement, and the distribution of nodal displacement  $\{u\}$  in an element by the use of interpolation function [N] as

$$\{u\} = [N]\{u^n\}$$
(1.48)

Interpolation function [N] is sometimes called displacement function or shape function in the FE method.

Condition to minimize the residual of weighted intergrand of Equation (1.26) in an element yields

$$\int_{V} [N]^{\mathrm{T}} ([L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\}) dV = \{0\}$$
(1.49)

Here, weight function is chosen to be the same with interpolation function (Galerkin's method).

Integral in Equation (1.49) is to be done whole the element including boundary. Applying Gauss's theorem to the first term of Equation (1.49), we obtain

$$\int_{V} [N]^{T} [L]^{T} \{\sigma\} dV = \int_{S} [N]^{T} [n]^{T} \{\sigma\} dS - \int_{V} ([L][N])^{T} \{\sigma\} dV$$
  
=  $-\int_{S} [N]^{T} \{T\} dS - \int_{V} ([L][N])^{T} \{\sigma\} dV$  (1.50)

where [n] denote direction cosine matrix of unit normal (a matrix whose row is composed of

direction cosines  $\{n\}$ ), and

$$[T] = -[n]^{\mathrm{T}} \{\sigma\}$$

$$(1.51)$$

denote surface traction vector. S denotes surface of element region V, and dS denotes integral with respect to surface. Here, minus sign in the right-hand side of Equation (1.51) denotes that compression is taken positive. Surface traction is expressed in an explicit form by Equation (1.50), the substitution into Equation (1.49) yields

$$-\int_{V} ([L][N])^{T} \{\sigma\} dV - \int_{S} [N]^{T} \{T\} dS - \int_{V} [N]^{T} \rho\{b\} dV + \int_{V} [N]^{T} \rho\{\ddot{u}\} dV = \{0\}$$
(1.52)  
This equation is total equilibrium equation relaxed by weighted residual method.

Strain vector is obtained using the expression of Equation (1.48),

$$\{\varepsilon\} = -[L]\{u\} = -[L][N]\{u^n\}$$
(1.53)

where

$$[B] = [L][N]$$
(1.54)

denotes strain matrix or simply B matrix. Substitution of Equations (1.53) and (1.54) into constitutive relation (1.7), we obtain

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = -[D][B]\{u^n\}$$
(1.55)

Using these relations, Equation (1.52) become its final form as

$$\int_{V} [B]^{T} [D] [B] dV \cdot \{u^{n}\} = \int_{S} [N]^{T} \{T\} dS + \int_{V} [N]^{T} \rho\{b\} dV - \int_{V} [N]^{T} \rho\{\ddot{u}\} dV$$

$$[K]\{u^n\} = \{f\}$$
(1.56)

where

or

 $[K] = \int_{V} [B]^{T} [D] [B] dV$  : element stiffness matrix

$$\{F\} = \int_{S} [N]^{\mathrm{T}} \{T\} dS + \int_{V} [N]^{\mathrm{T}} \rho\{b\} dV - \int_{V} [N]^{\mathrm{T}} \rho\{\ddot{u}\} dV \quad : \text{ equivalent nodal force}$$

$$(1.57)$$

Equation (1.56) is a FE formulation of whole equilibrium, but it is not convenient. Therefore, we convert it into effective stress form and incremental form considering the nonlinear analysis. In the incremental form, increment of static body force  $\{b\} = \{0\}$ , therefore it does not appear in the governing equation. This is the only difference between total strain type formulation and incremental formulation.

Equilibrium equation relaxed by the use of weighted residuals is rewritten from Equation (1.52) as

$$-\int_{V} ([L][N])^{\mathrm{T}} \{d\sigma\} dV - \int_{S} [N]^{\mathrm{T}} \{dT\} dS + \int_{V} [N]^{\mathrm{T}} \rho\{d\ddot{u}\} dV = \{0\}$$
(1.58)  
where total stress increment  $\{ds\}$  is expressed from Equations (1.53), (1.7), and (1.3), as

 $\{d\sigma\} = \{d\sigma'\} + \{m\}dp = -[D][B]\{du^n\} + \{m\}dp$ (1.59)

Since  $\{ds\}$  is derived, substitution of Equation (1.59) yields

$$-\int_{S} [N]^{T} \{dT\} dS - \int_{V} [B]^{T} (-[D][B] \{du^{n}\} - \{m\} dp) dV + \int_{V} [N]^{T} \rho[N] \{d\ddot{u}^{n}\} dV = \{0\}$$

or,

$$[M] \{ d\ddot{u}^n \} + [K] \{ du^n \} - \int_V [B]^T \{ m \} dp dV = \{ dF \}$$
(1.60)  
ere

where

$[M] = \int_{V} [N]^{\mathrm{T}} \rho[N] dV$	: mass matrix,
$[K] = \int_{V} [B]^{\mathrm{T}} [D] [B] dV$	: (tangent) stiffness matrix
$\{dF\} = \int_{S} [N]^{\mathrm{T}} \{dT\} dS$	: Nodal load vector

Equation (1.60) is a governing equation of total equilibrium based on the effective stress. A more simplified form equation is derived, which is used in STADAS. Let's assume that pore water pressure is constant within an element, as Christian first assumed<sup>12)</sup>. Then the third term of the left hand side of Equation (1.60) can be modified as follows because pore water pressure is constant<sup>2</sup>.

$$\int_{V} [B]^{\mathrm{T}} \{m\} dp dV = \int_{V} [B]^{\mathrm{T}} \{m\} dV dp = \{K_{p}\} dp^{m}$$
(1.61)

where superscript m denotes that pore pressure is a representative value of an element.

$$\left\{K_{p}\right\} = \int_{V} [B]' \{m\} dV \qquad : \text{ confining pressure vector} \qquad (1.62)$$

Next, pore water pressure is expanded by backward difference,

$$dp^{m} = p_{i}^{m} - p_{i-di}^{m}$$
(1.63)

Here subscript indicates corresponding time.

Substituting Equations (1.61) and (1.63) into Equation (1.60), we obtain the overall equilibrium equation such that

$$[M] \{ d\ddot{u}^n \} + [K] \{ du^n \} - \{ K_p \} p_i^m = \{ dF \} - \{ K_p \} p_{i-di}^m$$
(1.64)

Then the unbalanced force  $\{dR\}$ , which will be generated in the nonlinear analysis, is computed as follows,

$$\{dR\} = \{dF\} - \{K_p\}(p_i^m - p_{i-d_i}^m) - [M]\{d\ddot{u}\} - \{df^e\}$$
(1.65)

where

 $\{df^e\} = \int_V [B]^T \{d\sigma'\} dV$  : nodal force equivalent with effective stress. It is obvious that total amount of numerical calculation is reduced very much by the operation

shown above compared with the ordinary FE method.

# 1.5.2 Equation on pore water pressure

Incremental form of Equation (1.29) is written in the form

<sup>2</sup> It may be assumed that one point Gauss integration is conducted to obtain Equation (1.61) because porewater pressure at the center of an element is used as a representative value of the element in the followings. This is consistent with the treatment of soil skeleton.

$$-\{\nabla\}^{\mathrm{T}}\frac{[k]}{\rho_{f}g}(\{\nabla\}p+\rho_{f}\{\ddot{u}\}-\rho_{f}\{b\})dt=\{m\}^{\mathrm{T}}\{d\varepsilon\}-\frac{n}{K_{w}}dp$$
(1.66)

where  $\{de\}$  and dp are increment during the time increment dt. In the ordinary FE method, weighted residual method is applied in Equation (1.66), too. In STADAS, we employ differential method following the method by Akai and Tamura<sup>13)</sup> but more general form<sup>3</sup>.

Equation (1.66) is written for infinitesinally small element, but we integrate it within an element. The right hand side is integrated as

$$\int_{V} \{m\}^{\mathrm{T}} \{d\varepsilon\} dV = -\int_{V} \{m\}^{\mathrm{T}} [B] \{du^{n}\} dV = -\{K_{p}\} \{du^{n}\}$$
(1.67)

$$\int_{V} dp dV = V dp^{m}$$
(1.68)

here V denotes volume (area in two dimensional analysis) of an element, since one point Gauss integration is assumed to be done or pore water pressure is assumed to be constant within an element as assumed in the preceding section.

Next, let's compute the integral of left hand side of Equation (1.66), i.e., water flows in an element. Firstly, a simple rectangular element shown in Figure 1.3, which is the same element configuration that Akai and Tamura computed, is examined.



Figure 1.3 Model to consider flow of water

Let point m denote the center of element being examined,  $I_1 \sim I_4$  denote the center of the neighboring elements, and correspondingly the elements themselves are called m and  $I_1 \sim I_4$ ,

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Consolidation equation is solved by Akai and Tamura, therefore they assumed that  $K_w = \infty$ , or the second term of right-hand side of Equation (1.66) is not considered. Moreover, the term related to kinematic component  $r_f(\ddot{u})$  is not considered.

respectively. Based on Darcy's law, pore water flowed out from element m to element  $I_1$  during time increment dt is computed, referring Figure 1.3, as

$$Q_1 = dt \ s_1 \ k \frac{h_m - h_1}{\ell_1}$$

Therefore sum total of pore water Q that flowed out from element m into surrounding four elements becomes

$$Q = \sum_{i=1}^{4} dt \, s_i \, k \, \frac{h_m - h_i}{\ell_i} = h_m \sum_{i=1}^{4} \frac{s_i k}{\ell_i} dt - \sum_{i=1}^{4} s_i \, k \, \frac{h_i}{\ell_i} dt \tag{1.69}$$

Equation (1.69) is derived for simple rectangular elements. The same procedure can be applied for more general form for the element that has n sides as

$$Q = \alpha \left( p^{m} + \rho_{f} \{ x_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ \{ \ddot{u}^{m} \} - \{ b \} \} \right) dt - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p^{i} + \rho_{f} \{ x_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ \{ \ddot{u}^{i} \} - \{ b \} \} \right) dt$$

$$= \alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \{ x_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt + \alpha \rho_{f} \{ x_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ d\dot{u}^{m} \}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left( \alpha_{i} \left( p^{i} - \rho_{f} \{ x_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt + \alpha_{i} \rho_{f} \{ x_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ d\dot{u}^{i} \} \right)$$

$$= \alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \{ x_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt + \{ c_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ d\dot{u}^{m} \}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left( \alpha_{i} \left( p^{i} - \rho_{f} \{ x_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt + \{ c_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ d\dot{u}^{i} \} \right)$$
(1.70)

Total pressure is separated into each component referring to Equation (1.22). When p denotes excess pore water, the term  $\{b\}$  is not necessary. Here,

$$\alpha_{i} = \frac{s_{i}k_{i}}{\rho_{f}g\ell_{i}}, \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{i}k_{i}}{\rho_{f}g\ell_{i}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i}$$

$$s_{i}k_{i} = s_{xi}k_{xim}\cos\theta_{i} + s_{yi}k_{yim}\sin\theta_{i}$$
(1.71)

 $k_{xim}$ ,  $k_{yim}$ : average permeability when pore water flows from point *m* to point  $I_i$ , which is computed as

$$\frac{\ell_i}{k_{xim}} = \frac{\ell_{ii}}{k_{xi}} + \frac{\ell_{im}}{k_{xm}}, \qquad \frac{\ell_i}{k_{yim}} = \frac{\ell_{ii}}{k_{yi}} + \frac{\ell_{im}}{k_{ym}}$$
(1.72)

 $k_{xi}$ ,  $k_{yi}$ : permeability of element  $I_i$  in x- and y-direction, respectively.

 $k_{xm}$ ,  $k_{ym}$ : permeability of element m in x- and y-direction, respectively.

 $s_i$ ,  $s_{xi}$ ,  $s_{yi}$ ,  $l_i$ ,  $l_{ii}$ ,  $l_{im}$ ,  $q_i$ : See figure 1.4.

 $\{x\}$ : coordinate at the center of the element

 $\{ du_i^n \}$ : displacement of node of element i.

$$\{c_m\} = \alpha \rho_f [N_m]^{\mathrm{T}} \{x_m\}$$
$$\{c_i\} = \alpha_i \rho_f [N_i]^{\mathrm{T}} \{x_i\}$$

(Note) For 4-point isoparametric element in two dimensional analysis, natural coordinate at the center of element is  $\xi = \eta = 0$ , therefore above equation yields

$$\{c_m\} = \alpha_i \rho_f \{\mathbf{x}_m \quad \mathbf{y}_m \quad \mathbf{x}_m \quad \mathbf{y}_m \quad \mathbf{x}_m \quad \mathbf{y}_m \quad \mathbf{x}_m \quad \mathbf{y}_m \}^T / 4 \{c_i\} = \alpha \rho_f \{\mathbf{x}_i \quad \mathbf{y}_i \quad \mathbf{x}_i \quad \mathbf{y}_i \quad \mathbf{x}_i \quad \mathbf{y}_i \quad \mathbf{x}_i \quad \mathbf{y}_i \}^T / 4$$

Considering that Q is the water flowed out from the element m, or volume (area) decreases when Q is positive, equation equivalent to Equation (1.66) finally becomes

$$\alpha \left( p^{m_{i}} - \rho_{f} \{ x_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p^{i}_{i} - \rho_{f} \{ x_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt + \{ c_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ d\dot{u}^{n} \} - \sum_{i=1}^{n} \{ c_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ d\dot{u}^{n} \}$$
$$= - \{ K_{p} \}^{\mathrm{T}} \{ du^{n} \} - \frac{nV}{K_{w}} \left( p^{m_{i}} - p^{m_{i-di}} \right)$$

or rewritten as

$$\left( -\alpha dt - \frac{nV}{K_w} \right) p^{m_i} - \left\{ K_p \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ du^n \right\} + \sum_{i=1}^n \alpha_i p^i_{\ i} dt - \left\{ c_m \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}^n \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ c_i \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}_i^n \right\}$$

$$= \frac{nV}{K_w} p^{m_{i-di}} + B$$
(1.73)



Figure 1.4 General configuration of elements to compute water flow

where

$$B = -\alpha dt \rho_f \{x_m\}^{\mathrm{T}} \{b\} + \sum_{i=1}^n \alpha_i dt \rho_f \{x_i\}^{\mathrm{T}} \{b\}$$
(1.74)

It may be difficult to understand the summation part of Equations (1.70) and (1.73) when looking at the equations. For example, the terms in Equation (1.70) will be added in the global

system in the following positions.

p^m	$p^1$	$p^2$	$p^3$	$p^4$	L
$-\alpha dt - \frac{nV}{K_w}$	a <sub>1</sub> dt	a <sub>2</sub> dt	a <sub>3</sub> dt	a <sub>4</sub> dt	$p^m$

It is difficult to make more recognizable expression of Equations (1.70) and (1.73) when looking at an element, but it may be possible to consider the whole system. When we focused on element *m*, the term  $\alpha idt$  appears at the freedom of element *i*. On the other hand, the term  $\alpha_m dt$  appears at the freedom of element *m* when we focused on element *i*. Here, it is obvious that  $\alpha_i$  and  $\alpha_m$  are the same to each other. Therefore coefficient matrix [A] is written in the form

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \tag{1.75}$$

where

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} dt - \frac{nV}{K_{w}}$$
 (summation is conducted to the element neighboring to element i)  

$$A_{ij} = \frac{s_{ij}k_{ij}}{\rho_f g\ell_{ij}}$$
 (i≠j. This term appears only when there is water flow between elements i and j)

(In case there is no water flow between element i and j)

and

 $A_{ii}=0$ 

 $s_{ij}k_{ij} = s_{ijx}k_{ijx} \left|\cos\theta_{ij}\right| + s_{ijy}k_{ijy} \left|\sin\theta_{ij}\right|$ 

 $s_{ijx}$ ,  $s_{ijy}$ : Length in x- and y-direction of the side between element i and element j,  $q_{ij}$ : angle between x-axis and the line connecting the centers of element i and element j,

 $k_{ijx}, k_{ijy}$ : average permeability between element i and element j, which is computed as

$$\frac{\ell_{ij}}{k_{ijx}} = \frac{\ell_{iji}}{k_{xi}} + \frac{\ell_{ijj}}{k_{xj}}, \qquad \frac{\ell_{ij}}{k_{ijy}} = \frac{\ell_{iji}}{k_{yi}} + \frac{\ell_{ijj}}{k_{yj}}$$

 $k_{xi}$ ,  $k_{yi}$ ,  $k_{xi}$ ,  $k_{yi}$  : permeability in x- and y-direction of element i and j, respectively,

 $l_{ii}$ : distance between the center of element i and element j.

 $l_{iii}$ ,  $l_{iii}$ : part of  $l_{ii}$  in element i and element j.

Obviously, [A] is a symmetric matrix. In the same manner, term related to velocity is written as follows:

$$\begin{cases} du^{n} \\ -\{c_{m}\}^{T} \end{cases} \begin{cases} du_{1}^{n} \\ \{c_{1}\}^{T} \end{cases} \begin{cases} du_{2}^{n} \\ \{c_{2}\}^{T} \end{cases} \begin{cases} du_{3}^{n} \\ \{c_{3}\}^{T} \end{cases} \begin{cases} du_{4}^{n} \\ \{c_{4}\}^{T} \end{cases}$$

However, there are the same degrees of freedom among  $\{du^n\}$ ,  $\{du_1^n\}$ ,  $\{du_2^n\}$ ,  $\{du_3^n\}$ , and  $\{du_4^n\}$ . Considering it, coefficient matrix of the interactive part is written as

$$[Q]^{T} \{ d\dot{u} \} = [Q_{im}] \{ d\dot{u} \} = \sum_{\text{all elements}} \left( -\{c_m\}^{T} \{ d\dot{u}^n \} + \sum_{i=1}^{n} \{c_i\}^{T} \{ d\dot{u}_i^n \} \right)$$
(1.76)

 $\{p^{m}\}\$ 

where  $Q_{im}$  takes nonzero value when water flows through the side of element i, and zero in the other case. Note that this is a formally expression and actual computation will be conducted base

on Equation (1.73).

Since there is no term correspond to the term in Equation (1.76), therefore coefficient matrix is symmetric. It may not cause problem because coefficient matrix is unsymmetrical in the ordinary liquefaction analysis as non-associated flow rule is usually used.

This term is the same expression with the term  $\rho_f{\{\ddot{u}\}}$  of Equation (1.29). Therefore it is obvious this term comes form the kinematic component of total head of water, therefore can be neglected.

## **1.5.3 Overall behavior**

Equations (1.64) and (1.73) are final form, which is summarized as follows:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ \ddot{p}_i^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [Q]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\dot{u}^n \\ \dot{p}_i^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ p_i^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF - K_p p_{i-di}^m \\ -\frac{nV}{K_w} p_{i-di}^m + B \end{bmatrix}$$
(1.77)

From Equation (1.77), response at time t is computed from the response value at time t-dt. Here, the coefficients of the differential of pore pressure with respect to time appears only because to write the two equations in the same form, therefore the value is 0. There is not acceleration term and velocity term in the ordinary consolidation analysis, in which case coefficient matrix is symmetric. In the liquefaction analysis, the coefficient matrix becomes symmetric if the kinematic component of head of water, [Q], is neglected (see derivation of Equation (1.30)).

Here we briefly discuss the calculation of Equation (1.70). Diagonal part of the coefficient matrix of the second term of Equation (1.70) is composed of the diagonal part of the stiffness matrix [K] and pore water pressure term [a]. As recognized from Equation (1.60) that  $[\alpha]$  is proportional with permeability and time increment. Since both of them are usually small value, the difference between the term from K and  $\alpha$  can be fairly large. For example, in the ordinary consolidation problem of clay that Akai and Tamura solved, the value of dt is at minimum 0.1 day. However, in the liquefaction analysis, dt is the order of 0.01 seconds. Therefore it is not rare case that coefficients are different by the order of 10 digit or more, in which case numerical error may appear at solving simultaneous equation. This problem is solved by the method proposed by Arai et al.<sup>14</sup>. Let multiply suitable value  $\beta$  to the lower part of Equation (1.77), and unknown  $p_{i}^{m}$  is replaced into  $p^{m}/\beta$ , then Equation (1.77) is rewritten in the form

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ \ddot{p}^m_i \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta [Q]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\dot{u}^n \\ \dot{p}^m_i \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -\beta K_p \\ -\beta K_p & \beta^2 A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ p^m_i \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF - K_p p^m_{t-dt} \\ -\frac{nV}{K_w} \beta p^m_{t-dt} + \beta B \end{bmatrix}$$
(1.78)

By this conversion,  $1/\beta$  of pore water pressure is obtained. The third term is symmetric if original coefficient is symmetric. Moreover, the value  $\beta^2$  is multiplied to the small value, we can reduce

the numerical error by choosing suitable value. In the ordinary unit system, the value of 1000~10000 will give good result. It is noted that this types of correction cannot be used in the Sandu-type u-p formulation.

#### **1.5.4 Undrained condition**

One can use governing equation of undrained condition in the FEM, in which case overall equilibrium becomes as follows if pore water pressure term is removed following the method described in subsection 1.4.6.

$$[M]\{\ddot{u}^n\} + [K']\{u^n\} = \{dF\}$$
(1.79)  
here

where

$$K'] = \int_{V} [B]^{\mathrm{T}} \left( [D] + \{m\} \frac{K_{w}}{n} \{m\}^{\mathrm{T}} \right) [B] dV$$
(1.80)

is a element stiffness matrix under undrained condition. Pharensesis of the integrand in Equation (1.80) is apparent tangent modulus under the assumption that displacement of soil skeleton is the same with the one of pore water. Equation (1.79) has a characteristics that, since there is no pore water pressure term, simultaneous equation is easy to solve, in which case pore pressure is computed from Equation (1.44). This formulation, however, has a shortage described in the following.

In the consolidation analysis and liquefaction analysis, it is frequent that the water is assumed to be incompressible, or the value of  $K_{w}$  is infinite. It is obvious that this assumption cannot be employed in Equation (1.80). Moreover, if the value of  $K_{w}$  is so large that apparent Poisson's ratio becomes approaches to 0.5, large amount of numerical error will be created in the computation of element stiffness matrix (by ordinary Gauss integral method), therefore not desired.

This problem is solved by relaxing this condition a little based on the method firstly shown by Christian<sup>15)</sup>. He assumed no volume change of an element, which is modified into more general form in the following.

Overall equilibrium, Equation (1.64) is used except that backward differential of pore pressure, then

$$[M]\{d\ddot{u}^{n}\} + [K]\{du^{n}\} - \{K_{p}\}dp^{m} = \{dF\}$$
(1.81)

On the other hand, undrained condition, Equation (1.42) is described using the nodal displacement as

$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{d\varepsilon\} = -\{m\}^{\mathrm{T}}[B]\{du^{n}\} = \frac{n}{K_{w}}dp$$
(1.82)

This equation is to be hold within all part of an element. We relax this condition a little such that this condition is to be hold in an element. In other words, integral of Equation (1.82) with an

element is to be hold under undrained condition, which yields

$$\left\{K_{p}\right\}^{T}\left\{du^{n}\right\} + \frac{nV}{K_{w}}dp^{m} = 0$$
(1.83)

From Equations (8.81) and (1.83), we can obtain the governing equations under undrained condition as follows:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ d\ddot{p}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p & -\frac{nV}{K_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ dp^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF \\ 0 \end{bmatrix}$$
(1.84)

In the previous method, number of unknown is smaller because pore pressure is removed in the governing equation, whereas, in the present method, coupled equation is solved. We can see that the equation can be solved even if  $K_{w}$  is infinite or any large value.

Both Equation (1.84) and Equation (1.77) have the same structure of the equation. The difference is that, in the Equation (1.77), water flow through the element is taken into account. Therefore we can use the same procedure to solve the problem for both undrained condition and other condition.

## **1.5.5** Consolidation analysis

In the consolidation analysis, undrained condition is out of consideration except to obtain the initial condition by the load applied within a short duration, which will be solved as the static problem and is described in the next subsection.

As shown in subsection 1.4.3, acceleration term is neglected in the consolidation analysis. Putting  $\{d\ddot{u}_n\}=\{0\}$  in Equation (1.77) and neglecting the kinematic component of the head of water, we obtain

$$\begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du^n \\ p_i^m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} dF - K_p p_{t-dt}^m \\ -\frac{nV}{K_w} p_{t-dt}^m \end{Bmatrix}$$
(1.85)

This equation is exactly the same equation that Akai and Tamura derived except that they defined tensile stress as positive.

## **1.5.6 Static analysis**

Either drained or undrained condition is assumed in the static analysis. The former condition corresponds that the load is applied very slowly so that pore water has time to drain without generating excess pore water pressure. It may be recognized to be steady state, too. On the other hand, the latter condition corresponds that the load is applied very quickly so that there it no time for pore water pressure to dissipate. This condition is frequently employed to compute an initial
condition of consolidation analysis, because the duration of loading is much smaller than the duration required for consolidation.

Governing equation for undrained condition is derived from Equation (1.84) by neglecting the acceleration term, as

$$\begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p & -\frac{nV}{K_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ dp^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF \\ 0 \end{bmatrix}$$
(1.86)

On the other hand, excess pore water does not change in the drained condition, therefore we can put  $dp^m = 0$ , which result in

$$[K]\{du^n\} = \{dF\}$$
(1.87)

The value of hydrostatic pressure is obtained by solving the seepage analysis described in the next section.

### 1.5.7 Seepage analysis

Lastly we mention the formulation of seepage analysis. For unsteady problem the governing equation is derived by removing the interactive term in Equation (1.73), which result in

$$\alpha \Big( p_i^m - \rho_f \{ x_m \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \Big) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i \Big( p_i^i - \rho_f \{ x_i \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \Big) dt = -\frac{nV}{K_w} \Big( p_i^m - p_{i-dt}^m \Big)$$
(1.88)

Putting  $p_i = p_{i-d_i} = p$  in Equation (1.88), we obtain the seepage equation under steady condition as

$$\alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \{ x_{m} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p^{i} - \rho_{f} \{ x_{i} \}^{\mathrm{T}} \{ b \} \right) dt = 0$$
(1.89)

## **1.6 Boundary condition**

#### 1.6.1 Boundary condition on soil

Figure 1.5 classifies various boundary on soil. The treatment for free boundary is easy among them, therefore the other two types of boundary is explained in this subsection. The separation of boundaries into two boundaries, lateral boundary and base, has sense in only earthquake response analysis. The name of "base" is sometimes confusing because several bases are defined related to the purpose of the analysis. For the design purpose, for example, base indicate the location below which earthquake wave is the same at any locations. Therefore it may be located deeper than the analyzed region. The definition of the term "base" in this section is that it belongs to the analyzed region and earthquake wave incidents through the boundary. In the case of elastic base, it also include the infinite region outside the analyzed region. Now, the definition of lateral boundary is clear, it is the rest of the boundary along which analyzed region is separated from the ground.

For static and consolidation analysis, these two boundaries are identical and are treated same with rigid base. For dynamic excitation problem, the boundary is also classified into two types, which is similar to rigid base and elastic base. Therefore, if one recognize the boundary condition for earthquake response analysis, them the treatment for other analysis is easily recognized.



Figure 1.5 Classification of boundary on soil movement

Since we deal with displacement of soil, we pick up terms related to soil movement from the governing equations described in the previous section. In other words, we represent governing equation as

$$[M]{\ddot{u}} + [C]{\dot{u}} + [K]{u} = \{0\}$$
(1.90)

#### 1.6.2 Rigid boundary

Base moves as if it is a rigid body at rigid base. Let's separate the displacement of the analyzed region  $\{u\}$  into displacement of rigid base  $\{u_b\}$  and displacement relative to rigid base;

$$\{u\} = \{u_r\} + \{u_{br}\}$$
(1.91)

where  $\{u_{br}\}$  denotes displacement relative to rigid base, and is expressed as

$$\{u_{br}\} = [I_b]\{u_b\} = [\{I_x\} \quad \{I_y\} \quad \{I_z\}] \begin{cases} u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{cases}$$
(1.92)

Here,  $[I_b]$  is a matrix with 3×3 component whose each column vector is expressed as  $\{I_x\}$ ,  $\{I_y\}$ , and  $\{I_z\}$ . The arguments of these column vector are 1 for the component corresponding to x-, y-, and z-movement, respectively and the other arguments are zero. Components  $u_{bx}$ ,  $u_{by}$  and  $u_{bz}$  of  $\{u_b\}$  are displacement in x-, y-, and z-direction, respectively.

Substituting Equation (1.92) into Equation (1.90), and separating the displacement into displacement at base and the other, Equation (1.90) is rewritten as

$$\begin{bmatrix} M_r & 0\\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r + \ddot{u}_{br}\\ \ddot{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_r & C_{br}\\ C_{rb} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_r + \dot{u}_{br}\\ \dot{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & K_{br}\\ K_{rb} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r + u_{br}\\ u_b \end{bmatrix} = \begin{cases} 0\\ 0 \end{cases}$$
(1.93)

Since displacement  $\{u_b\}$  is known because it is specified as earthquake input, upper equation of

Equation (1.93) yields  $[M_r]\{\ddot{u}_r\} + [C_r]\{\dot{u}_r\} + [K]\{u_r\}$   $= -[M_r][I_b]\{\ddot{u}_b\} - ([C_r][I_b] + [C_{rb}])\{\dot{u}_b\} - ([K_r][I_b] + [K_{rb}])\{u_b\}$ (1.94)

Since  $\{u_b\}$  is a rigid body motion, the third term of the right-hand side of Equation (1.94) is  $\{0\}$ . The second term also becomes  $\{0\}$  in the either case that stiffness proportional damping is employed or that damping force is proportional with the relative velocity, for example. Although it does not become  $\{0\}$  when mass matrix proportional damping is employed, but usually the effect of this term is supposed to be small, therefore neglected. Then Equation (1.94) is rewritten as

 $[M_r]\{\ddot{u}_r\} + [C_r]\{\dot{u}_r\} + [K]\{u_r\} = -[M_r][I_b]\{\ddot{u}_b\}$ (1.95) Equation (1.95) is equation of motion for rigid base.

#### 1.6.3 Elastic base

The modeling method is shown for 2-dimensional analysis following to  $Joyner^{16}$ . We consider the case that incident wave enters analyzed region perpendicular to the base as shown in Figure 1.6(a). The coordinate system is chosen so that y-axis is perpendicular to the base. Because incident wave moves toward y-direction, x-direction corresponds to the direction of vibration of SV wave, and y-direction corresponds to the one of P wave. We consider these two wave and the case that both incident and reflected wave moves perpendicular to the base.



Figure 1.6 Schematic figure of outcropping base

Let's identify quantities related to P-wave and S-wave by subscript P and S, and the ones II-23

related to incident wave and reflected wave by I and R. Then velocity at the point just below the boundary is expressed as

$$v_x = v_{SI} + v_{SR}$$

$$v_y = v_{PI} + v_{PR}$$
(1.96)

Next we consider the outcropping base where base faces to open surface as shown in Figure 1.6(b), which is obtained by removing the ground above the base from Figure 1.6(a). This base is called outcropping base. The wave component in this ground is distinguished by subscript F. Since phase of the reflected wave at the outcropping base is 180° different to the incident wave, velocity at the outcropping base becomes

$$v_{Fx} = 2v_{SI}$$

$$v_{Fy} = 2v_{PI}$$
(1.97)

We are dealing with plane wave, therefore displacement u is expressed as a function in terms of position and time as

$$u_{PI} = u_{PI} (y - V_p t)$$
  

$$u_{PR} = u_{PR} (y + V_p t)$$
  

$$u_{SI} = u_{SI} (y - V_s t)$$
  

$$u_{SR} = u_{SR} (y + V_s t)$$
  
(1.98)

where  $V_p$  and  $V_s$  denote velocities of P-wave and S-wave, respectively. Strain caused by the three types of wave is computed using this relations in the followings:

$$\varepsilon_{yl} = -\frac{\partial u_{Pl}}{\partial y} = \frac{v_{Pl}}{V_p}, \qquad \varepsilon_{yR} = -\frac{\partial u_{PR}}{\partial y} = \frac{v_{PR}}{V_p}$$
  

$$\gamma_{xyl} = -\frac{\partial u_{Sl}}{\partial y} = \frac{v_{Sl}}{V_s}, \qquad \gamma_{xyR} = -\frac{\partial u_{SR}}{\partial y} = \frac{v_{SR}}{V_s}$$
(1.99)

where  $V_p$  and  $V_s$  is expressed using the elastic moduli of base, bulk modulus K and shear modulus G, and mass density  $\rho$  as

$$V_p = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( K + \frac{4}{3}G \right)}, \qquad V_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$
(1.100)

Therefore, stress at the boundary caused by P-wave and S-wave becomes

$$\sigma_{yI} = \frac{v_{PI}}{V_{P}} \left( K + \frac{4}{3}G \right) = \rho V_{P} v_{PI} \qquad \sigma_{yR} = -\frac{v_{PR}}{V_{P}} \left( K + \frac{4}{3}G \right) = -\rho V_{P} v_{PR}$$
  
$$\tau_{xyI} = \frac{v_{SI}}{V_{S}}G = \rho V_{S} v_{SI} \qquad \tau_{xyR} = -\frac{v_{SR}}{V_{S}}G = -\rho V_{S} v_{SR} \qquad (1.101)$$

Since stress at the boundary is the sum total of the stress caused by incident wave and that by reflected wave,

$$\sigma_{y} = -\rho V_{P} (v_{PR} - v_{PI}) = -\rho V_{P} (V_{y} - V_{Fy})$$
  

$$\tau_{xy} = -\rho V_{S} (v_{SR} - v_{SI}) = -\rho V_{S} (V_{x} - V_{Fx})$$
(1.102)

In the above, we consider the stress at a point, but it must be converted into nodal force in the

FEM analysis. It can be done using Equations (1.51) and (1.57) since these stress is treated as surface traction. If boundary is a straight line, then

$$\{F\} = \begin{cases} \rho V_{s} \ell(v_{x} - v_{Fx}) \\ \rho V_{p} \ell(v_{y} - v_{Fy}) \end{cases} = \begin{cases} \mu_{x} (\dot{u}_{x} - \dot{u}_{Fx}) \\ \mu_{y} (\dot{u}_{y} - \dot{u}_{Fy}) \end{cases}$$
(1.103)

where  $\ell$  denotes sum of the half distances to the neighboring node in both sides. Equation (1.103) indicated that if we put two dashpots which works in x- and y-direction and whose viscous coefficient are  $\mu_x$  and  $\mu_y$ , and if we excite the node of dashpot by the velocity relative to the one at outcropping base, resultant force is exactly the same to consider infinite region under the base of analysis.

Since we assumed only that both incident and reflected waves are directed perpendicular to the boundary except that we assumed that there is a infinite region outside the analyzed boundary therefore reflected wave never come back into the analyzed region. Among these assumption, incident wave is always perpendicular to the base because we set so. On the other hand, reflected wave is also perpendicular to the base in the one-dimensional case, but may not be perpendicular to the boundary in two- and three-dimensional cases. In this sense, Equation (1.103) is an approximation of actual elastic base.

If we combine load due to dashpot described in Equation (1.103) into equation of motion, Equation (1.90), we obtain

 $[M]\{\ddot{u}\} + [C']\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \mu\{I\}\dot{u}_{f}$ (1.104)

where  $\{I\}$  denote a vector whose argument is 1 if the direction of movement of that freedom coincide with the direction of vibration of the incident wave at the base, and 0 for other freedom, and  $u_t$  is a displacement if base of analysis were outcropping base, and

$$[C'] = [C] + [\mu] \tag{1.105}$$

where  $[\mu]$  denotes a diagonal matrix whose component is computed from Equation (1.103) at the node where dashpot is attached and is zero for other components..

We should specify the velocity of outcropping base to use Equation (1.104), which is somewhat inconvenient in the practical use. We separate displacement in the analyzed region into two component, displacement at the outcropping base and displacement relative to outcropping base,

$$\{u\} = \{u_r\} + \{I_b\}u_f \tag{1.106}$$

where  $\{I_b\}$  is a vector whose component is 1 if direction of freedom coincide with the direction that dashpot works. Substitution of Equation (1.106) into Equation (1.105) yields

$$[M]\{\ddot{u}_r\} + [C']\{\dot{u}_r\} + [K]\{u_r\} = -[M]\{I_b\}\ddot{u}_f - [C]\{I_b\}\dot{u}_f$$
(1.107)

The second term of the right-hand side of Equation (1.107) becomes  $\{0\}$  if damping is such that damping force is proportional to the relative velocity of elements. Now, velocity term of outcropping base disappears and acceleration term remains instead. It indicate that we can use acceleration of

outcropping base in the analysis as ordinary earthquake response analysis is so. It is noted that acceleration in right-hand side of Equation (1.107) is the acceleration at the outcropping base, which is double in amplitude of the incident wave.

Unidirectional incident wave is considered in Equation (1.106), but if one consider multi-directional component of incident wave, he should add corresponding term into the right hand side of Equation (1.107).

## 1.6.4 Lateral boundary

In this subsection, modeling of lateral boundary by dashpot is explained.



Figure 1.7 Energy transmitting boundary that Lysmer assumed

Lysmer et al.<sup>17)</sup> showed that the following boundary condition has good ability to absorb the energy of wave that are going out of the region being considered for the vibration generated within the region as shown in Figure 1.7

$$\sigma = -a\rho V_P v_n$$
  

$$\tau = -b\rho V_S v,$$
(1.108)

where  $\sigma$  and  $\tau$  are normal and tangential stress, respectively,  $v_n$  and  $v_t$  are velocities in the normal and tangential directions, respectively, and a and b are dimensionless coefficients. The case that a=1 and b=1 are especially called standard boundary, in which case boundary absorbs energy of incident wave the most efficiently if angle of incident wave is perpendicular to the boundary. On the other hand, steady Rayleigh wave can be completely absorbed by setting suitable value for aand b as a function of depth. The physical modeling of this boundary is the same with the boundary shown in the previous subsection (actually, dashpot for lateral boundary is proposed earlier and Joyner extended it for elastic base), but incident waves that ate not perpendicular to the base is taken into account in this model. As shown in Figure 1.8, standard boundary show good ability fairly wide range of incident angle. Therefore although Joyner did not discuss the reflected wave not perpendicular to the boundary, his boundary is effective at fairly wide range of reflected wave.

Since vibration source in the region being considered is discussed in Lysmer's method, it cannot be used in the earthquake response analysis directly because region outside the analyzed region is also vibrate during the earthquake. If we subtract the displacement of free field from the displacement, displacement of free field is zero. Therefore, if we are interested in the absorption of the wave which moves relative to free field, boundary condition to be used instead of Equation (1.108) becomes

$$\sigma = -a\rho V_P(v_x - v_{Fx})$$
  

$$\tau = -b\rho V_S(v_y - v_{Fy})$$
(1.109)

It is noted that in many computer codes input corresponding the coefficient a and b are not prepared, or only standard boundary is considered. It can be, however, taken into account if one prepare the data considering these coefficient in the value of  $V_s$  and  $V_p$ .



Figure 1.8 energy absorbing capacity of standard boundary

Nodal force  $\{F_{i+1}\}$  acting at the node between *i*th an *i*+1th layer is computed for standard boundary as

$$\{F_{i+1}\} = \begin{cases} (\rho_{i}\ell_{i}V_{p_{i}} + \rho_{i+1}\ell_{i+1}V_{p_{i+1}})(\dot{u}_{x,i+1} - \dot{u}_{Fx,i+1})\\ (\rho_{i}\ell_{i}V_{Si} + \rho_{i+1}\ell_{i+1}V_{Si+1})(\dot{u}_{y,i+1} - \dot{u}_{Fy,i+1}) \end{cases} = \begin{cases} \mu_{xxbi}(\dot{u}_{x,i+1} - \dot{u}_{Fx,i+1})\\ \mu_{yrbi}(\dot{u}_{y,i+1} - \dot{u}_{Fy,i+1}) \end{cases}$$
(1.110)

Figure 1.9 Free field



Figure 1.10 Schematic figure of lateral viscous boundary

Therefore, equation of motion considering this term in addition to Equation (1.95) and (1.107) yields

 $[M^*]\{\ddot{u}_r\} + [C^*]\{\dot{u}_r\} + [K^*]\{u_r\} = -[M]\{I_b\}\ddot{u}_g - [\mu_{rb}]\{I_F\}\dot{u}_F \qquad (1.111)$ where  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$ , and  $u_g$  are replaced into  $M_r$ ,  $C_r$ ,  $K_r$ , and  $u_b$ , respectively, for rigid base, and M, C', K, and  $u_f$  for elastic base. Matrix  $[m_{rb}]$  is valid only at the freedom where dashpot is set, and  $u_F$ denote displacement of lateral free field.

Usually analysis is conducted twice to use dashpot for lateral boundary. In the first analysis,

response of free field is computed, and, in the second analysis, both input earthquake motion and the response of free field are used as input and the problem is to be treat as multiple excitation problem. So as to avoid this inconveniency, free field is sometimes modeled with large area compared with the region being analyzed so that the behavior of analyzed region does not affect the response of free field. If the free field is too large, numerical error will increase, and if it is too small, the behavior is affected by the behavior of analyzed region. STADAS solves this difficulty by taking care to build a damping matrix of dashpot connecting the free field and analyzed region, which enable to solve the model in Figure 1.10 without error. Here damping matrix are build so that the force acting the dashpot does not act into the free field, which result in

$$\begin{bmatrix} M^* & 0\\ 0 & M_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}^n\\ \ddot{u}^n_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* + \mu_{rb} & \mu_{rb}\\ 0 & C_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}^n\\ \dot{u}^n_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & 0\\ 0 & K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n\\ u^n_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M]\{I\}\\ [M_F]\{I_F\} \end{bmatrix} \ddot{u}_g$$
(1.112)

where above equation is build for the region being analyzed and the lower equation corresponds to the equation of motion of free field, and subscript F indicates quantities related to free field.

#### **1.6.5 Boundary condition for water**

There are two types of boundary for the pore water: fundamental boundary where pore water pressure is specified and natural boundary where flow through the boundary is specified.

A little consideration is required to treat the boundary condition for pore water in STADAS because pore water pressure only at the center of an element is computed. We consider virtual element that is symmetric with the referent element as shown in Figure 1.11. Let's denote that pore water pressure of referent element as  $p^m$  and the one of the virtual element as p'.



Figure 1.11 Virtual element that is symmetric with referent element

The value of pore water pressure is specified at the fundamental boundary. Let's denote it as  $p_b$ , II-29 then pore water pressure p' of virtual element is computed from

$$p_b = \frac{p^m + p'}{2} \tag{1.113}$$

where linear pore water pressure gradient is assumed. The solution of Equation (1.113) gives  $p^i=2p^b-p^m$ . Therefore water passing through this boundary per unit time, Q is computed as

$$Q = \frac{sk}{\rho_f g\ell} \left( p^m - p^i \right) = \frac{2sk}{\rho_f g\ell} \left( p^m - p_b \right)$$
(1.114)

This equation indicate that fundamental boundary is treated as the other boundary where there is neighboring element, treatment of which is already described, if we change the definition of  $\ell$  from the distance between the center of elements to the distance between the center of the element and boundary, and add the term of  $p_b$  in the right-hand side of governing equation.

On the other hand, the water passing the natural boundary dQ is computed as

$$dQ = \frac{sk}{\ell\gamma_{w}} \left( dp^{i} - dp^{m} \right) \tag{1.115}$$

where k denotes permeability in the direction connecting the center of two elements, s is the length of the boundary, and  $\ell$  denotes the distance between the centers.

As shown, flow through the boundary can be computed by assuming virtual element, then flow in Equation (1.70) is computed.

The most frequently used boundary conditions are  $dp_b=0$  and dQ=0. It is noted that for other boundary the term  $dp_b$  and dQ will move from left-hand to right-hand side in Equation (1.77). As the result, treatment of boundary condition for pore water is summarized as follows:

 $dQ=0 : \text{ undrained. Not necessary to consider } \alpha_i \text{ and } dp'=dp^m$   $p_b=0 : \text{drained. Add } \frac{sk}{\rho_f g(\ell/2)} \text{ into } \alpha_i, \text{ where } \ell/2 \text{ denotes distance to the boundary.}$ Natural boundary :  $-Q^*dt$  is added to the right-hand side, where  $Q^*$  denotes flow goring out from the boundary
Fundamental boundary : Add  $\frac{sk}{\rho_f g(\ell/2)} p_b dt$  in the right-hand side.

## **1.7 Numerical integration with respect to time**

## 1.7.1 Newmark's $\beta$ method

Since quantities at time t is derived from the one at time t-dt for pore water pressure in fundamental equation (1.77), we compute displacement in the same manner. Applying the Newmark's  $\beta$  method, displacement and velocity at time t is computed as

$$\dot{u}_{t} = \dot{u}_{t-dt} + (1-\gamma)dt \,\ddot{u}_{t-dt} + \gamma \,dt \,\ddot{u}_{t}$$

$$u_{t} = u_{t-dt} + dt \,\dot{u}_{t-dt} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(dt)^{2} \ddot{u}_{t-dt} + \beta(dt)^{2} \ddot{u}_{t} \qquad (1.116)$$

where  $\gamma$  and  $\beta$  are parameter affecting the accuracy of numerical integration, and take the value  $0 \le \gamma \le 1$  and  $0 \le \beta \le 1/2$ , respectively. The method to take  $\gamma = 1/2$  for velocity is called Crank-Nicholson's method, and employed frequently. The one reason is that numerical damping is introduced for other value<sup>18</sup>, and the other reason is that the error is small in general when  $\gamma = 1/2$ .

Incremental form of Equation (1.116) becomes

$$\{d\dot{u}\} = dt \{\ddot{u}_{t-dt}\} + \gamma dt \{d\ddot{u}\}$$
  
$$\{du\} = dt \{\dot{u}_{t-dt}\} + \frac{1}{2}(dt)^{2} \{\ddot{u}_{t-dt}\} + \beta (dt)^{2} \{d\ddot{u}\}$$
  
(1.117)

If we substitute these equations into fundamental equation, Equation (1.77), only  $\{d\ddot{u}\}\$  and  $\{p(t)\}\$  remains as unknown variable, therefore they can be solved. In the consolidation analysis, however, displacement increments are unknown. To be consistent, it is convenient to leave displacement increment as known. If Equation (1.117) is solved in terms of displacement, we obtain

$$d\ddot{u} = \frac{1}{\beta (dt)^2} du - \frac{1}{\beta dt} \dot{u} - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}$$
$$d\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta dt} du + dt \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}$$
(1.118)

where  $\dot{u}$  and  $\ddot{u}$  denote the velocity and acceleration at time *t*-*dt*. Substituting this into Equation (1.117), we obtain

$$\left[\frac{\frac{M}{\beta dt^{2}} + \frac{\gamma C}{\beta dt} + K - K_{p}}{-\frac{\gamma c_{m}^{T}}{\beta dt} - K_{p}^{T}} - \alpha dt - \frac{nV}{K_{w}}\right] \left\{ \begin{array}{l} du \\ p_{i}^{m} \end{array} \right\} + \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} p_{i} dt + \frac{\gamma}{\beta dt} \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_{i} \right\}^{T} \left\{ du_{i} \right\} = \\ \left\{ M \left( \frac{1}{\beta dt} \dot{u} + \frac{1}{2\beta} \ddot{u} \right) + C \left( \frac{\gamma}{\beta} \dot{u} - \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) dt \ddot{u} \right) + dF - K_{p} p_{i-di}^{m} \\ \left\{ c_{m} \right\}^{T} \left( \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) dt \ddot{u} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u} \right) - \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_{i} \right\}^{T} \left( \left( 1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) dt \ddot{u} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u} \right) - \frac{nV}{K_{w}} p_{i-di}^{m} + B \right\}$$

$$(1.119)$$

This method has an advantage that stiffness matrix appears only in the left hand side and is not multiplied any coefficients. Therefore, we can compute and add various term in (1.119) with building an stiffness matrix.

#### **1.7.2 Predictor-corrector method**

It becomes difficult to obtain unique solution such as tangent modulus method previously explained when tangent modulus is a function of both strain and effective stress, which occurs frequently in the liquefaction analysis, because the term  $[K]{u}$  in Equation (1.77) becomes nonlinear. Iterative method is to be employed in this case. A Predictor-corrector method is employed in the program.

Newmark's  $\beta$  method is employed as a predictor, in which acceleration response of first iteration is the same with the acceleration increment of input earthquake. In other words, we employ acceleration increment of base as initial guess.

Both tangent modulus and initial modulus can be used as predictor, in which case flow chart of the solution is shown in Figure 1.12.



Figure 1.12 Floe chart for predictor-corrector iterative method

#### References

- Biot, M.A., General Theory of Three-dimensional Consolidation, J. Appl Phys., Vol 12, pp.155-164, 1941
- Biot, M.A., Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, J. Appl. Phys, Vol. 26, pp.182-185, 1955
- Biot, M.A., Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, J. Appl. Phys, Vol. 33, pp.1483-1898, 1962
- Biot, M.A., Theory of Stability and Consolidation of a Porous Media under Initial Stress, J. Math. and Mech., Vol. 12, pp.521-541, 1963
- 5) Ghaboussi, J. and Wilson, E.L., Variational Formulation of Dynamics of Fluid Saturated Porous Elastic Solids, Proc. ASCE, Vol. 98, No. EM4, pp.947-963, 1972
- 6) Bowen, R.M., Theory of Mixtures, Continuum Physics, Vol. III, Eringen ed., Academic Press, 1976, New York
- 7) Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol. 30, pp.385-395, 1980
- Zienkiewicz, O.C., Basic Formulation of Static and Dynamic Behavior of Soil and Other Porous Media, Numerical Methods in Geomechanics, J.B. Martins ed., D. Reidl Publishing Co., 1982
- 9) Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C. ed., Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads Constitutive relations and numerical treatment, John Wiley and Sons, 1982
- Prevost, J.H., Nonlinear Transient Phenomer.a in Saturated Porous Media, Comp. Mech. in Appl. Mech. Eng., Vol. 20, pp.3-8, 1982
- 11) Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T, Dynamic Behavior of Saturated Porous Media, The Generalized Biot Formulation and Its Numerical Solution, International Journal of Numerical and Applied Method in Geomechanics, Vol. 8, pp.71-96, 1984
- 12) Christian, J.T. and Boehmar, J.W., Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE, Vol. 96, No. SM4, pp.1435-1457, 1968
- 13) Akai, K. and Tamura, T., Numerical analysis of multi-dimensional consolidation by plasticity theory, Proc., JSCE, No. 269, pp.95-104, 1976
- 14) Arai,K., Watanabe,T., Ueda,Y., Comparison of numerical method of multi-dimensional consolidation, Soils and Foundation, Vol.24, No. 3, pp.178~180, 1983
- Christian, J.T., Undrained Stress Distribution by Numerical Methods, Proc. ASCE, SM6, Nov., 1968, pp.1333-11345
- 16) Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of

the Seismological Society of America, Vol. 65, No. 5, pp.1337-1357, October 1975

- 17) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM4, 1969, pp.859-877
- Yoshida, Y., Time dependent analysis, Theory and application of Finite Element Method in Strutural Engineering, Japan Steel Association, 1984

## 2 Hourglass deformation mode

One point Gauss integration is conducted to compute an element stiffness matrix in STADAS because of two reason: save computing time and memory for numerical integral, and consistent with the treatment of porewater. As shown in chapter 1 and will be shown in the following, this method has several advantage, but it has a shortage that it may cause hourglass instability. The solution of the hourglass instability, anti-hourglass mode matrix, is described in this chapter

## **2.1 Fundamental equations**

We consider the behavior of soil in this chapter. We can treat the mixture of soil and water as one body in the total stress analyses.

First, FEM formulation using the advantage of one point Gauss integration is described although general method is described in the previous chapter. Fundamental equations are as follows:

(1) Displacement 
$$u = \{N\}^{\mathrm{T}} \{u_n\}$$
  
 $v = \{N\}^{\mathrm{T}} \{v_n\}$ 
(2.1)

u, v: Displacement in x- and y-direction, respectively where subscript n indicate that they are nodal displacement.

(2) Interpolation function  $\{N\}^T = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\}$  (2.2)

$$N_i = (1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i)$$
(2.3)

$$\xi_i = -1, 1, 1, -1$$
 for  $i = 1$  to 4 (2.4)

$$\eta_i = -1, 1, 1, -1$$
 for  $i = 1$  to 4 (2.5)

(3) Constitutive relation  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$  (2.6)

Compression is taken positive. Strain is engineering strain.

(4) Strain-displacement relation 
$$\{\varepsilon\} = -\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \begin{cases} u\\ v \end{cases}$$
 (2.7)

Since the state values at the center of an element, where  $\xi = \eta = 0$ , is used in the one point Gauss integration, it is convenient to compute them. Substituting Equations (2.1)~(2.5) into Equation (2.7), we obtain the strain at the center of an element

$$\left\{\varepsilon_{c}\right\} = \frac{1}{A} \begin{cases} \left\{b_{x}\right\}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \left\{b_{y}\right\}^{\mathrm{T}}\\ \left\{b_{y}\right\}^{\mathrm{T}} & \left\{b_{x}\right\}^{\mathrm{T}} \end{cases} \begin{cases} u_{n}\\ v_{n} \end{cases} = \frac{1}{A} \left[B_{c}\right] \begin{cases} u_{n}\\ v_{n} \end{cases}$$
(2.8)

where

$$\{b_x\}^{\mathsf{T}} = \frac{1}{2} \{y_2 - y_4 \quad y_3 - y_1 \quad y_4 - y_2 \quad y_1 - y_3\} = \int \frac{\partial \{N\}}{\partial x} dA$$

$$(2.9)$$

$$\{b_y\}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} \{x_4 - x_4 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_4 \quad x_3 - x_1\} = \int \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dA$$
 (2.10)

Here, subscript c in Equation (2.8) indicates that they are the value at the center of an element. In the followings, however, they are usually clear, therefore subscript c are usually removed unless necessary.

## **2.2 Element stiffness matrix**

One of the advantage of one point Gauss integral is that it requires less amount calculation compared to other method. Moreover, it can be possible to compute element stiffness matrix without error for the material whose Poisson's ration is extremely close to 0.5. In the ordinary numerical integral, integral in this range may cause large error. For example, it is possible to obtain element stiffness matrix without any problem for the material with Poisson's ration v = 0.49999 even by simple precision calculation by one point Gauss integral, which calculation is necessary under undrained condition.

Virtual work equation under virtual displacement {  $\delta u_n$  } is written as

 $\{\delta U_n\}^T \{f_n\} = \int \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dA = A \{\delta \varepsilon_c\}^T \{\sigma_c\} = A \{\delta U_n\}^T [B_c] \{\sigma_c\}$ (2.11) Substituting Equations (2.6) and (2.8) into the condition that Equation (2.11) holds under arbitrary  $\{\delta u_n\}$ , we obtain the relation between nodal force  $\{f_n\}$  and nodal displacement  $\{U_n\} = \{\{u_n\}, \{v_n\}\},$ 

$$\{f_n\} = A[B_c]^T [D_c][B_c] \{U_c\}$$
(2.12)

Therefore element stiffness matrix [K] yields

$$[K] = A[B_c]^{\mathrm{T}}[D_c][B_c]$$
(2.13)

## 2.3 Hourglass deformation mode

First, we define two fundamental vector by Equations (2.14) and (2.15), the meaning of which will be clear later.

$${s}^{T} = {1 \ 1 \ 1 \ 1}$$
 : Rigid body motion (2.14)

$${h}^{T} = {1 -1 1 -1}$$
 : Hourglass mode (2.15)

The relation of these vector and vectors shown in the preceding section is as follows:

$$\{s\}^{\mathrm{T}}\{h\} = \{s\}^{\mathrm{T}}\{b_x\} = \{s\}^{\mathrm{T}}\{b_y\} = 0$$
(2.16)

$$\{h\}^{\mathrm{T}}\{b_{x}\} = \{h\}^{\mathrm{T}}\{b_{y}\} = 0$$
(2.17)

In addition, the relation between nodal coordinate (x-coordinate =  $\{x_n\}$ , y-coordinate =  $\{y_n\}$ ) and  $\{b_x\}$ ,  $\{b_y\}$  becomes

$$\{x_n\}^{\mathrm{T}}\{b_x\} = \{y_n\}^{\mathrm{T}}\{b_y\} = A$$
(2.18)

$$\{x_n\}^{\mathrm{T}}\{b_n\} = \{y_n\}^{\mathrm{T}}\{b_n\} = 0$$
(2.19)

The element being considered is composed with four node, and each node has 2 degrees of freedom. Therefore an element has 8 degrees of freedom, among which three are rigid body motion in x- and y-directions and rotation. Therefore it has five independent deformation mode. On the other hand, the one point Gauss integration uses the state variable at the center of an element. In other word, displacement of an element is expressed in terms of the strain at the center of an element by assuming linear displacement field. The total number of strain at the center of an element, however, is 3. Therefore two deformation modes cannot be expressed by one-point Gauss integration.



Figure 2.1 A set of independent deformation modes

Let's consider deformation modes in Figure 2.1 as an example. Strain is caused at the center of the element by three deformation mode shown in the upper row in the figure, which deformation modes corresponds to  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , and  $\tau_{xy}$ . On the other hand, strain is not caused at the center of the element by two deformation modes shown in the lower row in the figure. This may cause instability because an element can deform without rigidity. In the actual situation, hourglass

mode instability is appeared in such a mode as shown in Figure 2.2. Now it is recognized the meaning of the term "hourglass" in Figure 2.2.



Figure 2.2 Typical hourglass mode instability

It is easy to recognize that hourglass instability can be avoided by giving suitable stiffness against hourglass mode deformation. As shown above, there are two hourglass modes, mode to deform in x-direction and y-direction. Then, we express generalized strains  $q_x$  and  $q_y$  using the shape function against hourglass mode deformation  $\{\gamma\}$  as

$$q_{x} = \{\gamma\}^{\mathrm{T}} \{u_{n}\}$$

$$q_{y} = \{\gamma\}^{\mathrm{T}} \{v_{n}\}$$

$$(2.20)$$

$$(2.21)$$

Here, shape function  $\{\gamma\}$  is defined as

 $\{\gamma\} = \{h\} + \alpha_x \{b_x\} + \alpha_y \{b_y\}$ (2.22)

where  $\alpha_x$  and  $\alpha_y$  are coefficient, whose value is determined because of the following reason.

It is noted that shape  $\{\gamma\}$  function have a characteristics such that generalized strain q is 0 under the set of displacement for rigid body motion and constant strain. In other words, it must be orthogonal to them, which is proved hereafter.

### 2.4 Orthogonality against rigid body motion

There are three independent rigid body motions, which are shown in the table below. Therefore rigid body motion is expressed as a linear combination of these mode, which is expressed using three arbitrary coefficients  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , and  $\beta_3$ .

$$\begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases} = \beta_1 \begin{cases} s \\ 0 \end{cases} + \beta_2 \begin{cases} 0 \\ s \end{cases} + \beta_3 \begin{cases} -x_n \\ y_n \end{cases}$$
 (2.23)

	x-direction	y-direction	rotation
$\{u_n\}$	<i>{s}</i>	{0}	$-\{x_n\}$
$\{v_n\}$	{0}	{ 2 }	$\{y_n\}$

If the hourglass deformation mode in x-direction is orthogonal to the rigid body motion, the equation

$$(\{h\} + \alpha_x \{b_x\} + \alpha_y \{b_y\})^{\mathrm{T}} (\beta_1 \{s\} + \beta_3 \{x_n\}) = 0$$
(2.24)

should be holds under any value of  $\beta_1$  and  $\beta_3$ , which result in Equation (2.25). Here sign against rotation is opposite to the one before, which is done so as to make the following formulation easy, and which does not affect the conclusion because orthogonality should holds regardless to the displacement in y-direction.

$$\{h\}^{\mathrm{T}}\{s\} + \alpha_{x}\{b_{x}\}^{\mathrm{T}}\{s\} + \alpha_{y}\{b_{y}\}^{\mathrm{T}}\{s\} = 0$$
(2.25)

$$\{h\}^{\mathrm{T}}\{x_{n}\} + \alpha_{x}\{b_{x}\}^{\mathrm{T}}\{x_{n}\} + \alpha_{y}\{b_{y}\}^{\mathrm{T}}\{x_{n}\} = 0$$
(2.26)

Referring Equation (2.16), Equation (2.25) always hold. Using the relation in Equations (2.18) and (2.19), the third term of Equation (2.26) becomes 0, and the inner product of second term is A. Therefore the condition that , Equation (2.26) holds is rewritten as Equation (2.27), and therefore the value of  $\alpha_{y}$  can be arbitrary.

$$\alpha_x = -\frac{1}{A} \{h\}^T \{x_n\}$$
(2.27)

In the same manner, orthogonality condition against hourglass mode in y-direction is written as Equation (2.28); again,  $\alpha_{x}$  can be an arbitrary value.

$$\alpha_{y} = -\frac{1}{A} \{h\}^{T} \{y_{n}\}$$
(2.28)

As a result, shape function must have such a form shown in Equation (2.30) so as to be orthogonal to the rigid body movements in both x- and y-direction

$$\{\gamma\} = \{h\} - \frac{1}{A} \left(\{h\}^T \{x_n\} \{b_x\} + \{h\}^T \{y_n\} \{b_y\}\right)$$
(2.29)

For the check of orthogonality against rigid body rotation, let's suppose  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  and  $\beta_3 = 1$ , we obtain

$$q_{x} = -\{h\}^{T}\{x_{n}\} + \frac{1}{A}\left(\{b_{x}\}^{T}\{x_{n}\}^{T}\{h\}\{x_{n}\} + \{b_{y}\}^{T}\{y_{n}\}^{T}\{h\}\{x_{n}\}\right)$$
(2.30)

where among two term in the pharensesis of Equation (2.30), two products,  $\{x_n\}^1 \{h\}$  and  $\{y_n\}^1 \{h\}$  result in scalar quantity. The product of the exterior term, which is possible because center part is scalar, is modified using the relations in Equations (2.18) and (2.19),

$$q_x = -\{h\}^{\mathrm{T}}\{x_n\} + \{h\}^{\mathrm{T}}\{x_n\} = 0$$
(2.31)

Therefore orthogonality is proved.

## 2.5 Orthogonality against constant strain modes

In general, n-th point Gauss integration gives exact solution up to (2n-1)th order polynomials, therefore one point Gauss integral is exact for linear displacement field. Linear displacement field is expressed as

$$u = u_c + \frac{\partial u_c}{\partial x} (x - x_c), \qquad v = v_c + \frac{\partial v_c}{\partial y} (y - y_c)$$
(2.32)

or when focusing on nodal displacement, it is written as

$$\left\{u_{n}\right\} = \left\{s\right\}u_{c} + \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\left(\left\{x_{n}\right\} - \left\{s\right\}x_{c}\right)$$
(2.33)

$$\{v_n\} = \{s\}v_c + \frac{\partial v_c}{\partial y}(\{y_n\} - \{s\}y_c)$$
(2.34)

The relation is rewritten for x-displacement in detail as

$$q_{x} = \{\gamma\}\{u_{n}\} = \underline{\{h\}}^{T}\{s\} u_{c} + \frac{\partial u_{c}}{\partial x}(\{h\}^{T}\{x_{n}\} - \underline{\{h\}}^{T}\{s\} x_{c}) - \frac{1}{A}\left(\underline{\{b_{x}\}}^{T}\{x_{n}\}^{T}\{h\}\{s\} + \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\left(\underline{\{b_{x}\}}^{T}\{x_{n}\}^{T}\{h\}\{x_{n}\} - \underline{\{b_{x}\}}^{T}\{x_{n}\}^{T}\{h\}\{s\}x_{c}\right)\right) - \frac{1}{A}\left(\underline{\{b_{y}\}}^{T}\{y_{n}\}^{T}\{h\}\{s\} + \frac{\partial u_{c}}{\partial y}\left(\underline{\{b_{y}\}}^{T}\{y_{n}\}^{T}\{h\}\{x_{n}\} - \underline{\{b_{y}\}}^{T}\{y_{n}\}^{T}\{h\}\{s\}x_{c}\right)\right) = \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\{h\}^{T}\{x_{n}\} - \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\{x_{n}\}^{T}\{h\} = 0$$
(2.35)

Here it is noted that the terms with underline are 0 because either the inner product of the interior vectors is zero or inner product of interior vectors is a scalar and inner product of exterior vectors is zero. In the same manner, the terms with double underlines becomes A. Moreover, the product  $\{h\}^{T}\{x_n\}$  is a scalar and is equal to  $\{x_n\}^{T}\{h\}$ . Therefore the orthogonality is proved.

In the same manner it can be proved that  $q_y=0$ . As the result, orthogonality of hourglass base vector  $\{\gamma\}$  against constant strain mode is proved.

## 2.6 Anti-hourglass mode deformation matrix

Generalized stress corresponding to the generalized strain in the previous section is defined as

 $Q_x = c_x q_x$   $Q_y = c_y q_y$  (2.36) where  $c_x$  and  $c_y$  are coefficients. Let's denote equivalent nodal force due to hourglass deformation as  $\{f^H\}$ , then virtual work equation for anti-hourglass mode deformation is written as

$$\{\delta u_n\}^1 \{f^H\} = \delta q_x Q_x + \delta q_y Q_y = \{\delta u_n\}^1 \{\gamma\} c_x \{\gamma\}^1 \{u_n\} + \{\delta v_n\}^1 \{\gamma\} c_y \{\gamma\}^1 \{v_n\}$$
(2.37)

In other word, element stiffness matrix against hourglass deformation mode, or anti-hourglass mode deformation matrix, is written as

$$\left\{f^{H}\right\} = \left[K^{H}\right] \left\{\begin{matrix} u_{n} \\ v_{n} \end{matrix}\right\} = \left[\begin{matrix} c_{x}\left\{\gamma\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\gamma\right\} & 0 \\ 0 & c_{y}\left\{\gamma\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\gamma\right\} \end{matrix}\right] \left\{\begin{matrix} u_{n} \\ v_{n} \end{matrix}\right\}$$
(2.38)

It is also obvious that the relation between the generalized stress and equivalent nodal force is written as

$$\left\{f_{x}^{H}\right\} = \left\{\gamma\right\} \mathcal{Q}_{x}, \qquad \left\{f_{y}^{H}\right\} = \left\{\gamma\right\} \mathcal{Q}_{y}$$

$$(2.39)$$

# 2.7 Coefficient of anti-hourglass mode deformation matrix

Since arbitrary value seems be used for the coefficient of anti-hourglass mode deformation matrix,  $c_x$  and  $c_y$ , because it does not affect the other FEM formulation. In the early papers dealing with anti-hourglass mode deformation matrix actually describes like this. However, it cannot be a arbitrary value because it affect the result of the analysis. In other words, resultant displacement depends on the stiffness of anti-hourglass mode deformation matrix as well as stiffness matrix. Therefore the coefficient must be evaluated as precise as possible. Unfortunately, there is no perfect method to determine them, which indicates result of analysis is different if we use different mesh division. This is, however, not the problem of the anti-hourglass mode deformation, but all FE formulations have.



Figure 2.3 Basic rectangulae element

Firstly, we consider a rectangular element shown in Figure 2.3. Since  $\{h\}^T\{x_n\}=\{h\}^T\{y_n\}=0$  for rectangular element,  $\{\gamma\}=\{h\}$ . Under the nodal displacement  $\{u_n\}$  correspond to hourglass mode deformation, we obtain

$$q = \{\gamma\}^{\mathrm{T}}\{h\} = \{1 -1 \ 1 -1\} \begin{cases} 1\\ -1\\ 1\\ -1 \\ 1\\ -1 \end{cases} \delta = 4\delta$$
(2.40)

On the other hand, virtual work equation is written as

$$\{u_n\}\{f^H\} = Q_x q_x$$
(2.41)
  
are  $\{f^H\}$  denotes equivalent nodal force. It is written in the different form as

where  $\{f''\}$  denotes equivalent nodal force. It is written in the different form as

Therefore, f=Q, which is also drawn in Figure 2.3.

Looking at the hourglass deformation of rectangular element, it is recognized that the problem is similar to the pure bending problem of a beam. Therefore, here we determine the value of coefficient from the moment-curvature relationships. In other words, the value of c is computed so that Equation (2.43) holds

$$M = EI\kappa \tag{2.43}$$

The following equations hold for bending deformation.

$$M = Q \cdot 2b \tag{2.44}$$

$$I = \frac{1}{12} (2b)^3 = \frac{2}{3} b^3$$
(2.45)  
 $S = ibc$ 
(2.46)

$$\delta = \kappa ba \tag{2.46}$$

Substituting these relation into moment-curvature relationships, we obtain

$$Q = \frac{bE}{3a}\delta = \frac{bE}{3a}q \qquad \text{or} \qquad c = \frac{bE}{12a}$$
(2.47)

where E is a Young's modulus under plane stress problem, and is  $4\mu(3 + \mu) = 4\mu(3P + \mu)$ 

$$E = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \frac{4\mu(3B + \mu)}{3B + 4\mu}$$
(2.48)

under plane strain problem, where  $\lambda$  and  $\mu$  denotes Lame's constant, and B denotes bulk modulus.

Next, we consider an ordinary quadrilateral element. If the parameter a and b can be computed, we can compute coefficient from Equation (2.47). We define them as an average like value for ordinary quadrilateral element.

The following relation holds in the rectangular element.

$$\{b_x\} = \{-b \ b \ b \ -b\}^{\mathrm{T}}$$

$$\{b_y\} = \{-a \ a \ a \ -a\}^{\mathrm{T}}$$

$$(2.49)$$

$$(2.50)$$

Therefore,

$$\{b_x\}^{\mathrm{T}}\{b_x\} = (2b)^2 \tag{2.51}$$

$$\{b_{y}\}^{\mathrm{T}}\{b_{y}\} = (2a)^{2}$$
(2.52)

$$\left\{b_{y}\right\}^{\mathrm{T}}\left\{b_{x}\right\} = \left\{b_{x}\right\}^{\mathrm{T}}\left\{b_{y}\right\} = 0$$
(2.53)  
This relation is directly used, i.e.,

$$c_{x} = \frac{bE}{12a} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\{b_{x}\}^{T}\{b_{x}\}}{\{b_{y}\}^{T}\{b_{y}\}}}$$

$$c_{y} = \frac{aE}{12b} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\{b_{y}\}^{T}\{b_{y}\}}{\{b_{x}\}^{T}\{b_{x}\}}}$$
(2.54)
(2.55)

In case of inhomogenious material, we can use different modulus in each direction. It is noted that since there is no volume change under hourglass deformation mode, we need not consider the existence of water. As shown in the previous chapter, we separate the behavior of soil skeleton and water in the formulation even under the undrained condition, therefore the behavior of water need not be considered, but if one use Equation (1.46) for the solution of undrained condition, the coefficient is computed using the apparent bulk modulus.

## 2.8 Trigonometric element



Figure 2.4 Example for considering trigonometric element

First, we consider the element shown in Figure 2.4. From Equations (2.9) and (2.10),

$$\{b_x\}^{\mathrm{T}} = \frac{\{-2b \ 2b \ 2b \ -2b\}^{\mathrm{T}}}{2}$$
(2.56)

$$\{b_{y}\}^{\mathrm{T}} = \frac{\{-2a - \alpha \ 2a \ \alpha\}^{\mathrm{T}}}{2}$$
(2.57)

Therefore

$$c_{x} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{4b^{2}}{(\alpha^{2} + 4a^{2})}}$$
(2.58)

Then, when  $\alpha = 0$ 

$$c_x = \frac{E}{12}\sqrt{\frac{2b}{a}} \tag{2.59}$$

This equation seems to point out that trigonometric element also has rigidity against hourglass mode deformation, which is curious because the stress state at the center of element is sufficient to represent equivalent nodal force. The following investigation, however, shows that this feeling is not correct.

Let consider an trigonometric element such that  $y_3=y_4$  and  $x_3=x_4$ , then following equations are obtained from the simple calculation.

$$\{h\}^{T} \{x_{n}\} = x_{1} - x_{2}$$

$$\{h\}^{T} \{y_{n}\} = y_{1} - y_{2}$$

$$(2.60)$$

$$(2.61)$$

Therefore shape function is expressed as

$$\{\gamma\} = \begin{cases} 1\\ -1\\ 1\\ -1\\ -1 \end{cases} - \frac{1}{2A} \left( (x_1 - x_2) \begin{cases} y_2 - y_3\\ y_3 - y_1\\ y_3 - y_2\\ y_1 - y_3 \end{cases} + (y_1 - y_2) \begin{cases} x_2 - x_3\\ x_3 - x_1\\ x_3 - x_2\\ x_1 - x_3 \end{cases} \right)$$
(2.62)

Here, considering that

$$2A = x_1 y_2 - x_1 y_3 + x_2 y_3 + y_1 x_3 - y_1 x_2 - y_2 x_3$$
(2.63)

we obtain

$$\left\{\gamma\right\} = \begin{cases} 0\\0\\0\\0\\0 \end{cases}$$
(2.64)

This equation indicate that generalized strain does not produced against hourglass mode deformation.

On the process that the shape of an element moves from quadrilateral to trigonometric, as shown in Figure 2.4, the change of the value of the value  $c_x$  and  $c_y$  is not large. However, at the same time, equivalent nodal force causing the hourglass mode deformation tends to zero, which indicates that hourglass mode deformation has no effect on the overall behavior. It is noted that, in natural, hourglass deformation does not occur at the trigonometric element.

## References

Flanagan, D.P. and Belytschko, T.A. 1981. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. J. Num. Methods in Engn. Vol.17, pp.679-706

Yoshida, N. 1989. Large deformation analysis of liquefaction-inuced large ground displacement

by reduced integral method, Proc. 3rd symp. on Comp. Mechanics, Japan Union for Scientists and Engineers, pp.391-396

## **3** Various element and constitutive model

## 3.1 Constitutive models for one-dimensional analysis

Among the various nonlinear constitutive models employed in STADAS, some models can be used into several element, which is described in this section. They deal with the relation between one generalized stress and one generalized strain, therefore classified to be constitutive models for one-dimensional analysis. They are used for a spring element, beam element, rotational spring element, SH-wave element, and joint element. They are also used some of the solid elements. In the followings, shear stress  $\tau$  and shear strain  $\gamma$  are usually used to represent generalized stress and generalized strain to describe the model.

Constitutive models described this section have in а characteristics schematically shown in Figure 3.1.1. They are composed of two types of curve (or set of piecewise linear line), namely skeleton curve and hysteresis curve. Skeleton curve is a (generalized) stress versus (generalized) strain relationships at virgin loading, and hysteresis curve corresponds to the one after unloading or reloading.



Figure 3.1.1 Skeleton curve and hysteresis curve

Masing's rule is usually employed to make hysteresis curve from skeleton curve. This rule is described that if skeleton curve is expressed as

$$\tau = f(\gamma) \tag{3.1.1}$$

then, hysteresis curve unloaded or reloaded from the state  $(\gamma_R, \tau_R)$  is expressed as

$$\frac{\tau - \tau_R}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_R}{2}\right) \tag{3.1.2}$$

In addition to this rule, the other rule is usually included in the Masing's rule. It is described that, if strain exceeds past unloaded or reloaded strain, the state point moves previous hysteresis curve or skeleton curve. Masing's rule in this manual also include these two rules. Practical explanation of this model is described in section 5.14 of Part I.

Constitutive models for one dimensional analysis employed in STADAS is classified into three

groups:

- 1) Mathematical equation is used for the expression of skeleton curve and Masing's rule is employed to make hysteresis curve.
- 2) Both skeleton curve and hysteresis curve are determined based on the strain dependent characteristics of shear modulus and damping ratio specified by the table.
- 3) piecewise linear model

Fundamental equations are introduced for these models.

## **3.1.1 Mathematical models**

Two mathematical models are available in STADAS, hyperbolic model and Ramberg osgood model<sup>4</sup>. Hyperbolic model is sometimes called Hardin-Drnevich model in Japan. Skeleton curves of these models are expressed as

$$\delta = \frac{P}{K} \left( 1 + \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^{r-1} \right)$$
 Ramberg-Osgood model (3.1.3)  
$$P = \frac{K \delta}{1 + \frac{\delta}{\delta_y}}$$
 Hyperbolic model (3.1.4)

where P denotes generalized stress,  $\delta$  denotes generalized strain, K denotes initial stiffness,  $P_y$  and  $\delta_y$  denote model parameter usually used for yield (or ultimate) stress and reference strain, respectively, and  $\alpha$  and r denotes model parameters. Physical meaning of the model are shown in Figure 3.1.2.

Hysteresis curve is made by applying Masing's rule



<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Jenning, P.C.: Periodic Response of a General Yielding Structure, Proc. ASCE, Vol.80, No.EM2, 1964, pp.133-166

#### 3.1.2 Constitutive models by table

Nonlinear behavior of soil is frequently described as shear strain dependent characteristics of secant modulus  $G_{eq}$  and equivalent damping ratio h. Among the various empirical formula about them, one of the most famous one is the formula derived by Hardin and Drnevich, which is written as

$$G_{eq} = \frac{G_{\max}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}}$$

$$h = h_{\max} \left( 1 - \frac{G_{eq}}{G_{\max}} \right)$$
(3.1.6)
(3.1.7)

where damping ratio h is defined schematically shown in Figure 3.1.3.



Similar research have been made, and this equation have been proved to hold at least for first

approximation. However, it is impossible to maintain this relationships by the mathematical models or any other models which employ Masing's rule, because actual behavior does not follow Masing's rule. Yoshida and Ishihara<sup>5</sup> proposed a new rule to make hysteresis curve based on this fact, which is explained here.

They supposed that stress-strain relationship of soil is defined by shear strain dependent shear modulus and damping characteristics. The fundamental rule to make stress-strain relationships are as follows:

- When stress-strain relationships is specified for backbone curve at several strains, skeleton curve is obtained by connecting them by, for example, piecewise linear line or spline curve, with reasonable accuracy at the desired strain range. If, of course, mathematical formulation is sufficient to explain the behavior, it can be used as well.
- 2) Hysteresis curve is obtained by applying Masing's rule. In the skeleton curve, however, is used to make hysteresis curve, damping characteristics does not satisfied. Therefore they used virtual skeleton curve to apply Masing's rule, which is determined to satisfy two conditions. The first one is that virtual curve should pass the unloaded point, which condition is necessary for hysteresis curve to be symmetric. Therefore it may not be necessary when hysteresis curve need not be symmetric. The second rule is that damping ratio obtained from the hysteresis curve is to be such that they agree with the specified strain dependent damping characteristics. Since there is two conditions, mathematical model which has more than two parameters

As shown, proposed concept includes wide content. Considering the practical use, we employ three types of models in the program.

- 1) Hyperbolic model is used for skeleton curve so as to satisfy Equation (3.1.6). Hysteresis curve is determined so as to satisfy Equation (3.1.7), which correspond to the model by Hardin and Drnevich.
- 2) Both skeleton curve and hysteresis curve is specified by table.

As described, mathematical models which have two parameters can be used for virtual skeleton curve. Hyperbolic equation is employed in the program. The value of the parameters,  $\overline{G}$  and  $\overline{\tau}$  is determined by solving the simultaneous equation

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Ishihara,K., Yoshida,N. and Tsujino,S.: Modeling of Stress-strain Relations of Soils in Cyclic Loading, Proc. 5th International Conference for Numerical Method in Geomechanics, Nagoya, 1985, pp.373-380

Yoshida, N., Tsujino, S., and Ishihara, K.: Modeling of stress-strain relation for the one dimensional analysis of ground, Abstract, Annual meeting of Architectural Institute of Japan, 1990, pp.1397-1398

$$\tau = \frac{\overline{G} \gamma}{1 + \overline{G} \gamma / \overline{\tau}}$$

$$h = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2(1 + \gamma_r)}{\gamma_r^2} (\gamma_r - \ln(\gamma_r + 1) - 1) \right]$$

$$\gamma_r = \overline{\tau} / \overline{G}$$

where  $\tau$  and  $\gamma$  denote stress and strain at unloading or reloading point.

## 3.1.3 piecewise linear models

Totally eleven models are available in STADAS as piecewise linear models.

## (1) Tri-linear elastic model

Skeleton curve is expressed as tri-linear model and there is no hysteresis, or state point moves forth and back on the skeleton curve.



### (2) Bi-linear model

Skeleton curve is expressed by bi-linear model and follows Masing's rule.

## (3) Tri-linear model

Skeleton curve is expressed by tri-linear model and follows Masing's rule.



#### (4) Bi-linear slip model

Skeleton curve is expressed by bi-linear model in the positive side, and slip occurs so that modulus does not exceed second gradient.

### (5) Tri-linear slip model

Skeleton curve is expressed by tri-linear model in positive side, and there is no load carrying capacity against negative load. Modulus at unloading is equal to initial stiffness.



### (6) Origin-orientated model

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from skeleton curve, state point moves towards the origin.
- iii) When unloaded at hysteresis curve, the state point go back to the same line.
- iv) After crossing the skeleton curve, the state point moves on the skeleton curve.

## (7) Origin-to-peak orientated model

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from the skeleton curve, the state point moves on the line towards the origin, and, after passing the origin, it moves towards the previous peak strain point.
- iii) When unloaded at hysteresis curve, the state point go back to the same line.
- iv) After crossing the skeleton curve, the state point moves on the skeleton curve.



### (8) Peak-to-peak orientated model

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from the skeleton curve, the state point moves towards the previous peak strain point.
- iii) When unloaded at hysteresis curve, the state point go back to the same line.
- iv) After crossing the skeleton curve, the state point moves on the skeleton curve.

## (9) Degrading tri-linear by Fukada<sup>6</sup>

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) It behaves the same as bi-linear model until peak displacement is smaller than  $\delta_{y}$ .
- iii) When unloaded from the skeleton curve after peak strain in either positive side or negative side exceeds  $\delta_{v}$ , the gradient of the hysteresis line decrease by the factor  $\alpha$ , where

$$\alpha = \frac{P_1 - P_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\delta_y}{P_y}$$

<sup>6</sup> Fukada, Y., A study on the restoring force characteristics of reinforced buildings, Part 1, Degrading stiffness tri-linear model and response analysis, Report of the 40th 1969, pp.57-62  $P_{1} = \max(P_{max}, P_{y})$   $P_{2} = \min(P_{min}, P_{y})$   $\delta_{1} = \max(\delta_{max}, \delta_{y})$   $\delta_{2} = \min(\delta_{min}, -\delta_{y})$ 

When the change of stress from the unloaded stress exceeds  $2P_c$ , state point changes the direction towards the peak strain reversal point.

iv) When unloaded from the hysteresis line, it behaves as bi-linear model until it passes previous unloaded point or reaches to skeleton line.



### (10) Degrading tri-linear by Nomura<sup>7</sup>

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from the second line of skeleton curve, the gradient of hysteresis line is equal to initial stiffness. After passing the P=0 axis, it changes the direction towards peak strain reversal point (or first kink if strain at first kink is larger than peak strain reversal strain).
- iii) After passing the second kink of the skeleton line, stiffness degrading ratio  $\alpha$  changes to

$$\alpha_{+} = \left(\frac{\delta_{y}}{\delta_{\max}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{-} = \left(\frac{\delta_{y}}{-\delta_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

and other rule is same as above.

iv) When unloaded from the hysteresis curve, modulus is the same with previous unloading modulus and the other rule is same as above.

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Nomura, T. and Sato, K., Modeling of restoring force characteristics of RC buildings and its effect on earthquake response (Part 1), Abstract, Annual meeting of AIJ, 1971, pp.1273-1274

#### (11) Degrading tri-linear model by Muto<sup>8</sup>

Hysteresis rules are as follows:

i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.

- ii) Before the unload from  $\delta_{y}$ , rule is the same with origin-orientated model.
- iii) After passing the second kink, modulus at unloading degrade to

$$\alpha = \frac{P_y}{\delta_y} / \frac{P_c}{\delta_c}$$

The other rule is same with degrading tri-linear model by Nomura.



## 3.2 Spring

Since constitutive models for spring element is described in the previous section, only property of element is described.

### **3.2.1 Positive direction of spring element**

Sprint element is an element generating a force if relative displacement (or velocity) occurred between nodes. When the coordinate of the elements are different, the relative movement can be separated into axial displacement and displacement perpendicular to axis (shear deformation). By defining suitable direction cosine, these behavior can be described in the same manner. Here direction cosine means the orthogonal projection of the unit positive relative displacement into each coordinate direction.

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> Muto,K., Design against dynamic loading, Earthquake resistant design series/ Applications, Maruzen, 1972, pp.173-174

Direction cosine vector  $\{\ell_x \ \ell_y\}^T$  for two dimensional analysis is defined, referring Figure 3.2.1, as

 $\begin{cases} \boldsymbol{\ell}_{x} & \boldsymbol{\ell}_{y} \end{cases}^{\mathrm{T}} = \{\cos\theta & \sin\theta\}^{\mathrm{T}} \text{ for axial displacement} \\ \left\{ \boldsymbol{\ell}_{x} & \boldsymbol{\ell}_{y} \right\}^{\mathrm{T}} = \{\sin\theta & -\cos\theta\}^{\mathrm{T}} \text{ for shear deformation} \end{cases}$ (3.2.1a) (3.2.1b)



Figure 3.2.1 Schematic figure of spring element

Rotational spring works rotation around the coordinate axis. Rotation around z-axis is used in two dimensional analysis, and that around x-, y-, and z-axis are used in three dimension analysis.

#### 3.2.2 Constitutive equation

Spring constant (or viscous coefficient) is denoted by k, then generalized force F versus generalized strain u relationship is expressed as

F=ku	(3.2.2)
------	---------

#### 3.2.3 Coordinate transformation matrix (B matrix)

Referring Figure 3.2.1, generalized strain u is obtained as

$$u = u_2 - u_1 = \{-1 \quad 1\} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$
(3.2.3)

Let's denote direction cosine vector as  $\{T\}$ ,

	{1}	one dimensional	
$\{T\} = \{$	$\{\boldsymbol{\ell}_x \ \boldsymbol{\ell}_y\}$	two dimensional	(3.2.4)
	$\left\{ \boldsymbol{\ell}_{x}  \boldsymbol{\ell}_{y}  \boldsymbol{\ell}_{z} \right\}$	three dimensional	

Then nodal displacement is expressed in the 3-dimensional case, for example, as
$$u_{1} = \{T\} \{u_{1}\} = \{T\} \begin{cases} u_{x1} \\ u_{y1} \\ u_{z1} \end{cases}, \qquad u_{2} = \{T\} \{u_{2}\} = \{T\} \begin{cases} u_{x2} \\ u_{y2} \\ u_{z2} \end{cases}$$
(3.2.5)

Equation (3.2.5) is rewritten as

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} = [T] \{ u^n \} = \begin{bmatrix} \{T\} & \{0\} \\ \{0\} & \{T\} \end{bmatrix} \{ \{u_1\} \} \\ \{u_2\} \}$$
Therefore B matrix is computed as
$$(3.2.6)$$

(3.2.7)

$$[B] = \{-1 \ 1\}[T] = \{-\{T\} \ \{T\}\}$$

## 3.2.4 Element stiffness matrix

Since  $\{T\}$  is a direction cosine vector,

$${T}{T}^{T}=1$$
 (3.2.8)

Therefore

$$\{B\}\{B\}^{T}=2$$
 (3.2.9)

On the other hand, definition of B matrix,  $\{B\}$ , it has characteristics such that

 $u = \{B\} \{u_n\}$ (3.2.10)  $\{F_n\} = \{B\}^T F$ (3.2.11)

From these equations, nodal force versus nodal displacement relationships in the global coordinate system yields

$\{F_n\} = \{B\}^T k\{B\}\{u_n\}$	(3.2.12)
It indicate that element stiffness matrix $[k]$ is expressed as	
$[k] = \{B\}^{\mathrm{T}} k\{B\}$	(3.2.13)

# 3.3 Beam

## **3.1.1 Introduction**

Beam element is formulated based on the small deformation theory and

i) Cross-sectional shape does not change.

ii) Plane section holds plane after deformation.

iii) There is no intermediate load.

Relationships between quantities in global coordinate and local coordinate are expressed as  $\{F\} = [T] \{F_g\}$ (3.3.1)

$$\{u\} = [T]\{u_n\}$$
(3.3.2)

$$\begin{bmatrix} K_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \end{bmatrix}$$
(3.3.3)

where  $\{F_g\}$ ,  $\{u_n\}$ , and  $[K_g]$  are nodal force, displacement and stiffness matrix in global coordinate, respectively,  $\{F\}$ ,  $\{u\}$ , and [K] are those in local coordinate system, and [T] denotes coordinate transformation matrix.



Figure 3.3.1 Local and global coordinate in two dimensional analysis

## 3.3.2 2-dimensional analysis

Referring to Figure 3.3.1, various quantities are expressed in the two dimensional analysis as (N, )  $(\mu, )$  (F, ) (x, )

$$\{F\} = \begin{cases} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{cases}, \quad \{u\} = \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{cases}, \quad \{F_s\} = \begin{cases} F_{s1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{s2} \\ F_{s2} \\ M_2 \end{cases}, \quad \{u\} = \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{cases}$$

$$(3.3.4)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_e] & [0] \\ [0] & [T_e] \end{bmatrix}, \quad [T_e] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3.3.5)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix}$$

(3.3.6)

where

N: Axial force (positive when tension)

Q: Shear force

M: Bending moment

E: Young's modulus

G: Shear modulus

A: Cross-sectional area

A<sub>s</sub>: Effective area against shear deformation

*I*: Second moment of inertia

$$\phi = \frac{12EI}{GA_s\ell^2}$$

*u*: axial elongation

v: displacement perpendicular to longitudinal axis

 $\varphi$ : Rotation

# 3.3.3 Three dimensional analysis

For the simplicity of expression, we focus on one node only, then various quantities are expressed as

$$\{F\} = \begin{cases} \begin{bmatrix} N \\ Q_{21} \\ T \\ M_{21} \\ M_{22} \end{bmatrix}, \quad \{F\} = \begin{cases} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \\ [T] = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix} \quad [T_1] = \text{full matrix} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & -\frac{12EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} \\ \frac{12EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & -\frac{\frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)}}{0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{12EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 \\ \frac{12EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 & \frac{(4+\phi_r)EI_r}{\ell'(1+\phi_r)} & 0 \\ \frac{(4$$

In addition to the conversion based on direction cosine, conversion based on  $\beta$  angle, which is the angle between principal axis of local y-axis to the global y-axis, is necessary, which is not discussed here.

### 3.3.4 Nonlinear behavior

Treatment of nonlinear behavior for beam-column element is not so simple as other types of element. One of the predominant reason is that the state such as stress and strain is represented by the state at several point (one point, at the center of the element in STADAS) for the other element, which is difficult for beam element. It comes from the difference of the concept of modeling the element. Usually, mesh division in FEM is chosen so that the behavior of element can be described with sufficient accuracy by behaviors at several point (usually points to conduct Gauss-Legandre integral) in the ordinary element. On the other hand, one beam or column is usually modeled into one element in the case of beam element. Of course, they can be modeled into smaller elements, in which case number of element increases very much and is not practical when necessary.

If there is no load within the beam, yielding of the beam begins at the end of the beam and extended into the center under virgin loading. The yielding area changed in a complicated manner under repeated loading, and may cause buckling and associated nonlinear behavior.

Plastic hinge method is one of the solution to treat this problem. Plastic behavior by bending or combination of bending and axial force is concentrate at several point, usually at the ends and possible at the center of the beam. Both simple plastic hinge and plastic hinge considering flow rule are proposed, in which the latter hinge hardly employed in the general purpose computer code even for especially designed to treat bars. They are usually based on the perfect plastic theory, which is not practical. FEM formulation based on these theory is proposed, but because of the above reason, resultant behavior is not realistic unless we conduct fairly complicated formulation. In addition, they are described based on the moment-hinge rotation angle, which is not convenient to use in practical problem.

STADAS considers nonlinear behavior a more simple method. Firstly, nonlinear behavior due to axial load is not considered. This comes from the fact that axial rigidity of a beam-column is usually much larger than the bending rigidity for the bar which resist against external load by axial rigidity such as a brace or a truss bar, therefore it can be modeled by a spring element. If nonlinear behavior due to buckling, for example, is required, it is possible to give such kind of characteristics

Secondly, interactive behavior between bending and shear is not considered. Because we do not consider nonlinear behavior against axial deformation, interaction with axial behavior is not considered, too. In other words, nonlinear behavior is considered separately for bending and shear, and axial deformations. In the practical purpose, interaction between axial and bending can be considered by puting smaller (or larger) yield moment considering the effect of axial load in input.

By this separation, the treatment on shear deformation becomes simple, because shear deformation can be represented as one state as shear stress is constant within an element.

When there is no intermediate load, bending moment takes peak values at both end, therefore we focus on only the end of the beam. Namely, average of the rigidity at two ends is used to build element stiffness matrix. There still remains a problem to be solved under this simplification, which is the computation of generalized strain,  $\gamma$  and  $\kappa$  Among them, shear strain  $\gamma$  is computed as a average value by dividing relative displacement in tangential direction by the length. On the other hand, we should focus on finite length to compute curvature, which length depends on the situation, or should concentrate deformation at the end, in which case we should deal with hinge rotation angle. To solve this difficulty, we use the technique to focus on tangential modulus. The procedure is as follows:

- 1) In Figure 3.3.2, let's  $Q_1$  and  $\gamma_1$  are state point at the beginning of the increment, and are known quantities. Tangent modulus at this point is also known.
- 2) Incrementally elastic calculation gives nodal displacement increment. By using the tangent modulus matrix used in the incremental analysis, we can compute generalized force at the end (shear force, bending moment) at local coordinate system, which is denoted as  $Q_3$ , therefore  $Q_3 \cdot Q_1$  is generalized force increment.
- 3) Generalized strain increment is computed based on generalized stress increment, which is  $\gamma_2$ ,  $\gamma_1$  in Figure 3.3.2. Then total generalized strain  $\gamma_2$  is computed.
- 4) Actual generalizes stress and tangent modulus is computed based on generalized strain  $\gamma_2$ . Here, if strain reversal occurred, initial modulus is to be used instead of tangent modulus in the calculation of ii).



Figure 3.3.2 Model to use nonlinear behavior

Constitutive models is shown in Section 3.1.

## 3.4 Dashpot

Dashpot used in STADAS is a Lysmer type dashpot. This element is frequently used to consider elastic base and lateral energy transmitting boundary, as described in chapter 1. The characteristics that dashpot absorbs energy of wave moving from the region in consideration to the infinite outside region well, is found by Lysmer et al, which correspond to the use as lateral boundary. The extensive use of this dashpot into elastic base is suggested by Joyner.

The use of dashpot along lateral boundary is sometimes mistaken. The property, i.e. viscous coefficient, is determined such that it is  $\rho V_s$  when acting to the relative velocity parallel to the boundary, and is  $\rho V_p$  when acting to the one perpendicular to the boundary. Therefore, viscous coefficients are computed as shown in the right figure.



Viscous coefficient of dashpot, when used for this purpose, depends on the stiffness of the material outside the analyzed region, which may change during the analysis because of the nonlinear characteristics. STADAS prepare two kind of treatment of viscous coefficient beside constant property. The first one is to read viscous coefficient through input data, which can be used when free field response is computed separately. The second one is that it is compute based on the stiffness of prescribed elements, which is used when free field response is computed simultaneously.

- 1) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.95, No.EM4, 1969, pp.859-877
- Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.65, No.5, pp.1337-1357, October 1975

## **3.5 Solid element**

Finite Element formulation of solid element is already described in chapter 1, therefore only constitutive equation is described.

# **3.5.1 Elastic matrix**

Although elastic matrix is described in this subsection, it relates all the constitutive models because all the model uses elastic matrix in it.

Let's denote shear modulus G and bulk modulus B, then stress-strain relationships is expressed as follows:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{3.5.1.1}$$

where  $\sigma$  and  $\varepsilon$  are stress and strain, respectively, and [D] denotes elastic matrix. The arguments of these quantities depends on the method of analysis and constitutive models. Here, compression is taken positive for stress and strains, as described in chapter 1.

## (1) Three dimensional analysis

Three dimensional analysis is the most general formulation, in which various quantities is expressed as follows:

{ <b>σ</b> }'	$= \{\sigma_x \mid \sigma_y\}$	$\sigma_z = \tau_{xy}$	$ au_{yz}  au_{zz}$	, }			(3.	.5.1.2)
$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^{T}$ =	$= \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{x}  \boldsymbol{\varepsilon}_{y} \right\}$	$\varepsilon_z \gamma_{xy}$	$\gamma_{yz}$ $\gamma_{zx}$	}			(3.	.5.1.3)
	$\left[B + \frac{4}{3}G\right]$	$B-\frac{2}{3}G$	$B-\frac{2}{3}G$	0	0	0		
	$B-\frac{2}{3}G$	$B + \frac{4}{3}G$	$B-\frac{2}{3}G$	0	0	0		
[D] =	$B-\frac{2}{3}G$	$B-\frac{2}{3}G$	$B + \frac{4}{2}G$	0	0	0	(3.	5.1.4)
	0	0	0	G	0	0		
	0	0	0	0	G	0		
	0	0	0	0	0	G		

#### (2) Plane strain analysis

The relations  $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$  hold under plane strain condition. Substituting these relations into Equation (3.5.1.1), we obtain

$$\{\sigma\}^{T} = \{\sigma_{x} \quad \sigma_{y} \quad \tau_{xy} \quad \sigma_{z}\}$$

$$\{\varepsilon\}^{T} = \{\varepsilon \quad \varepsilon \quad y\}$$

$$(3.5.1.5)$$

$$(3.5.1.6)$$

$$[D] = \begin{bmatrix} B + \frac{4}{3}G & B - \frac{2}{3}G & 0\\ B - \frac{2}{3}G & B + \frac{4}{3}G & 0\\ 0 & 0 & G\\ B - \frac{2}{3}G & B - \frac{2}{3}G & 0 \end{bmatrix}$$
(3.5.1.7)

As shown in the equations,  $\sigma_2$  is not 0 in the plane strain analysis. Although it is necessary in the constitutive models, it usually does not important for the user, therefore it is not output as the result. Elastic constitutive model uses this formulation.

## (3) Two dimensional analysis

The formulation in the plane strain analysis is a particular use of generalized three dimensional model into two dimensional model. However, another form shown hereafter is frequently used in the two dimensional analysis.

$$\{\sigma\}^{T} = \{\sigma_{x} \quad \sigma_{y} \quad \tau_{xy}\}$$

$$\{\varepsilon\}^{T} = \{\varepsilon_{x} \quad \varepsilon_{y} \quad \gamma_{xy}\}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} B+G \quad B-G \quad 0\\ B-G \quad B+G \quad 0\\ 0 \quad 0 \quad G \end{bmatrix}$$

$$(3.5.10)$$

Some of the constitutive models uses this formulation. The effective confining pressure is computed as  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  in this formulation.

## 3.5.2 Tobita-Yoshida model

This model is a constitutive model of sand.

## 3.5.2.1 Definition of fundamental quantities

Tenser formulation is used in this section, in which tension is taken positive as ordinary expressions are so. Fundamental quantities are as follows:

Stress	$\sigma_{ij}$	Positive when tension	(3.5.2.1)
Strain	$oldsymbol{arepsilon}_{ij}$	Tenser strain	(3.5.2.2)
		II-65	

Hydrostatic pressure	$p = -\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma)$	Positive when compression	(3.5.2.3)
Volumetric strain	$\varepsilon_{v} = -\mathrm{tr}(\varepsilon)$	Positive when compression	(3.5.2.4)
Deviatric stress	$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) \delta$	$\delta_{ij} = \sigma_{ij} + p  \delta_{ij}$	(3.5.2.5)
Deviatric strain	$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\varepsilon) \delta_{ij}$	$\epsilon_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_v \delta_{ij}$	(3.5.2.6)
Equivalent stress	$\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$		(3.5.2.7)
Equivalent strain	$\varepsilon_{e} = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}e_{ij}}$		(3.5.2.8)

### 3.5.2.2 Behavior under monotonic loading

### (1) yield condition

Effect of intermediate principal stress is neglected, therefore yield condition is written as

$$f = \sigma_c - \alpha_M p = 0 \tag{3.5.2.9}$$
  
where  
$$\alpha_M = \frac{\sigma_e}{p} \tag{3.5.2.10}$$

### (2) Flow rule for deviatric component

We treat the shear deformation and volumetric deformation separately. Plastic deviatric strain increment  $de_{ij}^{p}$  has the same direction with the normal to yield surface,

$$de^{p}_{ij} = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*}$$
(3.5.2.11)

where superscript \* indicate deviatric component, i.e.,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}\right\}$$
(3.5.2.12)

Differentiating Equations (3.5.2.1) and (3.5.2.3) with respect to  $\sigma_{ij}$ , and using the relation in Equation (3.5.2.5), we obtain

$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij}, \qquad \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ij}$$
(3.5.2.13)

Therefore, differential of f becomes as follows:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij} - \alpha_M \frac{1}{3} \delta i j$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^* = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij} \tag{3.5.2.15}$$

Here, all these value becomes  $\sqrt{3/2}$  when  $\sigma_e=0$ .

Simplified notations, shown below, are used in the followings,

$$N_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}$$

$$N_{ij}^{*} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*}$$

$$N_{ij}^{p} = \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_{ij} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}$$

$$N_{ij}^{s} = \left(\frac{\partial \sigma_{e}}{\partial \sigma}\right)_{ij} = \frac{2}{3\sigma_{e}}s_{ij}$$

Using them, Equations (3.5.2.14) and (3.5.2.15) are rewritten as

$$N_{ij} = N_{ij}^{s} - \alpha_{M} N_{ij}^{p}$$

$$N_{ij}^{*} = N_{ij}^{s}$$
(3.5.2.17)

#### (3) Formulation of dilatancy

A generalized stress-dilatancy relationship, or energy dissipation equation is used, which is written as

$$s_{ij}de^p_{ij} - pd\varepsilon^p_{\nu} = pMd\xi \tag{3.5.2.18}$$

where M is a constant depending on material, and  $\xi$  is a generalized strain corresponding to equivalent stress  $\sigma_e$  and is expressed as

$$s_{ij}de_{ij}^{p} = \sigma_{c}d\xi$$

Squared this equation and using the relation in Equation (3.5.2.7), we obtain

$$d\xi = \sqrt{\frac{2}{3}} de_{ij}^p de_{ij}^p$$

Substituting Equations (3.5.2.11) and (3.5.2.16),

$$d\xi = d\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$

The difference between equivalent strain and  $\xi$  are that 1)  $\xi$  is a plastic strain component, 2) it is cumulated. Using the relation in (3.5.2.19), Equation (3.5.2.18) is rewritten in the final form as

$$d\varepsilon_{v}^{p} = \tan v \cdot d\lambda$$
(3.5.2.20)  

$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^{*} N_{ij}^{*}$$
(3.5.2.21)  

$$m_{v} = \frac{s_{ij}}{s_{ij}}$$
(3.5.2.22)

$$\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p} \tag{3.5.2.22}$$

#### (4) Hardening rule

Yield surface is a function of stress  $\sigma_{ij}$  and parameter  $\alpha_M$ , where  $\alpha_M$  is a function with respect to generalized strain  $\xi$ . Therefore, condition to keep yielding, df = 0, is written in the form

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \, d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_M} \, \frac{\partial \alpha_M}{\partial \xi} \, d\xi = 0 \tag{3.5.2.23}$$

Substituting the relation  $\partial f / \partial \alpha_M = -p$  and using Equation (3.5.2.19), we obtain

$$d\lambda = \frac{1}{H_p} N_{ij} d\sigma_{ij}$$
(3.5.2.24)

$$H_{p} = p \frac{\partial \alpha_{M}}{\partial \xi} \sqrt{\frac{2}{3} N^{*}_{ij} N^{*}_{ij}}$$
(3.5.2.25)

Next, we use hyperbolic function for  $\alpha_{M}$  as a function of generalized strain  $\xi$ , such that

$$\alpha_{M} = \frac{\zeta}{A + \zeta / B} \tag{3.5.2.26}$$

Deferential of Equation (3.5.2.26) becomes

$$\frac{\partial \alpha_{_{M}}}{\partial \xi} = \frac{A}{\left(A + \xi / B\right)^{2}} \tag{3.5.2.27}$$

#### (5) Tangent modulus

Substituting Equation (3.5.2.24) into Equations (3.5.2.11) and (3.5.2.20), and using the relation in Equation (3.5.2.16), we can compute plastic deviatric strain increment and plastic volumetric strain increment as

$$de^{p}_{ij} = \frac{1}{H_{p}} N^{*}_{ij} N_{kl} d\sigma_{kl}$$
(3.5.2.28)

$$d\varepsilon_{v} = \frac{1}{H_{p}} \tan v N_{kl} d\sigma_{kl}$$
(3.5.2.29)

Therefore plastic strain increment yields

$$d\varepsilon^{p}_{ij} = de^{p}_{ij} + \frac{1}{3}d\varepsilon_{\nu}\delta_{ij} = \frac{1}{H_{p}}P_{ij}N_{kl}d\sigma_{kl}$$
(3.5.2.30)

where

$$P_{ij} = N^*_{ij} + \frac{1}{3} \tan v \,\delta_{ij} \tag{3.5.2.31}$$

When stress increment is given, plastic strain increment is computed from Equation (3.5.2.30). Total strain is the sum of elastic strain and plastic strain, therefore

$$d\sigma_{ij} = L^{\epsilon}_{ijkl} d\varepsilon^{e}_{kl}$$

$$d\varepsilon^{e}_{ij} = C^{e}_{ijkl} d\sigma_{ij}$$
(3.5.2.32)

$$L_{ijkl}^{e} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij} \,\delta_{kl} + 2G \,\delta_{ik} \,\delta_{jl}$$

Strain increment is obtained from Equations (3.5.2.30) and (3.5.2.32), but usually inverse relation, stress in terms of strain, is required. This can be done by the following procedures.

From Equation (3.5.2.32), we obtain

$$d\sigma_{ij} = L^{e}_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon^{p}_{kl} \right)$$
(3.5.2.33)

Substituting Equation (3.5.2.30) into Equation (3.5.2.33), we obtain

$$d\sigma_{ij} = L^{\epsilon}_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{H_p} P_{kl} N_{pq} d\sigma_{pq} \right)$$
(3.5.2.34)

Multiplying  $N_{ij}$  at both side of equation and replacing dummy subscript pq of  $N_{pq}d\sigma_{pq}$  in the right-hand side by ij,

$$N_{ij}d\sigma_{ij} = \frac{H_p N_{si} L^e_{sikl} d\varepsilon_{kl}}{H_p + N_{pq} L^e_{pqmn} P_{mn}}$$
(3.5.2.35)

The following equation is obtained by substituting Equation (3.5.2.35) into right-hand side of Equation (3.5.2.34), therefore

$$d\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

$$L_{ijlk} = L^{e}_{ijkl} - \frac{L^{e}_{ijkl}P_{pq}N_{sl}L^{e}_{slkl}}{H_{p} + N_{pq}L^{e}_{pqmn}P_{mn}}$$
(3.5.2.36)

#### 3.5.2.3 Repeated loading

Treatment after unloading or reloading is quite different with the case of monotonic loading.

- 1) There is no elastic region.
- Direction of incremental deviatric strain coincide with the direction of normal direction at conjugate stress.
- 3) The value of hardening function  $H_p$  depends on distances between the stress points.

Equations to compute plastic strain increment is the same with the one for monotonic loading, Equation (3.5.2.30):

$$d\varepsilon^{P}_{ij} = \frac{1}{H_{p}} P_{ij} N_{kl} d\sigma_{kl}$$
(3.5.2.37)

Same with monotonic loading, dimensionless stress defined below in used.

$$\alpha_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}, \quad \eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}, \quad \eta_{ij}^c = \frac{s_{ij}^c}{p}$$
(3.5.2.38)

where  $s_{ij}^*$  is deviatric stress at unloaded points,  $s_{ij}$  denotes current deviatric stress, and  $s_{ij}^c$  is conjugate stress. These relation is shown in the Figure below.



Line passing the unloaded point and current stress point is expressed as

$$\boldsymbol{\ell}_{ij} = \lambda \left( \eta_{ij} - \alpha_{ij} \right) + \alpha_{ij} \quad (\lambda > 1) \tag{3.5.2.39}$$

The intersection between this line and yield surface

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}} \eta_{ij} \eta_{ij} - \alpha_M = 0$$

corresponds to conjugate stress point. At this point,

$$\lambda = \lambda^* = \frac{-a + \sqrt{a^2 - \rho^2 b}}{\rho^2}$$
(3.5.2.40)

(Note,  $\lambda^* = -2a/\rho^2$  when unloaded from the virgin loading)

where

$$a = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})\alpha_{ij} < 0$$
  

$$b = \frac{2}{3}\alpha_{M}^{2} + \alpha_{ij}\alpha_{ij}$$
  

$$\rho^{2} = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})(\eta_{ij} - \alpha_{ij})$$
  
(3.5.2.41)

Therefore stress ratio at conjugate stress becomes

$$\eta^{c} = \lambda^{*}(\eta_{ij} - \alpha_{ij}) + \alpha_{ij}$$
(3.5.2.42)

Normal direction of the conjugate point is computed as

$$N_{ij}^c = N_{ij}^{c^*} - \frac{\alpha_M}{k} \delta_{ij}$$

Unloading reloading is judged based on

$$df = N_{ij} d\sigma_{ij} < 0 \qquad \text{unloading from the virgin loading} \qquad (3.5.2.43)$$
$$df = N_{ij}^{c} d\sigma_{ij} < 0 \qquad \text{unloading from the hysteresis}$$

It may be convenient to judge unloading based on strain increment although stress increment is used in Equation (3.5.2.43). Equation (3.5.2.35) is rewritten in the form

$$N_{ij}d\sigma_{ij} = \frac{H_p N_{sl} \mathcal{L}^{s}_{stkl} d\varepsilon_{kl}}{H_p + N_{pq} \mathcal{L}^{e}_{pqmn} P_{mn}}$$
(3.5.2.35)

Here,  $H_p > 0$  always hold. In many case denominator is supposed to be greater than 0, therefore

sign of the right-hand side depends on numerator, in which case unloading can be judged by strain increment. The value of  $H_p$  gradually decreases, therefore denominator may become negative. In the practical procedure, therefore, judge the unloading by means of numerator, and after that check the sign of denominator.

Hardening parameter is defined as follows:

$$H_{p} = H_{R} - (H_{R} - H_{p}^{*}) \left(\frac{\rho}{\rho_{c}}\right)^{m}$$
(3.5.2.44)

where

 $H_p^*$ : Value of  $H_p$  at unloaded point

 $H_R$ : virtual hardening parameter, defined a function of cumulated plastic strain increment. In other word, when putting

$$d\lambda^{p} = \sqrt{\frac{2}{3}} e^{p}{}_{ij} e^{p}{}_{ij}$$
(3.5.2.45)  
efined as

it is defined a

$$H_R = H_{Ro} e^{a\lambda^p} \qquad (a>0)$$

(Note) From Equation (3.5.2.26)  
Substituting 
$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{A}{(A+B\xi)^2} \mathbb{A} \otimes \xi = \frac{A\alpha}{1-B\alpha}$$
 into  $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{A}{(A+B\xi)^2}$ , w

e

obtain 
$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{(1 - B\alpha)^2}{A}$$

Substituting into Equation (3.5.2.26), we obtain

$$H_{p}^{*} = p \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^{*} N_{ij}^{*} = \frac{p(1 - B\alpha)^{2}}{A} \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^{*} N_{ij}^{*}$$
(3.5.2.46)

Stress-dilatancy relation is written as

$$d\varepsilon_{\nu} = \tan \nu \, d\lambda^p \tag{3.5.2.47}$$

where

$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M_{\sqrt{\frac{2}{3}}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$
(3.5.2.21)

$$d\lambda^{p} = \frac{1}{H_{p}} N^{c}{}_{ij} d\sigma_{ij}$$
(3.5.2.48)

We define the phase transformation angle such that

$$\sigma_e - Mp = 0 \tag{3.5.2.49}$$

Large amount of dilatancy occurs near the failure surface and outside the phase transformation line, i.e.,

$$\alpha_{\rm M} > M \text{ and } d\alpha_c < 0 \tag{3.5.2.50}$$

where

ī.

$$\alpha_c = \frac{\sigma_e}{p}\Big|_{\sigma=\sigma_c}$$
, in which  $\sigma_c$  denotes current stress point. (3.5.2.51)

In we define,

$$N^{c}_{ij} = \frac{2}{3\sigma_e} s_{ij} + \frac{1}{k} \delta_{ij}$$
(3.5.2.52)

then

$$d\alpha_c = N^c_{ij} d\sigma_{ij} \tag{3.5.2.53}$$

Therefore, when loading continued within the phase transform,

$$\tan v = -\eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$
(3.5.2.54)

whereas in general case and unloading within the phase transform

$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3} N_{ij}^* N_{ij}^*}$$
(3.5.2.55)

## 3.5.3 Ishihara-Gutierrez-Tsujino model

This model is originally developed by Ishihara and Gutierrez<sup>9</sup> and improved by Ishihara and Tsujino. This model is developed for sand and has a characteristics that dilatancy caused by principal axis rotation is considered.

### (1) Stress and strain

Consider a simple two dimensional analysis. Confining pressure, shear stress, and volumetric strain is defined as

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$q = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2}$$

$$d\varepsilon_y = d\varepsilon_x + d\varepsilon_y$$

$$de = \sqrt{(d\varepsilon_y - d\varepsilon_x)^2 + d\gamma_{xy}^2}$$

(3.5.3-1)

In addition, stress component in deviatric stress plane and corresponding strain component are given by

 $X = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y)$  $Y = \tau_{xy}$  $d\varepsilon_x = d\varepsilon_y - d\varepsilon_x$ 

<sup>9</sup> Gutierres, M., Ishihara, K., and Towhata, I.: Flow theory for sand during rotation of principal stress direction, Soils and Foundations, Vol.31, No.4, pp.121-132, 1991

$$d\varepsilon_{\gamma} = d\gamma_{x\gamma} \tag{3.5.3-2}$$

Moreover, principal direction of stress  $\beta_{\sigma}$  and principal direction of plastic strain increment  $\beta_{de}$  is expressed as

$$\tan 2\beta_{\sigma} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{y} - \sigma_{x}}$$
$$\tan 2\beta_{d\varepsilon} = \frac{2\gamma_{xy}^{p}}{d\varepsilon_{y}^{p} - d\varepsilon_{x}^{p}}$$
(3.5.3-3)

These relationships is schematically shown in Figure 3.5.3-1.



Figure 3.5.3-1 Definition of stress and strain

### (2) Failure surface

Because of the initial nonisotropy, failure angle depend on the angle between the sedimentation and principal direction of stress. This state is approximately expressed by the circle shown in Figure 3.5.3-2(b), which is apart from the origin by amount x, and it is assumed that failure surface does not change by loading. It is expressed as

$$F = \sqrt{\left(X - c_f p\right)^2 + Y^2 - r_f p} = 0 \tag{3.5.3-4}$$

where

 $r_f$ : Stress ration at failure (or radius of failure surface)

 $c_r$ : Center of failure surface

Therefore, as shown in Figure 3.5.3-2(a), it is a corn shape in X-Y-p plane.



Figure 3.5.3-2 Failure surface and yield surface

## (3) Yield surface

Yield surface is assumed to be the same shape with failure surface, therefore a circle in X-Y plane.

$$f = \sqrt{\left(X - c_x p\right)^2 + \left(Y - c_y p\right)^2} - r^e p = 0$$
(3.5.3-5)

where

 $c_x$ ,  $c_y$  kinematic hardening parameter showing the center of yield surface

 $r_e$ : radius of yield surface corresponding to elastic region.

As elastic range tends to 0, yield surface becomes to agree with current stress point (X,Y), and f=0 becomes maintained. Namely, yield surface moves with stress in the deviatric plane.



Figure 3.5.3-3 Direction of plastic strain increment

#### (4) Flow rule

Since principal axis rotation generate plastic strain, flow rule considers this effect. Direction of plastic strain increment is supposed to be the normal direction of failure surface at the intersection of the direction of strain increment and failure surface, which is shown in Figure 3.5.3-3. This relation is expressed as

$$d\varepsilon_{X}^{p} = d\varepsilon_{x} - d\varepsilon_{y} = d\lambda \frac{\partial F}{\partial X}\Big|_{X=X_{c},Y=Y_{c}} = d\lambda \left(\frac{X_{c} - c_{f}p}{q_{f}}\right)$$
$$d\varepsilon_{\gamma}^{p} = d\gamma_{xy}^{p} = 2d\lambda \frac{\partial F}{\partial Y}\Big|_{X=X_{c},Y=Y_{c}} = d\lambda \left(\frac{Y_{c}}{q_{f}}\right)$$
(3.5.3-6)

where

$$q_f = \sqrt{(X_c - c_f p)^2 + Y_c^2}$$

 $d\lambda$ : Positive scalar parameter

Stress dilatancy relationship is expressed as

$$\frac{d\varepsilon_{vd}^p}{d\varepsilon_s^p} = \mu - \frac{q}{p}\cos 2\phi \tag{3.5.3-7}$$

Here,  $\varphi$  is a angle corresponding to the non-coaxiality between the direction of principal stress and plastic strain increment. Since  $\varphi = |\beta_{\sigma} - \beta_{d\varepsilon}|$ , plastic strain increment is compute by solving the Equations (3.5.3-6) and (3.5.3-7) simultaneously,

$$d\varepsilon_{x}^{p} = \frac{d\lambda}{2} \left[ \left( \mu - \frac{q}{p} \cos 2\varphi \right) - \left( \frac{X_{c} - c_{f}p}{q_{f}} \right) \right]$$
  

$$d\varepsilon_{y}^{p} = \frac{d\lambda}{2} \left[ \left( \mu - \frac{q}{p} \cos 2\varphi \right) + \left( \frac{X_{c} - c_{f}p}{q_{f}} \right) \right]$$
  

$$d\gamma_{xy}^{p} = d\lambda \left[ \frac{Y_{c}}{q_{f}} \right]$$
(3.5.3-8)

### (5) Hardening function

Hardening function  $H^{r}$  is supposed to be hyperbolic function, therefore,

$$H^{p} = G_{p} \left[ 1 - \frac{r_{i}}{r_{f}} \right]^{2}$$
(3.5.3-9)

where

r : stress ratio, q/p'

 $G_n$ : Initial gradient of stress ratio-plastic strain relationship

 $r_f$  : stress ratio at failure

In addition, plastic shear modulus  $G^p$  is assumed to be confining pressure dependent such that

$$G_p = G_{po} \sqrt{\frac{p}{p_o}} \tag{3.5.3-10}$$

where

 $G_{po}$ : Plastic shear modulus at effective confining pressure  $p_{o}$ .

 $p_o$  : Effective confining pressure to define plastic shear modulus.

Plastic hardening field theory proposed by Mroz<sup>10</sup> is used as kinematic hardening rule. According to this rule, however, center and circle of the circle at each plastic coefficient state is to be memorized, which is not practical in the earthquake response analysis because it requires large amount of memory size and computing time. Therefore only maximum yield surface and acting yield surface are memorized.

#### (6) Model parameters

There are six model parameters in this model. They are two elastic constants, two strength parameters, hardening parameter, and dilatancy parameter.

#### i) Elastic constant

Shear modulus  $G^{\epsilon}$  at confining pressure p is expressed as

$$G^e = G^e_o \sqrt{\frac{p}{p_o}}$$
(3.5.3-11)

where  $G_{o}^{e}$  is a shear modulus under confining pressure =  $p_{o}$ . Poisson's ration is assumed to be constant regardless to confining pressure.

ii) Hardening parameter

Plastic shear modulus  $G^p$  is obtained as a initial gradient when shear stress-plastic shear strain relation is approximated by hyperbolic function.

### iii) Strength parameter

Stress ratio at failure,  $r_p$  and parameter corresponding to the anisotropy,  $c_p$ , is given as a average value and a half of the difference of two strength, i.e., strength by plane strain compression test and triaxial compression test.

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> Mroz,Z: On the description of anisotropic work hardening, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, Vol.15, pp.163-175, 1967

iv)Dilatancy parameter

Dilatancy parameter is stress ration at phase transform, and is given as a gradient  $\mu$  of the relation between normalized shear work and plastic shear strain under shear.

## 3.5.4 Practical simplified model by Yoshida et al.

In the multi-dimensional analysis, various stress path is possible, hence constitutive model for multi-dimensional analysis may become fairly complicated if one intends to consider all the phenomena. In many constitutive equations, trials to make the model simple is conducted. In this case it may not have sufficient degree of accuracy in particular problem. For example, in the one-dimensional problem during earthquake, strain dependent shear modulus and damping characteristics are on interests in the stress-strain model, but there is no model that can control these factors in the multi-dimensional constitutive model.

There are some simplified model for multi-dimensional analysis. For example, in the computer code FLUSH, shear modulus and damping characteristics depends on  $\gamma_{xy}$  (Change of angle of horizontal and vertical axis), and Poisson's ratio is constant (therefore, Bulk modulus depends on  $\gamma_{xy}$ ). There two assumptions seem somewhat curious as the behavior of soil. Moreover, the effect of the change of confining pressure is not considered. However, since it limits its available range in the dynamic response analysis, hence it seems to succeed.

A model proposed by Duncan and Chang is also a simplified model, but have applicability more than the concept used in FLUSH. They used hyperbolic model for axial stress versus axial strain relationship. They proposed to use tangent modulus and not to use strains to define the behavior so as to avoid complexity to define strains. Their model is applicable only for monotonic loading, and, as described later in detail, it cannot be applied when confining pressure changes.

In this subsection, we show a simplified model which is available for cyclic loading and confining pressure dependency.

## (1) Characteristics of the model by Duncan and Chang

Model proposed by Duncan and Chang has following characteristics:

- 1) A hyperbolic model is used for axial stress versus axial strain relationships.
- 2) A parameter,  $R_f (\leq 1)$ , is employed so as to make good agreement between the model and test result under relatively small strains.

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)_f = R_f \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)_{ult} \tag{3.5.4.1}$$

where subscript f denotes compressive strength of material and subscript ult denotes ultimate compressive strength of the model.

- 3) Shear modulus at small strains depends on minimum principle stress,  $\sigma_3$
- 4) Compressive strength is computed using Mohr-Coulomb failure criterion by assuming that minimum principle stress is kept constant.

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)_f = \frac{2c\cos\phi + 2\sigma_3\sin\phi}{1 - \sin\phi} \tag{3.5.4.2}$$

5) Tangent shear modulus is expressed in terms of stress ratio,  $\eta = (\sigma_1 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ , which enable to avoid the complexity to define strains.

This model have following shortage for use in the general case.

- 1) The model is applicable for only monotonic loading.
- 2) They assume that minimum principal stress keeps constant when computing initial modulus and strength. This is because their model is based on the result of triaxial test, in which one minimum principal stress is kept constant in the compression test. However, in general, initial modulus depends on effective confining pressure, and minimum principal stress may change.
- 3) Tangent modulus they derived is the one when  $\sigma_3$  is kept constant, hence not a tangent modulus when it changes.

#### (2) **Basic concept of the model**

Firstly, we assume that 1) shear deformation and volume change behavior can be separately treated, and 2) Volume change due to dilatancy is taken into account separately when necessary. Moreover, since it is difficult or impossible to define actual tangent modulus under multi-strain space, we abandon to compute tangent modulus to be used for next incremental analysis. We concentrate to compute stress increment for given strain increment.

We define the problem to compute stress increment for given (infinitesimally) small strain increment. Confining pressure increment for given strain increment dp is computed as follows:

$$dp = B(d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vd}) \tag{3.5.4.3}$$

where B denotes tangent bulk modulus and a function of effective confining pressure,  $d\varepsilon_{v}$  denotes total volumetric strain, and  $d\varepsilon_{vd}$  denotes volumetric strain due to dilatancy. Since no change of confining pressure occurs due to shear deformation (all term causing confining pressure is already considered), in the following computation (shear deformation) we can consider that confining pressure is already known.

The following dimensionless quantities are introduced for the convenience of treatment considering confining pressure dependency.

$$\eta = \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}}, \quad \xi = \frac{e \cdot G_{\max}}{\tau_{\max}} \tag{3.5.4.4}$$

where  $\sigma_e$  denotes equivalent stress,  $\varepsilon$  denotes equivalent strain,  $G_{max}$  denotes shear modulus at small strains,  $\tau_{max}$  denotes shear strength. Since confining pressure is known, the value of  $G_{max}$  can be computed even when confining pressure dependency is taken into account. The ultimate strength is expressed with respect to confining pressure as

$$\tau_{\max} = c\cos\phi + p\sin\phi \tag{3.5.4.5}$$

where c denotes cohesion and  $\phi$  denotes internal friction angle.

Let suppose that dimensionless stress-dimensionless strain relationships is expressed as

$$\eta = \eta(\xi) \tag{3.5.4.6}$$

Here it is noted that confining pressure does not appear in Equation (3.5.4.6) in the explicit form; Equation (3.5.4.6) is independent on the change of confining pressure. If tangent stiffness of Equation (3.5.4.6),  $g = d\eta / d\xi$  is computed (detailed formulation is shown later), then, recognizing that dimensionless strain increment corresponding to the deviatric strain increment  $de_{ij}$  is expressed as

$$d\xi_{ij} = de_{ij}\overline{G}_{\max} / \overline{\tau}_{\max}, \qquad (3.5.4.7)$$

deviatric stress after an incremental analysis is obtained as

$$s_{ij} = (\eta_{B,ij} + gd\xi_{ij})\tau_{\max}$$
(3.5.4.8)

Here, upper bar in Equation (3.5.4.7) indicates that they are average value before and after the incremental analysis (Both are known quantities),  $s_{ij}$  denotes deviatric strain, and  $\eta_{B,ij}$  denotes deviatric stress ratio before the increment.

## (3) Treatment under repeated loading

If one can compute suitable value of g, then preceding basic equation can be used in the repeated loading. We assume that memory surfaces are left at each unloading in the deviatric stress surface as schematically shown in Figure 3.5.4.1. Corresponding to the Mohr-Coulomb criteria, memory surface is a sphere shape and it expands with tangent to previous memory surface. The memory surface disappear when it touches to previous memory surface, and is limited to Mohr-Coulomb failure criteria which is shown as dotted line in Figure 3.5.4.1. We set the radius of the memory surface as g, which corresponds to use Masing's criteria with similarity factor of 2. One can use, however different equations for skeleton curve and hysteresis curve depending on the model.



Figure 3.5.4.1 Schematic figure showing the change of memory surface and boundary surface

The coordinate of the memory surface after unloading is expressed as,

$$\eta_{ij} = k\eta_{ij,c} + (1-k)\eta_{ij,R} \tag{3.5.4.9}$$

where tilda (~) denote the center of the current memory surface, subscript R denotes stress ratio at unloaded point, subscript O denotes stress ratio of the center of previous memory surface, and

$$k = \frac{(\eta_{ij} - \eta_{ij,R})(\eta_{ij} - \eta_{ij,R})}{2(\eta_{ij} - \eta_{ij,R})(\eta_{ij,c} - \eta_{ij,R})}$$
(3.5.4.10)

Therefore one can compute the center of memory surface, hence the radius of the circle, by tracing the memory surface from the beginning.

### (4) Various model

In this section, we show equivalent stress-equivalent strain relationships, its dimensionless expression and the shape of dimensionless tangent modulus g.

1) Hyperbolic model

$$\sigma_e = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{G_{\max}e}{\tau_{\max}}}, \qquad \eta = \frac{\xi}{1 + \xi}, \qquad g = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = (1 - \eta)^2$$

If one uses Dancan-Chang formulation, introducing strength ratio  $R_f$  between actual and model, equations are expressed as

$$\sigma_e = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{G_{\max}e}{\tau_{\max} / R_f}}, \qquad \eta = \frac{\xi}{1 + R_f \xi}, \qquad g = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = (1 - R_f \eta)^2$$

2) Ramberg-Osgood model

$$e = \frac{\sigma_e}{G_{\max}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}} \right)^{\beta-1} \right), \qquad \xi = \eta \left( 1 + \alpha \eta^{\beta-1} \right), \qquad g = \frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{1}{1 + \alpha \beta \eta^{\beta-1}}$$

3) Method by Yoshida et al.

Yoshida et al <sup>3)4)</sup> proposed a model for one-dimensional analysis by which perfect agreement is obtained with arbitrary strain dependent shear modulus and damping ratio characteristics; piecewise linear or spline function is employed for skeleton curve and hyperbolic model whose values of parameter is determined based on the damping characteristics is used for hysteresis curve. The model can be used for two-dimensional analysis if one reread shear stress and shear strain into equivalent stress and equivalent strain, respectively.

We employ piecewise linear function for virgin loading and use subscript o the quantities under specified confining pressure. Then tangent shear modulus  $G_o$  is computed from  $\sigma_{e,o}=T\tau_{max,o}$ , hence tangent shear modulus G under current confining pressure as

$$G = \frac{G_o G_{\max}}{G_{\max,o} \left( 1 + \left(\frac{G_{\max}}{G_{\max,o}} - 1\right) \frac{\eta}{\tau_{\max,o}}\right)^2}$$

After unloading, hyperbolic model is used. The equation is expressed as

$$\sigma_e = \frac{G_{R,\max}e}{1 + \frac{G_{R,\max}e}{\tau_{R,\max}}}, \qquad \eta = \frac{\frac{G_{R,\max}\xi}{G_{\max}\xi}}{1 + \frac{\tau_{\max}G_{R,\max}}{G_{\max}\tau_{R,\max}\xi}}, \qquad g = \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{G_{R,\max}}{G_{\max}} \left(1 - \frac{\tau_{\max}\eta}{\tau_{R,\max}\eta}\right)^2$$

where value of parameters with subscript R is computed following the history of loading.

1) FLUSH

- Duncan, J.M. and Chang, C.Y., Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, Jour. of SM, Vol.96, No.SM5, pp.1629-1653, 1970
- Yoshida, N., Tsujino, S. and Ishihara, K., Stress-strain Model for Nonlinear Analysis of Horizontally Layered Deposit, Summaries of the Technical Papers of Annual Meeting of AIJ, pp.1397-1398, 1990
- 4) Yoshida, N., Modeling of Stress-strain Relationships for Nonlinear One-dimensional Analysis

of Ground: Part 2, Applicability on Liquefaction Analysis, Proc., 46th Annual Conf. of the Japan Society of Civil Engineering, pp.252-253, 1991

# 3.5.5 Confining pressure dependent elastic model

This model is a kind of no-tension material, and elastic properties depends on effective confining pressure. Shear modulus G and bulk modulus B is defined as

$$G = G_{o} \left(\frac{\sigma'_{m}}{\sigma'_{o}}\right)^{n}$$

$$B = B_{o} \left(\frac{\sigma'_{m}}{\sigma'}\right)^{m}$$

$$(3.5.5.2)$$

where  $\sigma'_m$  denote effective confining pressure,  $\sigma'_o$  denotes reference effective confining pressure, and G<sub>o</sub> and B<sub>o</sub> denote shear modulus and bulk modulus under reference confining pressure, respectively. When effective confining pressure is negative (or when tension), stiffness is zero.

## 3.7 Joint element

A Goodman type joint element<sup>1)</sup> is employed in STADAS, but a new formulation is conducted. Application of the joint element into Biot type formulation is also presented.

#### 3.7.1 Basic concept

Joint element is schematically modelled into Figure 3.7.1, which does not have width in y-direction. Since it is composed of four nodes, it has 8 degrees of freedom in the 2-



Figure 3.7.1 Schematic figure of joint element and notations

dimensional analysis. Three of them are rigid body motion in x- and y-direction and rotation. Therefore, it has 5 independent deformation modes. Figure 2 shows a set of independent modes. Among them, joint element does not have rigidity against the mode (e) in definition, hence we will discuss the rest four modes. Modes (a) and (c) and modes (b) and (d) correspond to nomal and tangental direction deformations, respectively. The behavior in the normal and tangential direction can be separate and basic equations are similar to each other, hence behavior of only one direction is explained hereafter unless necessary. When necessary, they are distinguished by subscripts n and s.



Figure 3.7.2 Independ deformation modes

Relative displacement of upper side from lower side, w, is expressed using the linear interpolation function  $\{B\} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L} - \frac{1}{2} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right\}$  as  $w = w^{top} - w^{bonom} = \{B\}\{u\}$  (3.7.1)

The expression in Figure 3.7.2 is recognized that the interpolation function is separeted into two

component, such that

$$\{B\} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{L} - \frac{x}{L} + \frac{x}{L} - \frac{x}{L}\right\} = \left\{B^{O}\right\} + \left\{B^{H}\right\}$$
(3.7.2)

Let the stiffness of the element per unit length is denoted by k, stress per unit length  $\sigma$  is expressed as  $\sigma = kw$ . Then, against the modes (a) and (b) in Figure 3.7.2, equivalent nodal force  $\{F^o\} = \{F_1^o \ F_2^o \ F_3^o \ F_4^o\}^T$  is computed as

$$\left\{F^{O}\right\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{B^{O}\right\}^{T} \sigma dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{B^{O}\right\}^{T} k\left\{B^{O}\right\} dx\left\{u\right\} = L\left\{B^{O}\right\}^{T} k_{c}\left\{B^{O}\right\}\left\{u\right\} = \left[K^{O}\right]\left\{u\right\}$$
(3.7.3)

where subscript c denotes the quantity at the center of element, and  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 

Here, stiffness at the center is used as representative value of stiffness in joint element.

Modes (c) and (d) in Figure 2 are similar to so called hourglass mode deformation<sup>2)</sup>. Let base vector for hourglass mode deformation  $\{h\} = \{1 \ -1 \ 1 \ -1\}^T$ , then, using the interpolation function  $\{B^H\} = \{\frac{x}{L} \ -\frac{x}{L} \ \frac{x}{L} \ -\frac{x}{L}\}$  and relative displacemet  $w^H = \{B^H\}\{u\}$  against hourglass mode deformation, equivalent nodal force  $\{F^H\}$  is computed as

$$\left\{F^{H}\right\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{B^{H}\right\}^{T} k\left\{B^{H}\right\} dx\left\{u\right\} = \frac{k_{c}L}{12} \left\{h\right\} \left\{h\right\}^{T} \left\{u\right\}$$
(3.7.5)

Therefore stiffness against hourglass mode  $[K^H]$  is obtained as

$$\left[K^{H}\right] = \frac{k_{c}L}{12} \{h\} \{h\}^{T}$$
(3.7.6)

Stiffness matrix of joint element is obtained as the sum of Equations (3.7.4)and (3.7.6), which is the same with the one that Goodman and Taylor first derived<sup>1)</sup>. The difference, however, appears in the calculation of equivalent nodal force.

Since there is four independent modes, we need, in the orinary method, four stress values in an element so as to reproduct nodal force equivalent to external force from stresses in an element. Therefre, even if stiffness



Figure 3 Modulus for computing the generalized force against hourglass mode deforamtion

II-84

matrix is expressed using the stiffness at the center of an element, we need to compute stresses at least two points to compute equivalent nodal force for calculating, for example, unbalanced force in the nonlinear analysis. Equivalent nodal force corresponding to modes (a) and (c) is computed from Equation (3.7.3) as

$$[F^o] = \{B^o\}\sigma_c \tag{3.7.7}$$

Next, let generalized force and generalized displacement against hourglass mode as Q and q, then equivalent nodal force is computed as<sup>3)</sup>

$${F^{H}} = {h}Q, \qquad q = {h}^{T}{u}, \qquad Q = cq, \qquad c = \frac{k_{c}L}{12}$$
(3.7.8)

where  $k_c$  is apparent secant modulus,  $k_{sec}$ , in each incremental analysis as shown in Figure 3.7.3. Equations (3.7.7) and (3.7.8) indicate that equivalent nodal force is computed only from the state at the center of element by using stress and incremental stiffness instead of stresses at two points.

Goodman shows two kind of stiffness matrix<sup>1)4)</sup>, but the second formulation is recognized to be insufficient, which is easily recognized from above formulation.

### 37.2 Application for two-phase problem

For the analysis of the mixture of soil and water based on Biot's formulation, we define effective normal stress, similar to orinary stress, as  $\sigma'_n = \sigma_n - p$ , where p denotes porewater pressure. We employ interpolation function one degree lower than the one for relative displacement, i.e., p is constant, then equilibrium equation of water is automatically satisfied.

Substituing the definition of effective stress into Equations (3.7.3) and (3.7.5), total equilibrium equation yields

$$\{F_n\} = \{F_n^O\} + \{F_n^H\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B\}^T \sigma_n dx = ([K_n^O] + [K_n^K])\{u_n\} - \{K_p\}p = [K_n]\{u_n\} - \{K_p\}p$$
(3.7.9)

where  $\{K_p\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B^O\}^T dx = \{B^O\}^T L$  is pore pressure matrix.

Referring to the geometrical configuration before the deformation, and assuming that water flows through both sides, water flowed in during the unit time interval, W, is computed as

$$W = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \dot{w}_n dx = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (\dot{U}_{n,top} - \dot{U}_{n,bottom}) dx$$
(3.7.10)

where U denotes deisplacement of water. On the other hand, volumetic change is expressed as  $\{K_p\}^T \{\dot{u}_n\}$ , hence continuity condition yields

$$\left\{K_{p}\right\}^{T}\left\{\dot{u}_{n}\right\} = -\int_{top \ side} \left[N_{top}\right] dx \left\{\dot{U}_{top}\right\} + \int_{bottom \ side} \left[N_{bottom}\right] dx \left\{\dot{U}_{bottom}\right\}$$
(3.7.11)

where [N] denotes interporation function of water in the neighbouring element. Subscripts top and bottom indicate element neighbouring to the joint element at the top side and bottom side,

respectively. Since joint element is a widthless element, we cannot compute velocity of water at the boundary of the element from the state at the joint element, which may be inconvenient in the formulation.

Equations (3.7.9) and (3.7.11) are basic equations, which corresponds to u-U-p formulation. Since pappears only in Equation (3.7.9), hence cannot be eliminated, we cannot derive, so called, u-U formulation for a joint element.

In the preceding formulation we do not condider water flow through the neighbouring joint element. Flow through the neighbouring element, however, may occur when both side of joint element separate. can be considered by assuming suitable permeability shown later.



Figure 3.7.4 Notation for use of differential formulation

From the assumption, if basic equation is converted

into u-p formulation, it is Christian type formulation, in which porewater pressure is defined at the element but not in the node. This can be done using the differential method firstly proposed by Akai and Tamura<sup>5)</sup> for consolidation analysis (the formulation here is more general form). Refereing Figure 3.7.4, water flowed into the joint element during unit time inrement is obtained from Equation (3.7.12).

$$W = L \left( \kappa_{iop} \frac{h - h_{iop}}{\ell_{iop}} + \kappa_{bottom} \frac{h - h_{bottom}}{\ell_{bottom}} \right)$$
(3.7.12)

where  $\kappa$  denote peameability. The notation h denotes head of water which is expressed as

$$h = \frac{p}{\rho_f g} - \frac{\{X\}^T}{g} (\{b\} - \{\ddot{u}\})$$
(3.7.13)

where  $\{b\}$  denotes graivity force vector. On the other hand, volumetric change of joint element is computed as left side of Equation (3.7.11). Then continuity condition yields

$$\{K_{p}\}^{T}\{\dot{u}_{n}\} = W = \alpha \left(p - \rho_{f}\{X\}^{T}(\{b\} - \{\ddot{u}\})\right) - \sum \alpha_{i} \left(p_{i} - \rho_{f}\{X_{i}\}^{T}(\{b\} - \{\ddot{u}_{i}\})\right)$$
(3.7.14)  
where

where

$$\alpha_i = \frac{L\kappa_i}{\ell_i}, \quad \alpha = \sum \alpha_i \tag{3.7.15}$$

where subscript *i* is eithre *top* or *bottom* and summation takes both sides. If the effect of the term  $\rho_f{\{\ddot{u}\}}$  (Effect of velocity head)<sup>6)</sup> can be neglected,

$$\left\{K_{p}\right\}^{T}\left\{\dot{u}_{n}\right\} = W = \alpha \left(p - \rho_{f}\left\{X\right\}^{T}\left\{b\right\}\right) - \sum \alpha_{i} \left(p_{i} - \rho_{f}\left\{X_{i}\right\}^{T}\left\{b\right\}\right)$$
(3.7.16)

A pair of Equations (3.7.9) and (3.7.14), or Equations (3.7.9) and (3.7.16) are basic equations for u-p formulation, in which displacement of water does not appear. The coefficient matrix is unsymmetric, which may be inconvinient. Let use a backward difference for the change of porewater pressure, and put

$$\frac{\partial u}{\partial t}dt = du, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt = d\dot{u} \tag{3.7.17}$$

where dt denotes time increant, substitution of Equation (3.7.17) into Equations (3.7.9) and (3.7.16) yields

$$[K_n]\{du_n\} - \{K_p\}p = \{dF_n\} - \{K_p\}p_{t-dt}$$
(3.7.18)

$$\{K_{p}\}^{T}\{du_{n}\} = \alpha dt (p - \rho_{f}\{X\}^{T}\{b\}) - \sum \alpha_{i} dt (p_{i} - \rho_{f}\{X_{i}\}^{T}\{b\})$$
(3.7.19)

where  $p_{t-dt}$  denotes porewater pressure at the beginning of increment.

If one want to consider water flow through neighbouring joint elements, the term corresponding to  $\alpha$  in Equation (3.7.15) is necessary. It becomes approximately possible to assume relatively large value of premeability towards the tangential direction of joint element.

- 1) Goodman,R.E. and Taylor,R.L., A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Jour. of SM, ASCE, Vol.94, No.SM3, May, 1968, pp.637-659
- Flanagan, D.P. and Belytschko, T.A., A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. Jour. Numerical Methods in Engineering, Vol.17, pp.679-706, 1981
- Yoshida, N., Large Deformation Analysis of Liquefaction-induced Ground Displacement by Reduced Integral Method, Proc. 3rd Symposium of Numerical Method of Mechanics, pp.391-396, 1989
- Goodman, R.E., Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks, West Publishing Company, 1976
- 5) Akai, K. and Tamura, T., Numerical Analysis of Multiple-dimensional consolidation accompanied with Elasto-plastic constitutive equation, Proc. JSCE, No.269, pp.95-104, 1976
- 6) Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol.30, pp.385-395, 1980

## 4 Eigen value problem and modal damping

#### 4.1 Conversion into standard eigen value problem

Equation of motion is written in the form

$$[M]{\ddot{u}} + [K]{u} = \{0\}$$
(4.1.1)

where [M] denotes mass matrix, [K] denotes stiffness matrix,  $\{u\}$  denotes displacement, and dot denotes differential with respect to time. Here, displacement  $\{u\}$  is assume to be expressed as

$$\{u\} = \{X\}e^{i\omega x}$$
(4.1.2)  
Substituting Equation (4.1.2) into Equation (4.1.1), and using the relation  $e^{i\omega x} \neq 0$ , we obtain

$$(-\omega^2[M] + [K]) \{X\} = \{0\}$$
(4.1.3)

Therefore the condition that there is no nontrivial solution yields

$$-\lambda[M] + [K] = 0 \tag{4.1.4}$$

where

 $\lambda = \omega^2$ 

Equation (4.1.4) is a eigen equation for free vibration.

Generally speaking, Equation (4.1.4) is a polynomial with N degree of freedom, where N denote degrees of freedom of the model. From the characteristics of [M] and [K], Equation (4.1.4) has N positive solutions, therefore there is N independent vibration modes. However, since lumped mass is employed in STADAS, if diagonal part of [M] is zero, order of Equation (4.1.4) or total degrees of freedom of the system decreases. This phenomena occurs even for consistent mass system. When there is  $n_o$  degrees of freedom with zero mass, order of polynomial in Equation (4.1.4) becomes  $n=N-n_o$ , therefore there is only n independent vibration modes. Here n is called dynamic degrees of freedom. In the followings, we first convert Equation (4.1.4) into standard eigen equation for n=N, and secondly we modify it for n<N.

Because lumped mass system is used in STADAS, [M] is a diagonal matrix, therefore is written as

$$[M] = [\eta][\eta]$$
(4.1.5)

where

$$[\eta] = \left[\sqrt{m_{ij}}\right] \tag{4.1.6}$$

 $m_i$ : mass or mass moment at i-th freedom.

Substituting Equation (4.1.5) into Equation (4.1.3), and multiply  $[\eta]^{-1}$  from the left, we obtain  $(-\lambda[\eta] + [\eta]^{-1}[K]) \{X\} = \{0\}$ 

Here, since  $m_i \neq 0$ , inverse matrix,  $[\eta]^{-1}$  always exists. Therefore

$$\left(-\lambda[I] + [\eta]^{-1}[K][\eta]^{-1}\right)\left([\eta]\{X\}\right) = \{0\}$$
(4.1.7)

II-88

 $[I] = [\eta]^{-1}[\eta]$ : Unit matrix

As the condition that all the solution of Equation (4.1.7) is not zero, standard eigen equation is obtained, which is

$$[A] - \lambda[I] = 0$$

$$[A] = [\eta]^{-1}[K][\eta] = [K_{ij}\sqrt{m_i m_j}]$$

$$(4.1.8)$$

If there is zero mass freedom, inverse matrix,  $[\eta]^{-1}$ , cannot be computed. Let suppose that degrees of freedom in Equation (4.1.1) are rearranged so that freedoms with nonzero mass and zero mass are separated in the form

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{u}_{b} \int \left[ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \dot{u}_{b} \int \left[ K_{bb} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{aa} \\ \ddot{u}_{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} \\ \dot{u}_{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{ab} \\ \dot{u}_{b} \end{bmatrix} = \{ 0 \}$$

$$\begin{bmatrix} K_{ba} \\ \dot{u}_{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb} \\ \dot{u}_{b} \end{bmatrix} = \{ 0 \}$$

$$(4.1.9)$$

$$(4.1.10)$$

Equation (4.1.10) is solved with respect to  $\{u_h\}$ 

 $\begin{bmatrix} M_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_{aa}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{ab} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ 

$$\{u_b\} = -[K_{bb}]^{-1}[K_{ba}]\{u_a\}$$
(4.1.11)

Substitution into Equation (4.1.9) yields

$$[M_{aa}]\{\ddot{u}_{a}\} + ([K_{aa}] - [K_{ab}][K_{bb}]^{-1}[K_{ba}])\{u_{a}\} = \{0\}$$
(4.1.12)

Since inverse of mass matrix exists in Equation (4.1.12), the same procedure for standard eigen equation is used. Here after obtaining eigen vector corresponding to  $\{u_a\}$ , eigen vector corresponding to  $\{u_b\}$  is computed from Equation (4.1.11).

## 4.2 Modal damping

There are, roughly classified, three methods to obtain damping matrix. The first one is to measure actual damping coefficient. The second one is to use Rayleigh damping or other similar damping. The third one is described in this section. The first one is, in theory, the most accurate, but never used in practise because of the difficulty to measure actual damping coefficient directly. It does not, however, indicate that actual damping cannot be measured. They are usually measured in an indirect manner such as free vibration damping or forced vibration behavior by means of vibrator. The method described here is a method to make damping matrix from these indirectly measured damping.

This method has been used in the structural analysis, but has not been used in the analysis of ground. The one reason may be that, as can be known from the process of derivation, damping matrix derived by this method is a full matrix. Unlike the case of structures, total degrees of freedom is much larger. Therefore, effort has been done to reduce total computing time and

memory size using the characteristics of band matrix and diagonal matrix, which effort will result in vain if full matrix appears.

The second, and the largest reason may come from the difference of the concept of damping. Structure is usually separated into structural element such as beam and column and foundation is assumed to be rigid in the structural analysis. Damping characteristics of these model is measured in good accuracy. By the way, the damping of structural material itself is not so large. In practise, behavior of nonstructural element affect overall behavior. Next, radiational damping cannot occur under fixed base modeling, which also affect the overall behavior. Therefore, without considering these two phenomena, response of the structure is estimated too large. Consideration of these effect has been conducted by employing suitable internal damping, in which case the concept of damping constant is convenient.

In the contrary, this kind of affair hardly occurs. There is no element corresponding to nonstructural element. If radiation damping may cause problem, incident wave analysis can be conducted. Therefore damping matrix is to be made considering only the actual internal damping. According to many tests on soil characteristics, material damping itself hardly affect the overall behavior of ground under the loading rate due to earthquake; hysteresis damping and radiation damping are usually predominant. Therefore, in the analysis of ground, internal damping is usually employed for the purpose to make numerical integration stable by putting suitable damping against higher mode response. Of course, in the linear or nonlinear analysis, hysteresis damping is replaced into internal damping, but analysis is usually conducted in frequency domain.

These consideration indicates that damping described in this section may be needless in the analysis of ground. However, it may be useful to use variety functions that STADAS has.

Equation of motion is expressed as

$$[M]{\ddot{u}} + [C]{\dot{u}} + [K]{u} = {F}$$
(4.2.1)

where  $\{F\}$  denotes external load vector. We assume that this equation can be uncoupled, or eigen analysis is possible to compute damping matrix.

Using the result of eigen value problem in the previous section, displacement vector is expressed as the sum of eigen vectors as

$$\{u\} = [\xi]\{q\}$$
(4.2.2)

where

 $[\xi] = [\{X_1\} \{X_2\} \{X_3\} \dots \{X_n\}]$ : Mode matrix

and  $\{q\}$  denote modal displacement. Substituting these equations into Equation (4.2.1), and multiplying  $[\xi]^T$  from the left, we obtain

 $[\xi]^{T}[M][\xi]\{\dot{q}\} + [\xi]^{T}[C][\xi]\{\dot{q}\} + [\xi]^{T}[K][\xi]\{q\} = [\xi]^{T}\{F\}$ (4.2.3) Orthogonal condition of eigen function indicates that  $[\xi]^{T}[M][\xi]$  and  $[\xi]^{T}[K][\xi]$  are diagonal matrix, i.e.,

$$[\xi]^{T}[M][\xi] = [m_{j}]$$
  

$$m_{j} = \{X_{j}\}^{T}[M]\{X_{j}\}: \text{ generalized mass}$$
  

$$[\xi]^{T}[K][\xi] = [k_{j}]$$
  

$$k_{j} = \{X_{j}\}^{T}[K]\{X_{j}\}: \text{ generalized stiffness}$$
(4.2.4)

Therefore, the condition that equation of motion, Equation (4.2.1) can be uncoupled is written in the form

$$[\boldsymbol{\xi}]^{T}[C][\boldsymbol{\xi}] = [c_{j}] \tag{4.2.5}$$

When Equation (4.2.5) holds, Equation (4.2.3) can be written by each independent mode such that

$$m_j \ddot{q}_j + c_j \dot{q}_j + k_j q_j = ([\xi]^T \{F\})_j \qquad (j = 1 \to n)$$
(4.2.6)

Dividing Equation (4.2.6) by  $m_j$ , and using the relation  $\omega_j = \sqrt{m_j / k_j}$  (j-th order circular frequency), we obtain

$$\ddot{q}_j + 2h_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = f_j \tag{4.2.7}$$

where

$$h_j = \frac{c_j}{2\omega_j m_j} \tag{4.2.8}$$

is damping constant of each mode. Using Equation (4.2.5), we can compute damping matrix from damping coefficient of each mode, which result in

$$[C] = ([\xi]^{T})^{-1} [c_{j}] [\xi]^{-1}$$
$$= ([\xi]^{-1})^{T} [2j_{j}\omega_{j}m_{j}] [\xi]^{-1}$$
$$= ([\xi]^{-1})^{T} [m_{j}] [2j_{j}\omega_{j}] [\xi]^{-1}$$

From Equation (4),

$$\left(\left[\xi\right]^{T}\left[M\right]\left[\xi\right]\right)^{-1} = \left[m_{j}\right]^{-1} = \left[1 / m_{j}\right]$$
  
$$\therefore \left[\xi\right]^{-1} = \left[1 / m_{j}\right]\left[\xi\right]^{T}\left[M\right]$$
  
$$\left(\left[\xi\right]^{-1}\right)^{T} = \left[M\right]^{T}\left[\xi\right]\left[1 / m_{j}\right] \quad (\because [M] \text{ is diagonal})$$

Substitution of this equation into above, we obtain

$$[C] = [M][\xi][2j_j\omega_j][1/m_j][\xi]^T[M]$$
(4.2.9)

Damping matrix is now derived.

In the uncoupled equation, external force vector in Equation (4.2.1) is expressed as

$$\{F\} = -[M]\{E\}\ddot{u}_{g} \tag{4.2.10}$$

$$f_{j} = \frac{-\{X_{j}\}[M]\{E\}}{m_{j}}\ddot{u}_{g} = -\beta_{j}\ddot{u}_{g}$$
$$\beta_{j} = \frac{\{X_{j}\}^{T}[M]\{E\}}{\{X_{j}\}^{T}[M]\{X_{j}\}}: \text{Participation coefficient}$$

### 4.3 Strain energy proportional damping

The value of modal damping may be computed from the vibration test, in which case it is computed directly. There may be, however, several cases that damping constant of each element is specified, in which case modal damping constant is computed by using various method. The method described here is one of these one, in which damping is proportional to the strain energy stored in each element.

Strain energy stored in each element under the vibration of each mode is computed as

$$E_{j,k} = \frac{1}{2} \{X_k\}^T [\eta_j] \{X_k\}$$
(4.3.1)

Therefore damping energy of each element is computed as

$$D_{k,j} = 4\pi h_{j,k} E_{j,k}$$
(4.3.2)

As an assembly of each element, damping energy of whole system becomes

$$D_{k} = 4\pi \sum_{j=1}^{m} h_{j,k} E_{j,k}$$
(4.3.3)

On the other hand, damping energy of the whole system is computed as

$$D_k = 4\pi h_k \sum_{j=1}^m E_{j,k}$$
(4.3.4)

Since both damping energy should be the same, we obtain modal damping value from Equations (4.3.3) and (4.3.4) such that

$$h_{k} = \frac{\sum_{j=1}^{m} h_{j,k} \{X_{k}\}^{T} [\eta_{j}] \{X_{k}\}}{\{X_{k}\}^{T} [K] \{X_{k}\}}$$
(4.3.5)
# **Part III**

# **Addition of constitutive model**

c is number put sequentially from 0, which depend on the constitutive model. The subroutine has following calling sequence

SUBROUTINE CNabbc (IFLAG, IITER, EMAT, ELPRP, ELHST, STRESS, DSTRS, STRAIN, DSTRN, STIF)

Here, meaning of the arguments are generally as follows:

- IFLAG Flag number to control the work. See chapter 3 for detail.
- **IITER** Iteration number. See chapter 3.
- EMAT Array to store material property of each material type, some of which are used by the program.
- ELPRP Array to store material property in each element, some of which are used by the program.
- ELHST Array to store hysteresis quantity of each element.
- STRESS Stress at the beginning of the incremental calculation
- DSTRS Stress increment
- STRAIN Strain at the beginning of the incremental analysis
- DSTRN Strain increment
- STIF Initial or tangent matrix.

# **3** Control by IFLAG

The program required several works, which is specified by IFLAG.

## (1) IFLAG=1

Size for EMAT, which is the size required for an material type, is output in IFLAG.

## (2) IFLAG=2

Read material property, store them into EMAT and print it. Some material property can be input in element. If material property of each element is input when reading element property, specify the number as IITER, otherwise IITER=0.

At the time just before calling this routine, the following contents are printed by the program, therefore format for the material type print is to be consistent with this.

(\*\*\* indicates relevant number)

## (3) IFLAG=3

Return array size for ELPRP and ELHST required for an element into IFLAG and IITER.

## (4) IFLAG=4

Convert the content of EMAT into ELPRP and ELHST if it may change element by element. If IITER is set not zero when IFLAG=2, they are send through variable STRAIN, which are also converted into ELPRP and ELHST. It is noted that the value of STRAIN should not be changed.

## (5) IFLAG=5

Set initial value of hysteresis related quantities. This case is called only once. After calling this sequence, the program requires various work shown below, therefore preparation against these work is to be done here.

## (6) IFLAG=6

Compute stress increment from strain increment. If necessary preparation to compute initial stiffness and tangent stiffness is to be done. It is also noted that output of stress increment, DSTRS is necessary, and total value of stress and strain, STRESS and STRAIN are also output.

## (7) IFLAG=7

Compute elastic matrix or initial matrix.

## (8) IFLAG=8

Compute tangent modulus. In case this work is required, the work by IFLAG=5 or IFLAG=6 is always called just before. The matrix is computed based on the previous information. Here, tangent modulus may not be computed in some subroutine. The control is to be done by choosing suitable analytical method in the input of the program, but it may be safe to compute initial

modulus in this case.

## (9) IFLAG=9

This option is exactly the same with IFLAG=7, but a little larger than initial stiffness (usually 2 or more times initial stiffness) is to be computed. This matrix is used for modified initial modulus method.

IFLAG	1	2	3	4	5	6			7,9		8	
IFLAG	I/O	Ι	I/O	Ι	Ι		I		Ι	I		
IITER	-	I/O	0	-	-	0	>0	<0	-	0	>0	<00
EMAT	-	0	-	I	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι
ELPRP	-	-	-	0	I/O	I/O	Ι	Ι	I	Ι	Ι	Ι
ELHST	-	-	-	0	I/O	I/O	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι	Ι
STRESS	-	-	-	Ι	I/O	I	I/O		Ι	Ι	Ι	-
DSTRS	-	-	-	-	-	0	W		W	W	W	-
STRAIN	-	-	-	-	/0	Ι	I/O		I	Ι	Ι	-
DSTRN	-	-	-	-	-	Ι	Ι		Ι	Ι	Ι	-
STIF	-		-	-	-	-	-		0	0	0	-

# (10) I/O sequences

# **4** Iteration

Iteration is controlled by variable IITER, which means as follows:

IITER Positive: On the process of iteration. IITER indicate iteration number.

0: No iterative calculation is required.

Negative: Iteration finishes, therefore fix the response value. Since the value of IITER is meaningless, except tells the end of iteration. DSTRN does not have meaning in this input, therefore, necessary information is to be stored by the program.

In the iterative analysis, IFLAG=6, 8, and 9, computed result may not be final result. If the state is not final state, quantities necessary in the subsequent analysis must not be changed. The followings are basic policy of the program.

1) IITER is always 0 for the analysis that does not require iteration such as tangent modulus. Specified strain increment is a true increment, and fix the result.

2) In the method using iterative procedure such as initial stress method and predictor-corrector method, strain increment is always a increment from the end of previous incremental analysis (See Figure below). As shown in fig. 1.1, strain increment from the previous fixed state  $(\gamma_{N1}, \tau_{N1})$  to final goal of this incremental analysis  $(\gamma_N, \tau_N)$  changes  $\Delta \gamma_1, \Delta \gamma_2, \Delta \gamma_3, \cdots$  in the process of iteration by, for example, initial stress method. However, the program always input strain increment from the beginning of incremental analysis,  $\Delta \gamma = \Delta \gamma_1 + \Delta \gamma_2 + \Delta \gamma_3$  in the case IITER=3 in Fig. 1.1. Stress and strain, STRESS and STRAIN, are values at the beginning of this increment (value before the incremental analysis), which are replaced to be new value corresponding to strain increment.



Figure 1.1 Strain increment input during iteration analysis.

On the other hand, the program do nothing on ELPRP and ELHST, therefore the work to store necessary information in the relevant calculation is to be done by the user. Temporary storage area (which is also kept when IFLAG=3) is prepared and save necessary information. When iteration finishes, IITER=-1, temporary value is to be moved into fixed area.

Two method may be used.

i) Prepare size 2N, where N denotes minimum required array size, and put the following statement at the beginning of IFALG=6 sequence. This method have shortage that it uses large amount of temporary area.

```
IF (IITER .EQ. -1) RETURN
IF (IITER .EQ. 1) THEN
DO 100 I = 1, N
ELPRP(N+I) = ELPRP(I)
100 CONTINUE
ELSEIF (IITER .GT. 1) THEN
DO 200 I = 1, N
ELPRP(N) = ELPRP(N+I)
200 CONTINUE
ENDIF
```

ii) This method does not use much storage area, but computation work increases. Prepare temporary required size N by declare statement

DIMENSION WRK(N)

Next, copy ELPRP into WRK when IITER>0, and WRK instead of ELPRP. Note that strain increment is to be stored in this area, too. When IITER=-1, recalculation is to be conducted using stored last strain increment and ELPRP active.

# 5 Storage of material property, EMAT

EMAT is used to store material property of each material type. The size is determined by the routine when IFLG=1 input.

Both EMAT(1) and EMAT(2) is used by the program, therefore, the user cannot use. They contains as follows:

EMAT(1) = Type number of material

1: spring

2: dashpot

3: beam

- 4: 2-D solid element
- 5: joint element
- 6: 3-D solid element
- 7: SH wave analysis

8: rocking

EMAT(2) = Constitutive model number

In addition, some area in EMAT is used by the program, which are shown in the table below. The user should sometimes substitute relevant value in this area.

Add.	spring	dashpot	beam	2-d solid	jointfl	3-d solid	SH wave	rocking
1		Éleme	ent type n	umber				
2		Const	itutive mo	odel number				
3	water v	viscosity		-				
4	Å@* <sup>3</sup> num	ber of ele	em	Unit weight	*3			
5	5 damping $\alpha$ or strain energy proportional damping							
6	dai	mping f	3					
7	@direction	cos			kx		kx	kx
8				ky		ky	ky	
9						kz		
10		·		JHGS <sup>2</sup>		JHGS <sup>*2</sup>		
11	N	o. of data	······					
12			Unit no.	n		n	n	

I able for address of EMA
---------------------------

Note! The user does not touch white character.

\*2 JHGS: Flag on anti-hourglass matrix.

\*<sup>3</sup> Unit weight: saturated unit weight is to be input.

# 6 Element variable, ELPRP and ELHST

Some of the address of ELPRP and ELHST are used by the program, which are stored relevantly by this subroutine.

# 7 Various element

Contents of each variables which are common is described in this section. The area which is not shown are free for the subroutine.

# 7.1 Spring

# EMAT

(1)	Material	tume	number
(1)	waterial	type	number

- (2) Constitutive model number
- (3) Flag on the dependency of water
  - =0: not dependent
  - =1: depend on the water
  - =2: depend on the other water pressure
- (4) weight per unit length
- (5) damping  $\alpha$
- (6) damping  $\beta$
- (7) permeability
- (8) porosity
- (9)
- (10)
- (11) initial modulus

# ELPRP

- (1) connection to free field
  - =0: no connection
  - =1: first node is attached to free field.
  - =2: second node is attached to free field.
- $(2)^*$  spring constant at present.
- (3) length
- (4) element number to refer pressure
- (5) effective stress ratio of referent element
- (6) initial strain
- (7) corresponding stress
- (8) initial stiffness

# 7.2 Dashpot

## EMAT

- (1) Material type number
- (2) Constitutive model number
  - =1: constant
  - =2: weighted average of several elements
  - =3: read as time history
- (3) viscosity per unit area

## ELPRP

- (1) connection to free field
  - =0: no connection
  - =1: first node is attached to free field<sup>\*1</sup>.
  - =2: second node is attached to free field.
- (2) Viscosity at present
- (3) cross sectional area

# \*1 Viscosity is computed as

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} \rho \left( w_{is} V_s + w_{ip} V_p \right)$$

# 7.3 Beam

## EMAT

- (1) Material type number
- (2) Constitutive model number
- (3)
- (4) Unit weight
- (5) damping  $\alpha$
- (6) damping  $\beta$
- (7) E
- (8) G
- (9) A
- (10) I

(11)  $A_s$  (effective cross sectional area against shear deformation.  $A_s$  denotes infinite area or no shear deformation)

## ELPRP

- (1) A
- (2) I
- (3)  $A_s$  (effective cross sectional area against shear deformation.  $A_s$  denotes infinite area or no shear deformation)
- (4) E (current value)
- (5) G (current value)
- (6) Length
- (7) E at unload = initial stiffness
- (8) G at unload = initial stiffness

# ELHST

- (1)  $M_1$  at previous step
- (2)  $M_2$  at previous step
- (3) Q at previous step
- (4) N at previous step
- (5)  $M_1$  direction of previous increment
- (6)  $M_2$  direction of previous increment
- (7) Q direction of previous increment
- (8) N direction of previous increment

(9)~(16) is used for temporary storage of (1)~(8)

# 7.4 2-D solid element

# EMAT

- (1) Material type number
- (2) Constitutive model number
- (3)
- (4) Unit weight
- (5) Damping  $\alpha$  or strain energy proportional damping
- (6) Damping  $\beta$

- (7) Permeability  $k_{x}$
- (8) Permeability  $k_y$
- (9)
- (10) Flag to use anti-hourglass matrix, which is not used in the soubruotine.
- (11)
- (12) Porosity

## ELPRP

- (1) G used in anti-hourglass mode
- (2) K used in anti-hourglass mode
- (3)
- (4) Cross ectiona area
- (5)  $nA/K_w$

# 7.5 Joint element

EMAT

- (1) Material type number
- (2) Constitutive model number
- (3)
- (4)
- (5) Damping  $\alpha$  or strain energy proportional damping=0
- (6) Damping  $\beta$
- (7) k<sub>vo</sub>
- (8)  $m_v$ , where normal stiffness is  $k_v = k_{vo} \sigma_v^{m_v}$
- (9) k<sub>Ho</sub>
- (10)  $m_{\rm H}$ , where normal stiffness is  $k_{\rm H} = k_{\rm Ho} \sigma_{\rm v}^{m_{\rm H}}$
- (11) initially internal friction angle, which is modifued to  $tan\phi$

## ELPRP

- (1) current  $k_v$
- (2) current  $k_{H}$ : tangent modulus
- (3) Length
- (4) Current  $k_{vo:}$
- (5) Current k<sub>Ho</sub>
- (6) k<sub>vo</sub>

- (7)  $m_v$ , where normal stiffness is  $k_v = k_{vo} \sigma_v^{m_v}$
- (8) k<sub>Ho</sub>
- (9)  $m_{\rm H}$ , where normal stiffness is  $k_{\rm H} = k_{\rm Ho} \sigma_{\rm v}^{m_{\rm H}}$

# 7.6 3-D solid element

# 7.7 SH wave element

# **EMAT**

- (1) Material type number
- (2) Constitutive model number
- (3)
- (4) Unit weight
- (5) Damping  $\alpha$  or strain energy proportional damping
- (6) Damping  $\beta$

## ELPRP

- (1) Volume (area with unit thickness)
- (2) K, used in anti-hourglass mode
- (3) Poisson's ratio, used in anti-hourglass mode
- (4) cross sectional area
- (5) nA/K<sub>w</sub>

# 7.8 Rocking element

## EMAT

- (1) Material type number
- (2) Constitutive model number
- (3)
- (4)
- (5) Damping  $\alpha$ , which must be always 0

(6) Damping  $\beta$ 

# ELPRP

- (1) connection to free field
  - =0: no connection
  - =1: first node is attached to free field.
  - =2: second node is attached to free field.
- (2)<sup>\*</sup> spring constant at present.
- (3) length
- (4) element number to refer pressure
- (5) effective stress ratio of referent element
- (6) initial strain
- (7) corresponding stress
- (8) initial stiffness

# STADAS

A computer program of ground and soil–structure interaction problem (2D Version)

> Manual (Version 4.02)

> > May 2002

吉田 望

#### はじめに

地盤と構造物の問題を解析するコンピュータコードはこれまでにも多く開発されています。し かし、多くのコードは例えば、圧密、地震応答、静的解析のように単一の挙動に焦点をあて、こ れのみが出来るように作られています。しかし、実際の地盤の状況は相当に複雑であり、単一の 機能ではカバー出来ないものがあります。例えば、アースダムとその周辺地盤の応力状態は建設 の過程を追いかける、いわゆる盛り立て解析を行って求める必要があります。そして、ダムに水 がためられると地下水位が変化し、伴って有効応力も変化します。そして、地盤材料の非線形性 のために、このような状態の応力状態は、先に水があり、そこで盛り立て解析を行ったものとは 異なったものとなります。また、ダムが地震を受ければ地震応答解析が必要になります。そのご、 過剰間隙水圧が消散する過程は、圧密解析により追跡するのが良さそうです。また、ダムの水位 が変わったり、掘削、盛り立てなどが行われれば、これに伴って応力状態も変化します。

このような挙動を解析しようとすれば、一つの機能しか持っていないプログラムではいくつか のプログラムを用意する必要があります。このような多くの現象を有効応力という観点から解析 できるコードはほとんどありません。一方、地盤の問題では応力状態や過去の履歴が結果に大き な影響を与えますが、プログラムを変えていては、応力状態の移行は可能でも履歴の移行は困難 です。

STADAS は静的, 圧密, 動的などの多くの問題を有効応力の原理に基づき解析できるようになっているプログラムです。STADAS では複雑な地盤の挙動を時間を追うことによって順番に解析することが出来ます。また, STADAS では実務で要求される多くの要素, 例えば, ばね, はり, 固体, ジョイント, ダッシュポットなどを用意しています。そのいずれもが非線形を考慮することが出来ます。従って, STADAS は地盤の解析のみならず, 地盤-基礎-上部構造の解析や上部構造のみの解析などにも広く用いることが出来ます。

STADAS は多次元挙動を解析することが出来ますが、使いやすくするために、それぞれ別のプログラムとしています。一次元解析ではこれまでに述べた各種の解析が要求されることはほとんどなく、実用的には地震応答解析が出来れば十分です。このために STADAS から切り出されたプログラムは DYNES という名前が付けられています。このマニュアルは二次元解析に対するものですが、SH 波の解析も可能なように設定されています。

次

はじめに		i
目	次	iii

# 第 | 編 データ入力

1	プロク	ゲラムの構成,使い方
	1.1	座表系
	1.2	要素と応力,ひずみ
	1.3	データの準備の方法4
	1.4	ファイルによる入出力
	1.5	出力
	1.6	間隙水に関する扱い
	1.7	FORTRAN 入門8
2	基本音	『分の入力
	2.1	タイトル
	2.2	基本定数
	2.3	モデル定数
3	要素物	寺性に関する入力
	3.1	要素タイプの指定
	3.2	ばね要素(要素特性番号1)14
	3.3	ダッシュポット要素(要素特性番号2)
	3.4	はり要素(要素特性番号3)21
	3.5	固体要素(要素特性番号4)26
	3.6	ジョイント要素(要素特性番号5)38
	3.7	回転ばね要素(要素特性番号6)
	3.8	SH 波解析用要素(要素特性番号7) 40
4	構造物	カデータ
	4.1	節点データ
	4.2	要素データ
	4.3	要素の幅に関するデータ46
	4.4	水に関する境界条件データ46
5	解析法	去に関する入力
	5.1	プログラムの終了
	5.2	要素の付加,境界条件の変更49
	5.3	自重・盛立解析
	5.4	掘削解析。要素を取り去る
	5.5	静的解析
	5.6	地震応答解析
	5.7	動的解析·節点加力
	5.8	地下水位の変化
	5.9	压密解析

	5.10	固有值解析	··· 77
	5.11	固定端反力の解放	··· 78
	5.12	タイトルの変更	79
	5.13	現在の状態の印刷	79
	5.14	現在の状況の出力	79
	5.15	現在の状況の入力	79
	5.16	収束判定值	80
	5.17	パラメータの値の変更	81
	5.18	不釣合力のクリアー	82
	5.19	デバッグ・・・・・・	83
6	入力デ	ータ準備のためのメモ	··· 84
	6.1	連立方程式の解法	··· 84
	6.2	係数マトリックスの作成方法	··· 84
	6.3	要素の幅	85
	6.4	全応力解析·有効応力解析	85
	6.5	砂時計モード変形	85
	6.6	解析対象モデルを読むときのファイル	86
	6.7	大気圧	86
	6.8	水に関する境界条件	86
	6.9	単位体積重量	87
	6.10	Rayleigh 減衰	88
	6.11	曲線型応力-ひずみ関係	89
	6.12	Masing 則	89
	6.13	折れ線型応力-ひずみ関係	90
	6.14	変位の出力	90
	6.15	初期状態の設定	90
	6.16	要素の飽和,不飽和	91
	6.17	自由地盤との連結	92
	6.18	初期剛性法に用いる剛性	93
	6.19	非線形解析の方法	93
	6.20	ジョイント要素	94
	6.21	ばね要素の剛性	94
	6.22	ばね要素の有限変形フラグ	95
	6.23	はり要素の断面力	95
7	エラー	メッセージ	98
8	補助ブ	゜ログラム・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	· 100
	8.1	PCUP	· 100
	8.2	PC-Node	· 101
	8.3	PC-Elem	102
	8.4	STADAStoPOSTEQ	103
9	バージ	ョンアップ ·····	· 104

## 第Ⅱ編 理論

7.3

1	液状化	、解析の基礎方程式	1
	1.1	基本量と記号	··· 1
	1.2	釣合式	3
	1.3	連続の式(質量保存の式)	··· 4
	1.4	混合体に関する基礎方程式	5
	1.5	有限要素法への定式化・・・・・	8
	1.6	境界条件	· 16
	1.7	時間に関する数値積分	· 22
2	砂時計	+モード変形	· 26
	2.1	基本条件	· 26
	2.2	要素剛性マトリックス	· 27
	2.3	砂時計モード	· 27
	2.4	剛体モードとの直交性	· 29
	2.5	一定ひずみ変位モードとの直交性	· 29
	2.6	砂時計変形モードによる剛性マトリックス	· 30
	2.7	砂時計変形モードに関する係数の決定	· 30
	2.8	三角形要素	· 32
3	1次元(	のモデルに用いられる非線形構成則	· 34
	3.1		· 34
	3.2		· 34
	3.3	履歴特性を改良した応力	· 35
	3.4	折れ緑型応刀一ひすみ関係	• 41
4	ばね要	至素	· 45
	4.1	ばね要素の作用方向	• 45
	4.2	要素の構成則	· 45
	4.3	座標変換マトリックス(Bマトリックス)	· 45
	4.4	剛性マトリックス	• 46
	4.5	構成則	• 46
5	はり要	፲素	· 48
	5.1	基本理論	· 48
	5.2	2次元解析	· 48
	5.3	3次元解析	· 49
	5.4	非線形の考慮	· 50
6	ダッシ	<ul><li>イユポット・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・</li></ul>	· 62
7	固休覀	[表	. 62
1	四叶女	- 弾性マトリックスに対すろ注音	· 63
	/.1		00

	7.4	拘束圧依存・弾性モデル	80
	7.5	流動を考慮したモデル・・・・・	81
8	ジョイ	ント要素	82
	8.1	基礎式	82
	8.2	2相系材料への適用	84
9	固有値	解析	86
	9.1	標準固有値問題への変換	86
	9.2	モード比例減衰	87
	9.3	ひずみエネルギー比例減衰	89

## 1 プログラムの構成, 使い方

この章では、STADAS を使う上での基本的な事項、STADAS の使い方等を説明する。

#### 1.1 座表系

STADAS では、2次元解析では、y座標を鉛直方向の座標軸と決めている。すなわち、座標軸の 正方向は、次のように決められている。



## 1.2 要素と応力, ひずみ

#### (1) 固体要素

STADASでは、4節点アイソパラメトリック要素と、SH 波解析に用いられる8節点アイソパラメトリック要素を縮合した4節点アイソパラメトリック要素の2種類が固体要素(Solid Element)として利用可能である。地盤の解析を主な目的としている STADASでは、地盤解析の慣例に習い、圧縮を正に取るような定式化をしている。この点、通常の有限要素法とは向きが異なるので、注意が必要である。x-y平面上の応力を例に取れば、応力とひずみの正の向きは図1.2.1のようである。 圧縮を正に取ったことによって、せん断応力とせん断ひずみの向きも通常の引っ張りを正にとる符号の約束とは反対になっていることに着目されたい。また、図に示されるように、ひずみとしては工学ひずみを用いている。工学ひずみは通常のテンソル解析解析に用いられるテンソルひずみと比べると、引っ張り、圧縮成分は同じだが、せん断ひずみの大きさが倍である(式((1.2.1)、(1.2.)参照)



図1.2.1 応力とひずみの正の向き

(1.2.1) 
$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \qquad \overline{\tau} \checkmark \checkmark \varkappa \lor \overline{\tau} \overleftrightarrow{\tau}$$

(1.2.2) 
$$\gamma_{xy} = -\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$
 工学ひずみ

SH 波要素は、特殊な要素で、2次元 SH 波解析をするとき専用に作られたものである。2次元解 析の地盤を x-y 平面で定義したとすると、SH 波は、z 方向に変位成分を持つ波動である。ダイレ タンシーが起こると SH 波の進行に伴って、x、y 方向の変位成分が現れ、全体としては3次元的な 挙動となるので、3次元解析を行わなければならないが、SH 波の進行に伴って、地盤にはせん断 変形しか生じないとすれば、変位成分は1節点につき1方向(z 方向)のみであり、2次元解析とし て扱うことが出来る。この場合、応力成分は、 $\tau_{xx}$ 、 $\tau_{y}$ の二つのみであり、その正の向きは図1.2.2 のように表される。



図1.2.2 SH 波解析時の変形と応力

(2) 1次元要素

1次元要素とは、ばね、ダッシュポットの様に二つの節点と一つの剛性(減衰係数)で定義される要素である。この要素では、一般には図1.2.3に示すように、節点1(要素の定義の際、最初に指定した節点)から節点2(要素の定義に際最後に指定した節点)に向かう方向を方向余弦に取る。つまり、方向余弦ベクトル{T}を式(1.2.3)のように定義する。

 $(1.2.3) \qquad \{T\} = \{\cos\theta \quad \sin\theta\}^{\mathrm{T}}$ 

この時,二つの節点が離れる側(ばねで言えば引っ張りを受ける側)の変位が生じる向きが正の 方向となる。

方向余弦として、二つの節点を結ぶ以外の向きを指定することも出来る。例えば、せん断に作 用させるため、二つの節点を結ぶ向きに直交する方向とか、ある座標軸の方向を向けるとかが可 能である。二つの節点が同じ座標値として定義されることも当然考えられる。この場合には、二 つの節点の相対変位が、定義した方向余弦の方向に生じたときに、応力と変位が正となる。



## (3) はり要素

はり要素の一般化応力(モーメント M, せん断力 Q, 軸力 N)の正の方向は、図1.2.4のように 決められている。対応する一般化ひずみの正の向きも同じ方向である。



図1.2.4 はり要素の一般化応力、一般化ひずみと正の向き

## (4) ジョイント要素

ジョイント要素の正の向きは、固体要素と同様に圧縮が正になることを前提として決められている。図1.2.5に正の向きを示す。



図1.2.5 ジョイント要素の応力とひずみの正の向き

#### 1.3 データの準備の方法

この節では, STADAS に入力する, データをどのように作っていくかを説明する。データの並び方は, 基本的には, 図1.3.1の様になる。



図1.3.1 STADAS のデータの並び方

まず用意するのが、作業の全体に共通するデータである。問題のタイトル(プリント出力の最 初の部分で印刷される)に引き続き、基本的な定数として、係数マトリックスの作り方、全応力・ 有効応力の区別、砂時計モード変形の考慮の有無といった、以下の解析で用いる基本的な項目を 入力する。入力法は、2.2項に示されている。また、6章の対応する部分には解説が載せられてい る。

基本定数に続き,解析対象モデルを入力する。用意するデータは,解析に用いる要素特性(要素の種類と構成則),節点データ,要素データ,および水に関する境界条件である。これらのデ ータの前には、モデル定数カードとして、それぞれのデータの数を入力する。節点データと要素 データはユーザーが指定したファイルから読み込まれる。これらのデータの入力により、プログ ラムはどのようなモデルが解析されるかを認識すると共に、計算に必要な容量を確保する。

STADAS では、dynamic allocation 方式で計算に必要な記憶領域を確保する方法を取っている。 つまり、計算に必要な記憶領域のために、一つの大きな配列を用意しておき、必要に応じてそれ を切り分けて使うわけである。この様な使い方は、記憶領域を最も効果的に使う方法であると共 に、あらかじめ節点数や要素数に制限を設ける必要がないので、小さいコンピュータでも大きい コンピュータでも使え、かつ、そのマシンの許す限りのモデルを解析できるという特徴がある。 解析対象モデルを読み込んだときに、STADAS は dynamic allocation をするための各変数のサイズ を決定する。したがって、一旦そのサイズを決めると、それより大きいサイズを解析に使うこと は出来なくなる(小さいサイズの解析は可能)。

解析のために必要な基本的なデータを用意した後、必要な解析法を選ぶ。STADAS は主に地盤の解析を行なうことを想定して全体構成が作られている。応力の定義が圧縮が正になっているのもそのような理由からであった。解析の手順もこの様な状況に対応したものとなっている。

地盤の解析では、解くべき対象モデルが決まっていて、それだけを解けば終わりということも あるが、解くべき対象モデルが変化する、異なる外力が作用することも普通である。例えば、ダ ムを作るときを考えてみると、ダムの堤体部分を作り、水をためる(このため、有効応力が変化 する)というプロセスがある。さらに、完成した後に地震が来たとすれば地震応答解析が必要で あるし、そこで発生した過剰間隙水圧の消散に伴う沈下量を求めようとすれば、地震応答解析を 継続して行なうより地震終了後に圧密解析を行なったほうが効率的である。また、途中で外力を 作用させることもあるし、掘削を行うこともある。STADAS ではこれらの問題を順を追って解析 できるようになっている。この過程を追いかけるのが、解析法を選ぶことと対応している。つま り、解析対象モデルの入力が終った後、時間の経過の順を追って、必要な解析を指示する。

この様な事情から、最初に節点および要素を入力したときには、それらは単に将来使う可能性 があるということをプログラムが理解しているという事に注意が必要である。設定しなかった節 点や要素を後で使うことは出来ないが、設定したものを使う、使わない、一旦使ったものを再び 使わなくするなどはユーザーがデータで指定することになる。この処理をこのマニュアルでは、 要素の活性化(掘削など要素を消去するの場合には不活性化)という用語で引用している。

要素を活性化させる方法は二つあり、一つは、「要素の追加、境界条件の変更」であり、要素の応力、ひずみなどがあらかじめ分かっているときに用いる。もう一つは「自重、盛立解析」で、応力が0(または微小値)の状態から出発し、自重による変形を求めながら解析を行なうものである。一方、要素を不活性化させる方法は「掘削解析」である。

このようにして要素を活性化(不活性化)させれば、使用する節点は自動的に決まるので、特 に節点の活性化(不活性化)の必要はない。ただし、節点の自由度や水の境界条件については変 更したい場合がある。その場合には、「要素の追加、境界条件の変更」で変更することができる。

現在選択できる解析の種類として次のものがある。その入力法については、5章で詳しく説明されている。

要素の追加,境界	新しく使い要素を活性化させ、初期応力を与える。土骨格や、水に関する
条件の変更	境界条件を変更する。
自重・盛立解析	新しく使う要素を活性化させ、その自重を外力として加え静的解析を行
	う。有効応力解析で飽和した部分では、先に水位が変化し、水中に水を投
	入したイメージで外力をを変化させる。
掘削解析	要素を不活性化させる。
静的解析	単調または繰り返しの、変位または力を与えた静的解析を行う。有効応力
	解析では排水(定常状態),非排水(瞬時の載荷)のどちらかを指定する。
地震応答解析	地震が作用したの解析を行う。
動的解析	点加振で動的な力または変位が作用する場合の解析。
圧密解析	過剰間隙水圧の消散解析を行う。
固有値解析	固有値解析を行う。
地下水位の変更	地下水位が変化したときの応力状態を求める。
構成則	構成則に用いるパラメータの値を変更する。

#### 1.4 ファイルによる入出力

STADAS は FORTRAN という言語で書かれている。

STADAS は、データの入力には標準的な入力ディバイスを、出力には標準的な出力ディバイス を用いている。標準的な入力ディバイスはカードイメージの入力で、一行が80文字以内のデータ である。2章以後の説明では、『カード入力』の用語で呼ばれることもある。標準的な出力ディバ イスは FORTRAN の印刷仕様に従って出力されるものである。

STADAS では、これ以外にもファイルを使用する。すなわち、プログラムが使用する作業領域 としてのファイル、入力の補助に使われるファイル、時刻歴など解析の解析結果を出力するため のファイルなどである。

ファイル名を入力する場合、次のような方針で扱われる。

入力に用いられるファイルは、ファイル名がブランクであれば、それは標準的な入力ディバイ スを指定したのと同じ事になる。2章以降の入力に関する説明では、プログラムが読み込む順番で データの入力方法が説明されているので、標準的な入力ディバイスを指定したときには、他のカ ードと同様、その場所で入力データを用意する。この場合、一行に80文字以上のデータは読むこ とが出来ないので、FORMATの作成のときには注意されたい。また、標準的な入力ディバイス以 外のディバイス(ファイル)が指定されたときには、必要なデータの後に不必要なデータがある ときには(次にそれらを読みに行く指令を出さない限り)プログラムの実行に支障はないが、標 準的な入力ディバイスから読み込まれるときには、カードの量は丁度プログラムが要求するもの でなければならない。

標準的な入力ディバイス以外のファイルを入力ファイルとして使用するとき、一般に必要なデ ータを読み終わった後、プログラムはそのファイルをクローズするので、再び同じファイルを入 カファイルとして指定したときには、もう一度ファイルの最初からデータを読みに行く。しかし、 場合によっては同じファイルで次々と異なる種類のデータが入っており、これを読みに行きたい ときがあり、この場合にはファイルをクローズすると都合が悪い。このような時には、入力ファ イルを指定するとき、ファイル名の後ろに\*をつけておく。そうすればプログラムはデータを読み 込んでもファイルをクローズしない。このことは、ファイル名として\*が使えないことを意味して いるので、この点についても注意されたい。

出力ファイルには、次回の再計算のための状態出力のファイルと、時刻歴などの出力用ファイ ルがある。これらは、最初に出力ファイル名の入力を指定する時にブランクが指定されると、そ れぞれ、『fort.20』『fort.21』が割り当てられる。二度目以降の入力でブランクが与えられれば、 前と同じファイル名を指定したのと同じ事になる。前と異なるファイル名が指定されれば、一旦 前のファイルをクローズし、新しい出力ファイルをオープンするので、異なる計算結果を異なる ファイルに割り当てることが可能である。ここで、一旦ファイル名を入力し、次に違うファイル 名を入力し、再び前と同じファイル名を入力すると、前に出力したファイルの内容は消されてし まうことに注意されたい。

#### 1.5 出力

STADAS の計算結果の出力は、二つのファイルに行われる。二つの出力の違いは、一方が同時 刻や同じ計算ステップにおける全ての応答値を出力するファイルであり、標準的な出力ディバイ スに FORTRAN の印刷仕様に従って出力されのに対し、もう一つは時刻歴応答や全計算ステップ 応答を出力するためのファイルであり、書式なしファイルとしてユーザーが指定した名称のファ イルに出力されることである。

前者(標準的な出力ディバイスへの出力)では,計算に用いた各種条件などと最終の計算結果, 最大応答値などが標準的に出力される。どのようなものが出力されるかは,第III 編で例題を用意 しているので,それを参照されたい。また,先にも述べたように,指定した時刻やステップ数の 全応答値を出力したいときにも同じファイルに出力される。これら途中経過の応答値は標準的に は出力されないが,ユーザーが指定することにより,何ステップおき,指定したステップ数のみ, 全ステップなどの方法により出力することが出来る。

時刻歴などが欲しい場合には、各解析の入力時に結果が欲しい節点番号や要素番号を指定する 必要がある。これらのデータの入力方法は、通常、結果が欲しい節点の数と要素の数を入力し、 その後節点番号や要素番号を入力するというシークエンスとなっている。要素数や節点数を0にす ればそれらの結果は出力されない。また、負の値(値そのものには意味がない)を入力すれば、 全ての節点(または要素)の応答値を出力する事になる。

節点を指定すれば、その節点の応答値が全て出力される。静的解析や圧密解析では節点変位、 動的解析では更に速度や加速度が出力される。一方、要素を指定すれば、その要素の状態量、例 えば応力とひずみが全て出力される。節点応答値、要素状態量のいずれも特定の成分のみを出力 することは出来ないが、これはデータ作成の煩雑さを避けるためである。

これらの応答値は、書式なし形式で、倍精度実数として出力される。したがって、結果を読み 取るには簡単なプログラムを作成する必要がある。どこにどのようなデータが格納されているか という情報は、各解析の始めに標準的な出力ディバイスにアドレス表が印刷されるので、それを 参照する。これらのデータを取り出す簡単なプログラムの例を以下に示す。なお、8章でいくつか の補助プログラムを示しているので、併せて参考されたい。

```
Program to retrieve the result of the analysis
С
      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A - H, 0 - Z)
      DIMENSION ND(100), ADATA(100), BDATA(1000)
      CHARACTER*30 FIN, FOUT
С
      Number of array should be changed depending on the data
      READ (5, 500) NDATA, FIN, FOUT
      OPEN (UNIT=10, FILE=FIN, FORM='UNFORMATTED', STATUS='OLD')
      OPEN (UNIT=11, FILE=FOUT, FORM='FORMATTED', STATUS='NEW')
      READ (5, 510) (ND (J), J=1, NDATA)
      NN = 1
      DO 10 I = 1, NDATA
      NN = MAXO(NN, ND(I))
   10 CONTINUE
   20 READ (10, END=100) (BDATA (J), J=1, NN)
      DO 30 I = 1, NDATA
      ADATA(I) = BDATA(ND(I))
   30 CONTINUE
      WRITE (11, 600) (ADATA (J), J=1, NDATA)
      GO TO 20
  100 CLOSE (UNIT=10)
      CLOSE (UNIT=11)
      STOP
  500 FORMAT(15, 5X, 2A30)
  510 FORMAT(1615)
  600 FORMAT (1P10E12, 5)
      FND
```

ここで,最初のREAD 文では出力するデータ数,入力ファイル名(計算結果の格納されているファイル名),出力ファイル名を入力する。また次のREAD 文ではアドレスの番号を入力する。

なお,計算結果のファイル名は,初期には『fort.21』に設定されているが,ユーザーは適当な時 期にその名前を変更することによって,異なる解析に対して異なるファイル名を割り当てる事が 可能である。

#### 1.6 間隙水に関する扱い

土と水の2相系材料に対する解析では、間隙水圧は静水圧と過剰間隙水圧の二つの成分に分けら

れる。第 II 編の理論で示すように、両者の違いは、解析時に重力などの時間に依存しない外力を 考慮するか考慮しないかだけの違いである。

プログラムでも、場合によって静水圧を扱ったり過剰間隙水圧を扱ったりしており、出力に際 しても、ケースに応じてどちらかが出力される。したがって、ユーザーは出力がどちらの出力で あるかを意識して結果を判断する必要がある。

過剰間隙水圧による出力が行われるのは、次の場合である。

·地震応答解析,動的解析

· 圧密解析

・非排水条件の静的解析(排水条件では過剰間隙水圧は0である)

次のケースでは,排水条件が指定されれば静水圧が,非排水条件が指定されれば過剰間隙水圧 が出力される。

・自重、盛り立て解析

・掘削解析

·地下水位変化

#### 1.7 FORTRAN 入門

STADAS が書かれている FORTRAN は科学技術用のプログラムに多く用いられているコンピュ ータ言語である。ユーザーは最低限いくつかの FORTRAN に関する知識が必要である。

#### 1.7.1 プログラムの実行

最近のコンピュータでは FORTRAN の実行を簡易にするものもあるが、そのような機能は機種 によるのでここでは記述しない。一般に FORTRAN を実行するのはコンソールからのコマンドラ インである。例えば、Windows を使うのであれば、c:¥command.com (または、c:¥Windows¥command.com)を実行する。すると、次のような画面が現れる。

WE-DOS プロンプト	_ <b>_ _</b> ×
ing 🖸 🖾 📾 🗗 🗛	
Wierscoft (P) Windows 99	
(C)Copyright Microsoft Corp 1981-1999.	
U: ¥>	

ここで、「D:¥>」は使用している環境により違うことがある。D:¥は作業するためのディレクトリーであるので、一般にはデータが入っているディレクトリーに変える必要がある。例えば、D:¥FORTRANに変えたいのであれば、次のような入力をし、Return キーを押す。

cd D:¥FORTRAN

すると,

D:¥FORTRAN>

の画面が現れるので、次の命令を入力していくことになる。

プログラムを実行させる一般的なコマンドは次のようである。

STADAS < File\_1 > File 2

ここで, File\_1は標準的な入力ディバイスで, 具体的にはデータが入っているファイル名である。 一方, File 2は一般的な出力が行われるファイル名である。

ただし、この方法では、D:¥FORTRAN というフォルダに STADAS.exe という実行ファイルが入っている必要がある。もし、このプログラムが D:¥PROGRAM というフォルダに入っているのであれば、命令文は次のようになる。D:¥PROGRAM 以外の時はこの部分を適当に変更する。

#### D:¥PROGRAM¥STADAS < File 1 > File 2

ー々長いフォルダを書くのが面倒な時には、プログラムの入っているフォルダをパス指定して おくことが考えられる。

#### SET PATH=D:¥PROGRAM;"%PATH%"

ここで、「;"%PATH%"」の部分は、これまでに指定したパス指定に加えて新しいパスとして D:¥PROGRAM を追加するという意味である。すると、最初に STADAS を入力するだけでプログ ラムを実行することが出来る。また、上記の命令を autoexec.bat に加えておけば、再起動の度に指 定する必要はなくなる。

#### 1.7.2 書式

FORTRAN で用いられるファイルには、書式付きと書式なしがある。書式付きは ASCII コード で書かれているもので、いわゆるテキストファイルである。標準的な入出力ディバイスはもちろ んこの形式である。これに対して書式なしファイルはバイナリーで書かれているので、同じ内容 を記述するのにファイルサイズは小さくなるが、内容を直接見ることは出来ない。内容を取り出 すには、書かれた書式と同じ書式で読みとる必要がある。

#### 1.7.3 FORMAT

FORTRAN では、書式付きファイル(テキストファイル)に書かれている内容を判断するため に、FORMAT という特殊な書き方がある。FORMAT はデータの入力でも使われているので、ユ ーザーは最低限のことは理解する必要がある。例えば、テキストファイルに

#### 56 5.64 2.65489 5.016 data qqq

という行があったとする。ここには I, A, B, C, Z という変数の値が書いてあることがわかっているとしても、これだけではどの様に読めば良いかわからないので、読み方を指示しようとするのが FORMAT である。FORMAT は例えば次のようである。

(I5, 2X, F6.0, 2F7.3, A9)

この意味は、(左から)最初の5カラムには整数が、次の2カラムは意味のないデータが、次の6 カラムには実数が、7カラムには実数の実数が二つ、次の9カラムには文字が書いてあるというこ とである。I, X, F, A などはデータの種類を表し、数字はこれを桁数や繰返し数などを表してい る。なお、必ず両端が括弧でくくられている必要がある。

①I 変換:整数を読み込む。I の後の数字はカラム数。必ず数字をカラムの右寄せで入力。例えば I5と書いて「bb12b」(b はブランク)を入力すると、12と読むケースと120と読むケースがある。これは、FORTRAN のコンパイラーによって異なるので、安全のためには右寄せにするのがよい。

②X変換:データを読み飛ばす。Xの前の数字が読み飛ばすカラム数。

③F変換:実数を読む。Fの次の数字が有効カラム数。小数点と次の数字は、データに小数点が 無いときの処理であるが、小数点があれば意味はなくなる(ただし、入力は必要なので、つねに、

「.0」としておくのが安全)

④A変換:文字を表す。Aの次の数字が文字数になる。

なお、これらいずれでも、数字は一桁である必要はなく、二桁以上でも構わない。例えば、F15.3 という入力は可能である。

これ以上の高度な使い方は FORTRAN の文法書を参考にされたい。最低限これだけの知識でプ

ログラムを実行することが出来る。また、Windows 以外についても基本的には同じ使い方が出来るが、コマンド画面を出す方法は異なっている。

#### 2 基本部分の入力

STADAS の構成や,使い方の原則については,1章で説明した。データ入力は,2~5章に示されている。2章では,全体の流れ,3章では要素や材料の特性,4章では構造物の特性,5章では各種の解析法に関する入力方法を示している。

マニュアルの使い易さという観点から、このマニュアルでは2~5章の入力データの個々の変数 の説明は簡潔に示し、詳細な説明が必要な変数や用語は6章で詳しく説明するという方針を設けて いる。6章とこの章の変数名の対応を取るために、6章で説明のある変数や用語は、[]で囲った上 添字を付けて示されている。例えば「A<sup>[6.17]</sup>」という説明があれば、Aという変数(または用語) の詳細な説明が6.17節に示されていることを示している。引用は6章以外の章の事もある。

入力データには、標準的な入力ディバイス(カードイメージ)から読み込まれるデータと、その他のユニットから読み込まれるデータがある。後者はファイル名を入力することによって行われる。これに関しては、1.4節に説明があるので、参照されたい。

2.1 タイトル

## TITLE (A80)

1~ 80 TITLE 問題のタイトル。結果の印刷の際用いられる。

#### 2.2 基本定数

NSOL, N	NCN	MAT, NEFFE	E, IHGS, GACC, GAMAW, ATM, BUWAT, FIN (I4, 3I2, 3F10.0, A20)
1~	4	NSOL <sup>[6.1]</sup>	係数マトリックスの作成方法
			=1:対称マトリックス
			=2:非対称マトリックス
$5\sim$	6	NCMAT <sup>[6.2]</sup>	解析に用いる連立方程式の解法
			=1:対称バンドマトリックス(掃き出し法)
			=2:非対称バンドマトリックス(掃き出し, Partial pivoting)
			=3:非対称バンドマトリックス(掃き出し法)
			(注)NCMAT と対称,非対称の関係が一致している必要がある。
$7\sim$	8	NEFFE <sup>[6.4]</sup>	解析タイプ
			=0:全応力解析(水に関する自由度がない。)
			=1:有効応力解析
9∼ :	10	IHGS <sup>[6.5]</sup>	砂時計モードの考慮
			=0:考慮しない(抗砂時計マトリックスなし)
			=1:考慮する(抗砂時計マトリックスあり)。
$11 \sim 2$	20	GACC	重力加速度。標準值:9.80665 m/s
$21 \sim 3$	30	GAMAW	水の単位体積重量。標準値:1gf/cm <sup>3</sup> =1tf/m <sup>3</sup> =9.8kN/m <sup>3</sup>
$31 \sim 4$	40	$\mathrm{ATM}^{[6.7]}$	大気圧。標準大気圧=760mmHg= 101325Pa= 1.03323kgf/cm <sup>2</sup> = 10.3323tf/m <sup>2</sup> =
			101.325kN/m <sup>2</sup>
$41 \sim 3$	50	BUWAT	水の体積弾性係数。標準値: $2.2222 \times 10^6$ kN/m <sup>2</sup> = $2.2676 \times 10^5$ tf/m <sup>2</sup> =
			2.2676×10 <sup>4</sup> kgf/cm <sup>2</sup> 。材料タイプごとに指定することも可能である。材料
			タイプの入力の際入力がなかったときにはこの値が用いられる。
$51 \sim 7$	70	FIN <sup>[6.6]</sup>	4.1, 4.2節の節点, 要素情報を読み込むためのファイル名。ブランクのと
			きは標準的な入力ディバイス、すなわちカード入力が割り当てられる。

## 2.3 モデル定数

### NDPT, NELM, NMAT, NWIDTH, NBC0 (10I5)

- 1~ 5 NDPT 節点数
- 6~ 10 NELM 要素数
- 11~15 NMAT 要素特性の数。ここで,要素特性とは,要素の種類と材料特性の数のことである。STADAS では,要素タイプと,材料特性(構成則など)を合わせた特性のことであるので,ここで入力するのはこのペアの数である。ここで,材料特性は,構成則の種類などが同じでもパラメータの数値が異なれば,異なる材料として計算する。
- 16~20 NWIDTH 単位幅以外の幅を持つ要素を入力するためのカードの数(同じ幅で番号の連続している要素群は一枚のカードで指定できる)<sup>[6.3]</sup>
- 21~25 NBC0<sup>[6.8]</sup> 水圧に関する境界条件を与える辺の数の最大値で,有効応力解析の時の み意味がある。全応力解析では0を入力する。

ここで言う境界とは,値を指定する境界のことで,排水,非排水を問 わず,値が0の境界は含まない。これに関し,6.8節の解説は重要なので, 必ず読んでいただきたい。

水の境界条件は、4.4節で入力する。その時には、値が0の境界も含め て境界の値を指定するが、NBC0として入力するのはあくまで値が0以外 の境界の数であることに注意されたい。なお、実際に使うよりも大きい 数を入力することは、プログラムがより大きい作業領域を取るだけなの で、実用上何の問題もない。

## 3 要素特性に関する入力

この章では,要素特性,すなわち,要素タイプと材料特性(構成則など)の入力方法について 説明する。

この章では、NMAT 組の要素タイプと材料特性に関するデータが必要である。要素特性番号は1から NMAT まで順番に続ける。

## 3.1 要素タイプの指定

-

IMAT, IELM, ICONST	(3I5)
--------------------	-------

$1\sim$ 5 IMAT	材料番号。1から順番に並んでいること。
$6\sim 10$ IELM	要素タイプを示す番号(1~7)
	=1:ばね要素
	=2:ダッシュポット要素
	=3:はり要素
	=4:固体要素
	=5:ジョイント要素
	=6:回転ばね(ロッキングばね)
	=7:SH波要素 <sup>[1.2]</sup>

11~15 ICONST 構成則の種類。要素タイプごとに異なる。

ICONST	ばね	ダッシュポ ット	はり	4節点固体	ジョイント	ロッキング	SH 波
1	弾性	一定	弾性	弾性	弾性	弾性	弾性
2	曲線	要素依存	折れ線	吉田モデル		曲線	
3	折れ線	時刻歷	曲げと軸力	飛田・吉田		折れ線	
4	吉田モデル			吉田モデル		吉田モデル	
5	大ひずみ			拘束圧依存弾性			
6	要素依存			単純二次元弾性			
7				体積ひずみ考慮			
8							
# 3.2 ばね要素 (要素特性番号1)

ここでは、ばね要素(要素特性番号1)の入力法を述べる。

# 3.2.1 弾性:構成則番号1

弾性のばね要素である。

# UWEI, AK, ALPHA, BETA, IFDSP (4F10.0, I5)

$1 \sim 10$	UWEI <sup>[6.9]</sup>	単位長さ当たりの	重量	
$11 \sim 20$	AK <sup>[6.21]</sup>	単位長さ当たりの	ばね定数	
$21 \sim 30$	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰の $\alpha$	(質量比例)	またはひずみ比例減衰
$31 \sim 40$	BETA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰の $\beta$	(剛性比例)	
$41 \sim 45$	IFDSP <sup>[6.22]</sup>	有限変形フラグ		
		=0:微小変形,	=1:有限変	形

# 3.2.2 曲線型-1:構成則番号2

数式のの骨格曲線と Masing 則を用いる構成則

UWEI, AK, ALPHA, B	ETA, IFDSP	(4F10.0, I5)	(最初のカード)
$1 \sim 10$ UWEI	単位長さ当たりの重量	-	
$11 \sim 20 \text{ AK}^{[6.21]}$	単位長さ当たりのばねぽ	定数(弾性定	数)
$21 \sim 30 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	<sup>]</sup> Rayleigh 減衰のα(質量	比例)または	<i>tひずみ比例減衰</i>
$31 \sim 40 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰のβ (剛性	比例)	
$41 \sim 45 \text{ IFDSP}^{[6.22]}$	有限変形フラグ		
	=0:微小変形, =1:7	有限変形	
ITP, NREV, PAR1, PA	R2, PAR3 (2I5,3F10.0)	(2枚目のテ	データ)
$1\sim$ 5 ITP	構成則の種類 <sup>[6.11]</sup>		
	=1:Ramberg-Osgood モ	デル δ=	$=\frac{P}{K}\left(1+\alpha\left(\frac{P}{P_{y}}\right)^{\beta-1}\right)$
	=2:双曲線モデル	P	$=\frac{K\delta}{1+\frac{\delta}{\delta_{y}}}$
	=3:Davidenkov モデル	<i>p</i> =	$= K\delta \left(1 - \left(\frac{\left(\frac{\delta}{\delta_{y}}\right)^{2B}}{1 + \left(\frac{\delta}{\delta_{y}}\right)^{2B}}\right)^{A}\right)$
$5 \sim 10 \text{ NREV}^{[6.12]}$	除荷点を記憶する最大値	直(最大100。	通常は20~40の間)
$11 \sim 20$ PAR1	骨格曲線を決めるための	Dパラメータ	(下表参照)

 $21\sim 30$  PAR2

骨格曲線を決めるためのパラメータ(下表参照) 

	ITP	PAR1	PAR2	PAR3
Ramberg-Osgood モデル	1	α	β	$P_y$
双曲線モデル	2	$\delta_y$	_	_
Davidenkov モデル	3	$\delta_y$	A	В

# 3.2.3 折れ線型-1:構成則番号3

Tri-linear 型の骨格曲線を持つ応力ーひずみ関係

UWEI, AK, ALPH	A, BETA, IFDSP (4F10.0, I5) (最初のカード)
$1 \sim 10$ UWEI	単位長さ当たりの重量
$11 \sim 20 \ \mathrm{AK}^{[6.21]}$	」 単位長さ当たりのばね定数
$21\sim 30$ ALPH	A <sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰のα(質量比例) <i>またはひずみ比例減衰</i>
$31 \sim 40 \text{ BETA}$	$^{[6.10]}$ Rayleigh 減衰の $eta$ (剛性比例)
$41\sim45$ IFDSP	[6.22] 有限変形フラグ
	=0:微小変形, =1:有限変形
ITP, G2, G3, T1, T	2,PWR (I5,5X,5F10.0) (2枚目のデータ)
$1\sim$ 5 ITP	モデルの種類 <sup>[6.13]</sup> を表す番号
	=1:Tri-linear 弾性モデル
	=2:Bi-linear モデル
	=3: Tri-linear モデル
	=4:Bi-linear slip モデル
	=5: Tri-linear slip モデル
	=6:原点指向モデル
	=7:原点・最大点指向モデル
	=8:最大点指向モデル
	=9: Degrading tri-linear(深田)モデル
	=10:Degrading tri-linear(野村)モデル
	=11: Degrading tri-linear (武藤)モデル
	=12: Degrading tri-linear (武田)モデル
$11\sim 20~G2$	第2勾配の初期剛性に対する比。1>G2>0
$21\sim 30~G3$	第3勾配の初期剛性に対する比。G2>G3>0
$31\sim40$ T1	最初の折れ点の荷重
$41\sim50~T2$	第2折れ点の荷重
$51\sim 60$ PWR	武田モデルのみ必要で, $\delta_r/\delta_{\scriptscriptstyle max}$ に対するべき。 $0$ であれば $0.4$ にする。
	<u>ה</u>
	T2 $1^{G_3 \times G_{max}}$
	T1
	Gmax
	<b>2</b> 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2

# 3.2.4 吉田モデル:構成則番号4

骨格曲線と履歴曲線を別に定義するモデル。

UWEI, AK, ALPHA, BETA, IFDSP
 (6F10.0, IS)
 (最初のカード)

 1~10
 UWEI
 単位長さ当たりの重量
 単位長さ当たりの重量

 11~20
 AK<sup>[621]</sup>
 単位長さ当たりのばね定数(弾性定数)

 21~30
 ALPHA<sup>[610]</sup>
 Rayleigh 減賣のa(質量比例)
 またはひずみ比例減衰

 31~40
 BETA<sup>[610]</sup>
 Rayleigh 減賣のa(質量比例)
 またはひずみ比例減衰

 41~45
 IFDSP<sup>[622]</sup>
 有限変形フラグ
 =0: 微小変形, =1: 有限変形

 11-7
 5
 IFD
 構成則の種類<sup>[6,11]</sup>

 1-7
 5
 ITP
 構成則の種類<sup>[6,11]</sup>

 =1:
 双曲線モデル
 
$$P = \frac{K\delta}{1 + \frac{K\delta}{P_y}}$$
, Masing 則

 =2:
 Ramberg-Osgood モデル
  $\delta = \frac{P}{K} \left( 1 + a \left( \frac{P}{P_y} \right)^{p^{-1} } \right)$ , Masing rule

 =3:
 拡張双曲線モデル
  $P = \frac{K\delta}{1 + R_f \frac{K\delta}{P_y}}$ ,  $h = h_{max} \left( 1 - \frac{K_{acc}}{K} \right)$ 

 =4:
 Hardin-Drnevich モデル
  $P = \frac{K\delta}{1 + \frac{K\delta}{P_y}}$ ,  $h = h_{max} \left( 1 - \frac{K_{acc}}{K} \right)$ 

 =5:
 吉田モデル
  $K_{acc} < K_{acc} < \delta$ ,  $h < \delta$ 関係を入力。K<sub>sec</sub> は割線定数, h は等価減衰比

 5~10
 NREV<sup>[612]</sup>
 除荷点を記憶する最大値 (最大値 (最大値 0)
 通常は 20~40 の問)

 11~20
 PAR1
 骨格曲線を決めるためのパラメ - タ (下表参照)
 20~40 の問)

 21~30
 PAR2

ITP	PAR1	PAR2	PAR3
1	$P_y$	1	1
2	$P_y$	α	β
3	$P_y$	$R_{f}$	$h_{max}$
4	$P_y$	$h_{max}$	-
5	N		_

ITYP=5の時には、さらに次の入力が必要である。

(STRN(I), I=1, N) (8F10.0)

ひずみ(小さい順に入力する)

(GG0(I), I=1, N) (8F10.0)

割線定数比

(DAMP(I), I=1, N) (8F10.0)

#### 減衰定数比

## 3.2.5 大ひずみモデル:構成則番号105

地盤で大ひずみに伴う履歴特性の劣化を考慮するモデル。サイクリックモビリティ現象も表現 できる。

UWEI, AK, ALPHA, BETA, IFDSP		(4F10.0, I5)	(最初のデータ)
$1 \sim 10$ UWEI	単位長さあたりの	り重量	
$11 \sim 20 \ \mathrm{AK}^{[6.21]}$	単位長さあたりの	Dせん断弾性	定数
$21\sim 30$ Alpha	Rayleigh 減衰のa	(質量比例)	またはひずみ比例減衰
$31 \sim 40$ Beta	Rayleigh 減衰の	(剛性比例)	
$41 \sim 45 \text{ IFDSP}^{[6.22]}$	有限変形フラグ		
	=0:微小変形,	=1:有限変	形

NN, NREV, XMX, DMX, P1, P2, P3, P4 (215,6F10.0) (2枚目のデータ)

$1\sim$ 5 NN	表形式で与えるひずみ依存性のひずみの数(最大 20)
$5\sim 10$ NREV	除荷点を記憶する最大値(最大 100。通常は 20~40 の間)
$11\sim 20 \text{ XMX}$	劣化を考慮し始めるひずみ(0 のとき,最大減衰比の位置のひずみとす
	る。)
$21\sim 30$ DMX	XMX の時のひずみ値(%)。(0 のとき、プログラムが入力データから
	見つけるので、通常は0とするのが良い。)
$31\sim40$ P1	劣化を考慮するためのパラメータ
$41\sim50$ P2	
$51\sim 60$ P3	劣化を考慮するためのパラメータ
$61\sim70$ P4	劣化を考慮するためのパラメータ

(STRN(I), I=1, N) (8F10.0)

ひずみ(小さい順に入力する。実数で入力する。%ではない)

(GG0(I), I=1, N)	(8F10.0)
割約	泉剛性比
(DAMP(I), I=1, N)	(8F10.0)
減調	。 衰定数比(%で入力)

#### 3.2.6 非線形:構成則番号6

この要素は、特殊な要素で、瞬時の剛性が指定された一つないしは二つの要素の剛性に依存する。なお、依存するのは、地震応答解析直前の状態で、それ以外は指定した弾性定数のみが有効である。すなわち、ばね定数は次式で表される。

ばね定数=AK+AK1×(第1のばねの剛性低下率)+AK2×(第2のばねの剛性低下率) 依存する要素の番号はここでも入力可能であるが,後に要素番号を入力する際に要素ごとに指

定することも可能である。ただし、ばね定数については要素ごとに指定することは出来ない。

UWEI, AK, AK1, AK2,	NE1, NE2, ALPHA, BETA	(4F10.0, 2I5, 2F10.0)
$1 \sim 10 \text{ UWEI}^{[6.9]}$	単位長さ当たりの重量	
$11\sim 20$ AK	単位長さあたりのばね定数	(
$21\sim 30$ AK1	第一のばねの単位長さあた	りのばね定数

- 31~40 AK2第二のばねの単位長さ当たりのばね定数41~45 NE1第一のばねが依存する要素番号46~50 NE2第二のばねが依存する要素番号

- 51~ 60 ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の $\alpha$ (質量比例) またはひずみ比例減衰
- $61 \sim 70$  BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の $\beta$  (剛性比例)

注)NE1, NE2は通常は要素ごとに後に指定する。すべての要素で同じ番号を使いたい ときのみここで指定する。

## 3.3 ダッシュポット要素(要素特性番号2)

ここでは、ダッシュポット要素(要素特性番号2)の入力を説明する。

#### 3.3.1 一定要素:構成則番号1

VIS (F10.0)

1~10 VIS 単位断面積当たりの粘性係数。これに要素の読み込みの時に入力される 断面積を掛けたものが解析に用いる粘性係数となる。たとえば基盤のせ ん断に関する境界条件として粘性要素を使いたいのであれば、一般に、 VIS には*pV*sを入力し、このダッシュポットが負担する面積(二次元では 長さ) *l*を4.2節で要素カードを読み込むときの ALEN として用いれば、材 料としては一つの定義で異なる負担面積のダッシュポットを使うことが 出来る。

#### 3.3.2 他の要素に依存した粘性係数:構成則番号2

この要素では,以下で示すデータ以外に,要素データ読取時にもデータが必要である。3.1節の 始めで,ダッシュポット要素については,最低3個のデータを要素データ読取時に入力する必要が あることを示したが,それに加え,粘性係数を計算するために依存する節点番号を入力する必要 がある。この際,要素番号も必要であるが,これを実数として入力する。FORTRANのコンパイラ ーによっては整数を入力しても正しく判断してくれる場合もあるので,使用されるコンピュータ の性能を確認しておくのがよい。

KELM (I5)

1~ 5KELM 相加平均を取る要素の数

(NE(J),WVS(J),WVP(J),J=1,KELM) (4.2節の要素特性読取時に入力するデータ<sup>[4.2.2]</sup>)

NE(J) 要素番号 WVS(J) せん断速度に関する重み WVP(J) 粗密波速度に関する重み  $\mu = VIS \cdot AREA \cdot \sum_{J=1}^{KELM} \rho_{NE(J)} [WVS(J) \cdot V_{s,NE(J)} + WVP(J) \cdot V_{p,NE(J)}]$ 

## 3.3.3 時刻歴で入力する:構成則番号3

KDAT, KFILE (215)

1~ 5KDAT ファイルに含まれているデータの数

6~10KFILE データの格納されているファイルのユニット番号

(注) KDAT, KFILE は材料タイプ全体を通して同じものである必要がある。また,格納するとき のデータは(8F10.0) で読まれることを想定して作成する。

## 3.4 はり要素 (要素特性番号3)

ここでは、はり要素(要素特性番号3)の入力について説明する。

# 3.4.1 弾性:構成則番号1

# UWEI, E, G, ALPHA, BETA, A, AI, AS (8F10.0)

- 1~ 10 UWEI 単位体積重量
- 11~20 E ヤング係数
- 21~30 G せん断弾性定数
- $31\sim 40$  ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の $\alpha$ (質量比例)またはひずみ比例減衰
- 41~ 50 BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰のβ (剛性比例)
- 51~60 A 断面積
- 61~ 70 AI 断面 2 次モーメント
- 71~80 AS 有効せん断断面積。(0の時,∞すなわちせん断変形なしとする)

## 3.4.2 折れ線型非線形:構成則番号2

モーメント, せん断力, 軸力のそれぞれに対し独立に Tri-linear の非線形特性を定義する。

(1) 基本カード

UWEI, E, G, ALPHA, B	ETA, A, AI, AS (8F10.0)
$1 \sim 10$ UWEI	単位体積重量
$11\sim 20~{\rm E}$	ヤング係数
$21\sim 30~G$	せん断弾性定数
$31 \sim 40 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰のα(質量比例)またはひずみ比例減衰
$41 \sim 50 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰のβ(剛性比例)
$51\sim 60$ A	断面積
$61\sim70~\mathrm{AI}$	断面 2 次モーメント
$71\sim 80$ AS	有効せん断断面積。(0の時,∞すなわちせん断変形なしとする)

(2) 非線形特性の定義

MMT, JM, JQ, JM

(4I5)

$1\sim$ 5 MMT	モーメントの非線形の適用場所と剛性マトリックスの評価方法
	=0:部材中央の挙動で非線形挙動を代表させる。
	=1:1端の挙動で非線形挙動を代表させる。
	=2:2端の挙動で非線形挙動を代表させる。
	=3:1,2端それぞれに非線形挙動を考慮する。
$6\sim 10~JM$	モーメントに関する非線形性を表すフラグ <sup>[6.13]</sup>
$11\sim 15$ JM	せん断応力に関する非線形性を表すフラグ <sup>[6.13]</sup>
$16\sim 20~JM$	軸力に関する非線形性を表すフラグ <sup>[6.13]</sup>
	=0:弾性。この時は,以下の入力は意味がない。
	=1 : Tri-linear 弾性モデル
	=2: Bi-linear モデル
	=3:Tri-linear モデル
	=4:Bi-linear slip モデル
	=5:Tri-linear slip モデル
	=6:原点指向モデル
	=7:原点・最大点指向モデル
	=8:最大点指向モデル
	=9: Degrading tri-linear(深田)モデル
	=10: Degrading tri-linear (野村) モデル
	=11: Degrading tri-linear (武藤)モデル
	=12: Degrading tri-linear (武田) モデル

## (3) モーメントの非線形カード

JM>0の時のみこの項のカードが必要である。なお, MMT=0の時にはモーメントー部材の平均 曲率関係を, MMT>0の時にはモーメントー断面の曲率関係を入力する。

GM2, GM3, TM1, TM2, PWR (5F10.0)

$1 \sim 10^{-10}$	) GM2	第2勾配の初期剛性に対する比。	1.>GM2>0
-------------------	-------	-----------------	----------

11~20 GM3 第3 勾配の初期剛性に対する比。GM2>GM3>0

## 21~ 30 TM1 最初の折れ点の荷重

31~40 TM2 第2折れ点の荷重

41~ 50 PWR 武田モデルのみ必要で、 $\delta_r / \delta_{max}$ に対するべき。 $0 \rightarrow 0.4$ 



## (4) せん断力に関する非線形カード

JQ>0の時のみこの項のカードが必要である。

GQ2, GQ3, TQ1, TQ2, PWR (5F10.0)

$1 \sim 10$	GQ2	第2勾配の初期剛性に対する比。1.>GQ2>0
$11 \sim 20$	GQ3	第3勾配の初期剛性に対する比。GQ2>GQ3>0
$21 \sim 30$	TQ1	最初の折れ点の荷重
$31 \sim 40$	TQ2	第2折れ点の荷重
$41 \sim 50$	PWR	武田モデルのみ必要で、 $\delta_r / \delta_{max}$ に対するべき。 $0 \rightarrow 0.4$

### (4) 軸力に関する非線形カード

JQ>0の時のみこの項のカードが必要である。

# GN2, GN3, TN1, TN2, PWR (5F10.0)

$1 \sim 10$	GN2	第2勾配の初期剛性に対する比。1.>GN2>0
$11 \sim 20$	GN3	第3勾配の初期剛性に対する比。GN2>GN3>0
$21 \sim 30$	TN1	最初の折れ点の荷重
$31 \sim 40$	TN2	第2折れ点の荷重
$41 \sim 50$	PWR	武田モデルのみ必要で、 $\delta_r / \delta_{max}$ に対するべき。 $0 \rightarrow 0.4$

# 3.4.3 折れ線型非線形(M-N インタラクション考慮):構成則番号3

この構成則では、4枚のカードが必要である。

# (1) 基本カード

# UWEI, E, G, ALPHA, BETA, A, AI, AS (8F10.0)

- 1~ 10 UWEI 単位体積重量
- 11~20 E ヤング係数
- 21~30 G せん断弾性定数
- 31~ 40 ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰のa(質量比例)またはひずみ比例減衰

- 41~ 50 BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の $\beta$  (剛性比例)
- 51~60 A 断面積
- 61~70 AI 断面 2 次モーメント
- 71~80 AS 有効せん断断面積。(0の時,∞すなわちせん断変形なしとする)

# (2) モーメントー曲率関係非線形カード

NYL1, NYL2, MMT	, JM, NULD, JQ, GM1, GM2, PWR (615, 3F10.0)		
1~ 5 NYL1	第1折れ点に対応する降伏局面を表す点の数		
$6\sim 10$ NYL2	第2折れ点に対応する降伏局面を表す点の数		
$11 \sim 15$ MMT	モーメントの非線形の適用場所と剛性マトリックスの評価方法		
	=0:部材中央の挙動で非線形挙動を代表させる。		
	=1:1端の挙動で非線形挙動を代表させる。		
	=2:2端の挙動で非線形挙動を代表させる。		
	=3:1,2端それぞれに非線形挙動を考慮する。		
$16\sim 20~JM$	モーメントー曲率関係を表すフラグ <sup>[6.13]</sup>		
	=0:弾性。この時は、以下の入力は意味がない。ただし、モーメントに		
	は使えない。		
	=1:Tri-linear 弾性モデル		
	=2:Bi-linear モデル		
	=3: Tri-linear モデル		
	=4:Bi-linear slip モデル		
	=5:Tri-linear slip モデル		
	=6:原点指向モデル		
	=7:原点・最大点指向モデル		
	=8:最大点指向モデル		
	=9: Degrading tri-linear (深田) モデル		
	=10: Degrading tri-linear(野村)モデル		
	=11: Degrading tri-linear (武藤)モデル		
	=12: Degrading tri-linear (武田)モデル		
$21\sim 25$ NULD	記憶する除荷点の数(30程度を推奨)		
$26\sim 30$ JQ	せん断応力の非線形特性を表すフラグ <sup>[6.13]</sup> 。JM と同じ		
$31\sim40~GM2$	第2勾配の初期剛性に対する比。1.>GM2>0		
$41\sim50~GM3$	第3勾配の初期剛性に対する比。GM2>GM3>0		
$51\sim 60$ PWR	JM=12(武田モデル)のみ必要で, $\delta_r/\delta_{max}$ に対するべき。 $0  ightarrow 0.4$		
	N, M, Q		
	$T_2$ 1 $G_3 \times N$		
	$T_1$		
	K=EA. EI. GAs		
	$G_{2(3)} = GN2(3), GM2(3), GQ2(3)$ $T_{2(3)} = TN2(3), TM2(3), TQ2(3)$		
	$\int K$		
	$\sqrt{1}$ $\varepsilon, \kappa, \delta$		

## (3) 内側の降伏局面

(Ni, Mi), i=1,NYL1	(8F10.0)
Ni	i番目の点の軸力
Mi	i 番目の点のモーメン

注) Ni は大きいものから小さいものに(引っ張りが正であるので引っ張りから圧縮へ)ならべる。i=1と i=NYL2では Mi の値は0にするのが普通であるが,正の値でも構わない。その際には極限の軸力作用化でもモーメントに対して耐力が存在するというモデル化になっている。モーメントに関しては対称性が仮定されている。また,軸力に関しては i=1と i=NYL2の二つの軸力を降伏軸力とする弾完全塑性モデルが自動的に用いられる。

 $\mathbb{F}$ 

### (4) 外側の降伏局面

Mi

(Ni, Mi), i=1.NYL2 (8F10.0	)) –	
----------------------------	------	--

Ni i 番目の点の軸力

i 番目の点のモーメント

注)Niは大きいものから小さいものに(引っ張りが正であるので引っ張りから圧縮へ)ならべる。i=1とi=NYL2ではMiの値は0が普通であるが,0でなくても構わない。モーメントに関しては対称性が仮定されている。

#### (5) せん断カーせん断ひずみ関係非線形カード

JQ=0であれば、このカードは必要ない。

GQ2, GQ3, TQ1, TQ2	(4F10.0)
$1 \sim 10 \text{ GQ2}$	第2勾配の初期剛性に対する比。1.>GQ2>0
$11\sim 20~GQ3$	第3勾配の初期剛性に対する比。GQ2>GQ3>0
$21\sim 30$ TQ1	最初の折れ点の荷重
$31\sim40$ TQ2	第2折れ点の荷重
$41\sim 50$ PWR	武田モデルのみ必要で, $\delta_r/\delta_{max}$ に対するべき。 $0$ であれば $0.4$ に設定

# 3.5 固体要素 (要素特性番号4)

ここでは、固体要素(要素特性番号4)の入力について説明する。

## 3.5.1 弾性:構成則番号1

2行のデータが必要である。

UWEI, GG	, AK, ALPHA	A, BETA, AKX, AKY (8F10.0)
$1 \sim 10$	UWEI <sup>[6.9]</sup>	湿潤単位体積重量
$11 \sim 20$	GG	せん断弾性係数
$21 \sim 30$	AK	体積弾性係数
$31 \sim 40$	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰の $\alpha$ (質量比例)またはひずみ比例減衰
$41 \sim 50$	BETA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰のβ (剛性比例)
$51 \sim 60$	AKX	x 方向透水係数
$61 \sim 70$	AKY	y方向透水係数
$71 \sim 80$	AN	間隙率
BUWATE		(F10.0)
$1 \sim 10$	BUWATE	水の体積弾性定数。0 が入力されれば2.2節で指定した水の体積弾性定数
		が用いられる。

## 3.5.2 飛田・吉田モデル:構成則番号2

この要素の剛性マトリックスは非対称となるので、この要素を使うときには、2.2節の入力の際、 非対称マトリックスを選ぶ必要がある。プログラムはこのチェックを行わないので、対称マトリ ックスを選ぶと正しい答えが得られなくなる。入力では3枚のカードが必要である。

UWEI, G0, AK0, P0, GN	I, AKN, ALPHA, BETA	(8F10.0)
$1 \sim 10 \text{ UWEI}^{[6.9]}$	湿潤単位体積重量	
11~ 20 G0	基準せん断弾性係数	$G = G0 \left(\frac{\sigma'_m}{P0}\right)^{GN}$
21~ 30 AK0	基準体積弾性係数	$K = AK0 \left(\frac{\sigma'_m}{P0}\right)^{AKN}$
$31\sim 40$ PO	弾性定数を定義した圧力	<u>ታ</u>
$41\sim50~\mathrm{GN}$	せん断弾性係数の指数音	部
$51\sim 60$ AKN	体積弾性係数の指数部	
$61 \sim 70 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰のα (質量	:比例) またはひずみ比例減衰
$71 \sim 80 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰の $\beta$ (剛性	比例)

## AKX, AKY, AN, A, B, AM, HR0, AR (8F10.0)

$1 \sim 10$ AKX	x 方向透水係数
$11\sim 20$ AKY	y 方向透水係数
$21\sim 30$ AN	間隙率
$31\sim 40$ A	A
$41\sim 50~B$	B:破壊角の正弦
$51\sim 60$ AM	μ:変相角の正弦
$61\sim70~HR0$	$H_{RO}$
$71\sim 80~AR$	a: $H_R = H_{Ro}e^{a\lambda^p}$

# ARM, BUWATE (2F10.0)

 $1 \sim 10$  ARM  $m: H_P = H_R - (H_R - H^*_P) \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^m$ 

11~ 20 BUWATE 水の体積弾性定数。0 が入力されれば2.2節で指定した水の体積弾性定数 が用いられる。

#### 3.5.3 修正飛田·吉田モデル:構成則番号3

この要素の剛性マトリックスは非対称となるので、この要素を使うときには、2.2節の入力の際、 非対称マトリックスを選ぶ必要がある。プログラムはこのチェックを行わないので、対称マトリ ックスを選ぶと正しい答えが得られなくなる。入力では3枚のカードが必要である。

また、この構成則では、基準拘束圧の値を地震応答解析時とそれ以外で区別する必要がある。 この制御は5.17節の PARAM コマンドの中で行う。その詳細は5.17節の説明を参照されたい。

UWEI, G0, AK0, P0, GN, AKN, ALPHA, BETA (8F10.0) 1~10 UWEI<sup>[6.9]</sup> 湿潤単位体積重量  $G = G_0 \left( \frac{\sigma'_m}{\sigma'_r} \right)^{G_N} \cdot \left( 1 - \frac{\alpha}{B} \right)^{C_0 \left( \frac{\sigma_m}{\sigma'_{m0}} \right)}$  $11 \sim 20 \ \text{G0}$ 基準せん断弾性係数  $K = AK0 \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_r}\right)^{AK_N} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{R}\right)^{C_0 \left(\frac{\sigma'_r}{\sigma'_r}\right)^2}$  $21 \sim 30$  AK0 基準体積弾性係数  $31 \sim 40 \text{ PO}$ 弾性定数を定義した圧力  $41 \sim 50$  GN せん断弾性係数の指数部  $51 \sim 60$  AKN 体積弾性係数の指数部 61~ 70 ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰のα(質量比例) またはひずみ比例減衰 71~ 80 BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰のβ (剛性比例) AKX, AKY, AN, A, B, AM, HR0, AR (8F10.0)  $1 \sim 10$  AKX x 方向透水係数  $11 \sim 20$  AKY v 方向透水係数  $21 \sim 30$  AN 間隙率  $31 \sim 40$  A A  $B: (=\sqrt{3}\sin\phi_r)$ 破壊角の正弦  $41\sim 50$  B  $\mu$ : ( $\mu = \sqrt{3} \sin \phi_n$ ) 変相角の正弦  $51 \sim 60$  AM  $61 \sim 70$  HR0  $H_{RO}$ a:  $H_{R} = H_{Ro}e^{a\lambda^{p}}$  (現在は使われていない)  $71 \sim 80$  AR ARM, P0A, CP, QA, QB, QP, QN1, QL (8F10.0)  $H_{P} = H_{R} - \left(H_{R} - H^{*}_{P}\right) \left(\frac{\rho}{\rho}\right)^{m}$  $1 \sim 10$  ARM m:  $11 \sim 20$  POA  $\sigma'_{r_0}$ 0.0 を常に代入  $21 \sim 30$  CP  $\log R_i = a \log N_i + b \mathcal{O} a$  $31 \sim 40$  OA  $41 \sim 50$  QB h  $51 \sim 60 \, \text{QP}$ 弾性定数の佐藤改良部の C。  $61 \sim 70$  ON1  $N_1$ 弾性定数の佐藤改良部の z  $71 \sim 80$  QL QS1, QS2, QS3, CITA, BETAD, BETAK0, BUWAT (8F10.0)  $1 \sim 10 \text{ QS1}$ q $11 \sim 20$  OS2 not used  $21 \sim 30$  QS3 q の最小値

$31 \sim 40$	CITA	<i>S</i> <sub>1</sub>
$41\sim 50$	BETAD	d
$51\sim 60$	BETAK0	eta
$61\sim70$	BUWATE	水の体積弾性定数。0 が入力されれば2.2節で指定した水の体積弾性定数
		が用いられる。

## 3.5.4 吉田モデル:構成則番号4

この項のモデルは、全応力解析、有効応力解析のどちらにも用いられる。ただし、有効応力が 負にならないように設定されているので、地震応答解析では、初期応力解析を行うなどして、あ まり小さい有効拘束圧にならないようにしておく必要がある。

#### (1) 基本データ

ISTYP, IDAYTP, NREV, IFLGR, UWEI, ALPHA, BETA, AKX, AKY, AN (415, 6F10.0)			
$1\sim$ 5 ISTYP	せん断変形モデルのタイプ		
	=0:双曲線モデル		
	=1:拡張双曲線モデル		
	=2:Ramberg-Osgood モデル		
	=3: Hardin-Drnevich モデル		
	=4:吉田モデル( <i>G/G<sub>max</sub>入力</i> )		
	=5:吉田モデル(7入力)		
	=6:吉田モデル(拘束圧依存) (G/G <sub>max</sub> 入力)		
	=7:各種実験式 <sup>[6.24]</sup>		
	=8:安田・規矩モデル(側方流動用単調モデル)		
$6\sim 10$ IDAYTP	ダイレタンシーモデル		
	=0:ダイレタンシーは考慮しない。		
	=1:応力比によるモデル		
	=2:お椀モデル		
	=3:現在開発中		
$11 \sim 15$ NREV	除荷点を記憶する最大の除荷点数。(標準値=20,最大100)NREV<0と		
	入力すると、除荷時の剛性を決定するためのパラメータとして降伏円の		
	半径ではなく、除荷点からの距離をとる。負の方が一般的である。		
$16\sim 20$ IFLGR	IFLGR=1 の時, Mohr-Coulomb の破壊条件を越えた応力比にはならない		
[4 0]	ようにする。IFLGR=0 であれば ISTYP によっては可能となる。		
$21 \sim 30 \text{ UWEI}^{[6.9]}$	湿潤単位体積重量		
$31 \sim 40$ ALPHA <sup>[6.10]</sup>	<sup>」</sup> Rayleigh 減衰のα(質量比例) <i>またはひずみ比例減衰</i>		
$41 \sim 50 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰のβ(剛性比例)		
$51\sim 60$ AKX	x 方向透水係数		
$61 \sim 70$ AKY	y方向透水係数		
$71\sim 80~\mathrm{AN}$	間隙率		

## COHE, THETA, GO, AM, EINIT, ALAMDA, AKAPPA, EREF (8F10.0)

$1 \sim 10$	COHE	粘看力
-------------	------	-----

11~20 THETA 内部摩擦角(度)<sup>[6.24]</sup>。THETA>0のこと。

21~30 G0 せん断定数の係数<sup>[6.24]</sup>

(注)G0は単位系に依存した量であることに注意。

$$G_{\max} = G0\sigma_m^{\prime n} = G_{\max}P_a^n \left(\frac{\sigma_m^{\prime}}{P_a}\right)^n$$

なので、 $G_{\max}P_a^n$ は単位系に依存しない。また、G0は単に単位変換をしただけでは駄目で、指数部の影響を考慮する必要がある。

31~ 40 AM せん断定数の指数部

41~ 50 EINIT 体積変化の考慮法に関するフラグ。

>0:正規圧密と膨潤の組み合せ。このとき,EINIT は初期間隙比。 ≤0 のとき,膨潤過程のみ。この時,数字には特に意味は無い。 体積変化は,次のように表される。  $d\sigma'_m = Kd\varepsilon_v$  $K = (ALAMDA)\sigma'_m^{AKAPPA}$ 



51~60 ALAMDA EINIT>0のとき、図のλ、EINIT≤0のとき、体積弾性係数の係数。
 61~70 AKAPPA EINIT>0のとき、上図のκ、EINIT≤0のとき、体積弾性係数の指数部。
 71~80 EREF EINIT>0のとき、上図のe₀(規準間隙比)、EINIT≤0のとき、意味はない。

PREF, BUWAT	2(F10.0)
$1 \sim 10$ PREF	EINIT>0 のとき,上図の $p_o$ (規準間隙比を定義したときの平均応力),
	EINIT≤0 のとき, 意味はない。
$11 \sim 20$ BUWATE	水の体積弾性定数。0 が入力されれば2.2節で指定した水の体積弾性定数
	が用いられる。

#### (2) せん断特性に関する入力

ISTYP=0の時,双曲線モデルが使われ、この項の入力はない。その他のモデルに関しては対応 する入力を行う。

## ①ISTYP=1 (双曲線モデル, Dancan-Chang タイプ)

FACT (8F10.0)

1~10 FACT せん断強度

せん断強度を Mohr-Coulomb の破壊強度の 1/FACT 倍して計算する。これ により,強度の至るまでの応力-ひずみ関係を調整することができる。 FACT<1.0。

$$\sigma_e = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{FACT \cdot G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$

②ISTYP=2 (Ramberg-Osgood モデル)

$$e = \frac{\sigma_e}{G_{\max}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}} \right)^{\beta - 1} \right)$$

ALPH, BTA (8F10.0) 1~10 ALPH

1~10 ALPH 係数α 11~20 BTA 係数β

### ③ISTYP=3 (Hardin-Drnevich モデル)

FACT, DMAX (2F10.0)

 1~10 FACT せん断強度を Mohr-Coulomb の破壊強度の 1/FACT 倍して計算する。これにより、強度の至るまでの応力-ひずみ関係を調整することができる。 FACT<1.0。</li>

$$\sigma_e = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{FACT \cdot G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$

11~ 20 DMAX 最大減衰比

# ④ISTYP=4,5,6(吉田モデル;表入力)

NN, PREF, (PARAM(I),	I=1,4) (I5, 5X, 5F10.0)
$1\sim$ 5 NN	データの数
$11\sim 20$ PREF	データを与える拘束圧。ISTYP=6の時には必ず必要である。それ以外の
	場合には、0が入力されれば、要素を活性化したときの拘束圧が用いられ
	る。
$21 \sim 30$ PARAM(1)	ISTYP=6の時のみ必要である。以下の式参考。
$31 \sim 40$ PARAM(2)	ISTYP=6の時のみ必要である。以下の式参考。
$41 \sim 50 \text{ PARAM}(3)$	ISTYP=6の時のみ必要である。以下の式参考。
$51 \sim 60 \text{ PARAM}(4)$	ISTYP=6の時のみ必要である。以下の式参考。

 $G_{max} = \text{PARAM}(1) \times \sigma_m^{\text{param}(3)}, \quad \tau_{max} = \text{PARAM}(2) \times \sigma_m^{\text{param}(4)}$ 

(STRN(I), I=1, NN) (8F10.0)

ひずみ (小さい順に入力する)

(GG0(I), I=1, NN) (8F10.0)

ISTYP=4,6のとき割線定数比,ISTYP=5の時せん断応力。せん断応力が 単調増加関数となるよう入力する必要がある。

原点と最初の点の間は、応力-ひずみ関係上で直線で結ばれるので、 ISTYP=4,6の時は最初のデータの割線剛性比を1にしておくことが好ま しい。最大ひずみより大きいひずみに対する外挿方法には各種の方法が ある。

(DAMP(I), I=1, NN) (8F10.0)

減衰定数比(%)

⑤ISTYP=7(実験式)

MTYP, PREF	F, (PARAM(I), I=	1,5) (I5,	5X, 6F10.0)
$1\sim$ 5 M	ATYP 実験:	式の種類	
	=1 : 1	港湾の指針	ŀ
	=2 : 4	安田・山口	の実験式
	=3 : 3	沖積粘土に	対する土研の式
	=4 : 3	洪積粘土に	関する土研の式
	=5:7	砂質土,礴	終に関する土研の式
	=6 : 3	建築基準法	会示粘土

- =7:建築基準法告示砂
- =8:JR 指針土質①(砕石)
- =9: JR 指針土質②(豊浦砂)
- =10: JR 指針土質③(稲城砂)
- =11:JR 指針土質④(岩手ローム)

 $11 \sim 20$  PREF

データを与える拘束圧。もし、0 が入力されると、要素を活性化させたと きの拘束圧を用いる。

 $21 \sim PARAM$ 

各種の実験式に固有のパラメータ

MTYP	PARAM(1)	PARAM(2)	PARAM(3)	PARAM(4)	PARAM(5)
1	塑性指数	FAC			
2	$D_{50}(mm)$	FAC			
3	FAC				
4					
5	h <sub>max</sub>	FAC			
6					
7					
8					
9					
10					
11					
12					

FAC:実験式はそれぞれ特有の単位系で作られている。その単位系で単 位の圧力を解析で用いている単位系に変換したときの値。例えば実 験式が kgf/cm<sup>2</sup>の時,解析を tf/m<sup>2</sup>で行うのであれば 10, kPa で行う のであれば 98 を入力する。

## ⑥ISTYP=8(ALID モデル:流動用単調モデル)

 $G = G_{\max}$   $e \le e_1$  (e は偏差ひずみ)

$$G = G_2 \qquad e > e_1$$

# GAM1, G2 (8F10.0)

- 1~10 GAM1 折れ点のせん断ひずみ
- $11 \sim 20$  G2

第二剛性
このモデルでは、次の二つの条件が必要である。
1)せん断定数入力の際、AM=0、すなわち拘束圧に依存しないとする。
2)モールクーロンの条件の入力の際、THETA(内部摩擦角)は0を入力する。なお、COHE(粘着力)の値は内部的に用いられるだけなので、なにを入れてもよい。目安としてたとえば1.0でもよい。

# (3) ダイレタンシーモデル

IDAYTP=0のとき、この項の入力はない。

1)IDAYTP = 1

- AMYU, F1, F2 (3F10.0)
  - 1~10 AMYU 変相時の応力比(相当応力の平均応力に対する比)

$$d\varepsilon_{vd} = C\left(\mu \, de - \frac{s_{ij} \, de_{ij}}{\sigma'_m}\right)$$

11~ 20 F1 除荷時の体積ひずみ発生量低減係数

処女載荷時には C=1,除荷時には C=F1
 21~30 F2
 応力比が(処女載荷時に換算して)F2より小さいときダイレタンシーによる体積ひずみはない。ここで、応力比はせん断応力(相当応力)をせん断強度で除した値。

2IDAYTP=2

AMYU	F1	F2	F3	F4 1	F5	(6F10.0)	
ANTO,	гт,	12,	гэ.	1.4.1	5	$(01^{\circ}10.0)$	

$1 \sim 10$	AMYU	現在のモデルでは使わない。
11~ 20	F1	係数 $A$ : $\varepsilon_{vd} = Ae^B + \frac{\int de}{C + D\int de}$
$21 \sim 30$	F2	指数 B
$31 \sim 40$	F3	定数 C
$41\sim 50$	F4	定数 D
$51\sim 60$	F5	応力比が(処女載荷時に換算して)F5より小さいときダイレタンシーに
		よる体積ひずみはない。ここで、応力比はせん断応力(相当応力)をせ

ん断強度で除した値。

# ③IDAYTP=3

AMYU, F1, F2, F3, F4	I, F5, F6 (8F10.0)
$1 \sim 10$ AMYU	変相時の応力比(相当応力の平均応力に対する比)
	$d\varepsilon_{vd} = (\mu de - s_{ij} de_{ij}) \times F,  \mu = \mu_0 \left( 1 + w / \left( \frac{1}{A} + \frac{w}{(1 - \alpha)\mu_0 + \alpha\mu_f} - 1 \right) \right)$
$11\sim 20$ F1	A=FFF(1), $\alpha$ =FFF(2) <sub>o</sub> FFFF(5)
$21\sim 30$ F2	上の式参照
	$\alpha (\mu_{f} - \mu) $ $\mu $ $1 $ $1.0 $ $1.0 $ $C$
$31\sim40$ F3	弾性定数の低減係数
	$G_{\max} = G_0 p^n \left( 1 + \frac{x}{\frac{1}{B} + \frac{x}{C-1}} \right)$ : B=FFF(3), C=FFF(4)
$41\sim50$ F4	定数 C
$51 \sim 60  \mathrm{F5}$	全体にかける係数で上の式参照

61~70 F6 応力比が(処女載荷時に換算して)F6より小さいときダイレタンシーに よる体積ひずみはない。ここで、応力比はせん断応力(相当応力)をせ

ん断強度で除した値。





# 3.5.5 弾性(拘束圧依存):構成則番号5

	UWEI, GG, AK, ALPHA, BETA, AKX, AKY	(8F10.0)
--	-------------------------------------	----------

- 1~ 10 UWEI<sup>[6.9]</sup> 湿潤単位体積重量
- $11 \sim 20$  GG せん断弾性係数
- $21\sim 30$  AK 体積弾性係数
- 31~40 ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の $\alpha$ (質量比例) またはひずみ比例減衰
- 41~ 50 BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰のβ (剛性比例)
- 51~ 60 AKX x 方向透水係数
- 61~70 AKY
   y 方向透水係数

   71~80 AN
   間隙率

# PO, GN, AKN, BUWATE (4F10.0)

$1 \sim 10$	PO	基準圧力
$11 \sim 20$	GN	せん断剛性の指数部分 $G=GG imesig(\sigma'_{m}\ /\ POig)^{_{GN}}$
$21 \sim 30$	AKN	体積弾性係数の指数部分 $K = AK  imes \left(\sigma'_m / PO  ight)^{_{AKN}}$
$31 \sim 40$	BUWATE	水の体積弾性定数。0 が入力されれば2.2節で指定した水の体積弾性定数
		が用いられる。

## 3.5.6 弾性(平面二次元):構成則番号6

2行のデータが必要である。

UWEI, GG,	, AK, ALPHA	A, BETA, AKX, AKY, AN (8F10.0)
$1 \sim 10$	UWEI <sup>[6.9]</sup>	湿潤単位体積重量
$11 \sim 20$	GG	せん断弾性係数
$21\sim 30$	AK	体積弾性係数
$31 \sim 40$	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰の $\alpha$ (質量比例)またはひずみ比例減衰
$41\sim50$	BETA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰のβ (剛性比例)
$51 \sim 60$	AKX	x 方向透水係数
$61\sim70$	AKY	y方向透水係数
$71\sim 80$	AN	間隙率
BUWATE		(F10.0)
$1 \sim 10$	BUWATE	水の体積弾性定数。0 が入力されれば2.2節で指定した水の体積弾性定数

が用いられる。

# 3.5.7 体積ひずみモデル:構成則番号7

2行のデータが必要~	である	
UWEI, ALPHA, BETA	, AKX, AKY, BUWATE	(7F10.0)
$1 \sim 10 \text{ UWEI}^{[6.9]}$	湿潤単位体積重量	
$11 \sim 20 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	<sup>)]</sup> Rayleigh 減衰のα(質量比例)ま	またはひずみ比例減衰
$21 \sim 30 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰の $eta$ (剛性比例)	
$31\sim 40$ AKX	x 方向透水係数	
$41\sim 50$ AKY	y 方向透水係数	
$51\sim 60$ AN	間隙率	
$61\sim70$ BUWATE	水の体積弾性定数。0 が入力さ	れれば2.2節で指定した水の体積弾性定数
	が用いられる。	

P0, EPSV0	, AK1, AK2,	GG, GN	(6F10.0)
$1 \sim 10$	P0	基準拘束圧	
$11 \sim 20$	EPSV0	基準拘束圧時の体積ひずみ	
$21\sim 30$	AK1	係数	
$31 \sim 40$	AK2	係数	
$41\sim 50$	GG	せん断弾性定数用定数	
$51 \sim 60$	GN	せん断弾性定数用定数	
		$\frac{p}{p_0} = \frac{e^{\varepsilon_v/c} - 1}{e^{\varepsilon_{vo}/c} - 1} \qquad c = \frac{AK2}{100} + A$	$4K1 \cdot \varepsilon_{vo}$ $G_{max} = GGp^{GN}$

# 3.6 ジョイント要素 (要素特性番号5)

この節ではジョイント要素(要素特性番号5)の入力について説明する。

# 3.6.1 基本:構成則番号1

# AKV, AHK, AKVP, AKHP, BETA, PHI (5F10.0)

$1 \sim 10$	AKV	鉛直方向ばね定数。=AKV·σ' <sup>AKNO</sup>
$11 \sim 20$	AKH	水平方向ばね定数。=AKH $\cdot \sigma_{\scriptscriptstyle m}^{\prime^{AKHP}}$
$21 \sim 30$	AKVP	鉛直方向ばね定数の拘束圧依存性の指数部
$31 \sim 40$	AKHP	鉛直方向ばね定数の拘束圧依存性の指数部
$41 \sim 50$	BETA <sup>[6.10]</sup>	Rayleigh 減衰のβ(剛性比例)
$51 \sim 60$	PHI	内部摩擦角(度)。PHI=0のとき、スリップしない。

## 3.7 回転ばね要素 (要素特性番号6)

この節では回転ばね要素(要素特性番号6)の入力について説明する。入力はすべて通常のばね 要素(要素特性番号1)と同じであるので、3.2節を参照されたい。ただし、回転ばね要素の場合 には、単位長さあたりの入力は意味がないので、0を入力する。0でない値が入力されると印刷さ れるが、その値は使われない。

# 3.8 SH 波解析用要素 (要素特性番号7)

この要素は SH 波解析専用である<sup>[1.2]</sup>。この要素を用いたときは、他に、ばね要素、ダッシュポット要素のみが使用可能である。この要素は、有効応力解析は出来ない。また、x、y 平面内での動きはないとしているので、自重解析の様な解析も出来ない。

## 3.8.1 弾性:構成則番号1

UWEI, GG, ALPHA, BE	ĊTA	(8F10.0)	
$1 \sim 10 \text{ UWEI}^{[6.9]}$	湿潤単位体積重量		
$11\sim 20~GG$	せん断弾性係数		
$21 \sim 30 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰の $\alpha$ (	(質量比例)	またはひずみ比例減衰
$31 \sim 40 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Rayleigh 減衰の $\beta$ (	(剛性比例)	

#### 4 構造物データ

この章では、解析対象モデルを規定するための情報を入力する。すなわち、節点の座標と境界 条件、要素と要素節点(要素を構成する節点),要素の幅、および水に関する境界条件である。 支配方程式が Christian 流の u-p 形式で作られていることから、土粒子に関する境界条件は節点の 自由度として、また、水に関する境界条件は要素の辺の透水性に関する条件として与える。

#### 4.1 節点データ

この節では,節点の番号,座標,境界条件を読み込む。これらは,ファイル名 FIN (2.2項で入力)より読み込まれる。FIN にブランク以外の名前が指定されているときには,節点データの前に一枚のカードが必要である。

節点データの入力では、節点番号を1から NDPT まで順番に入力する。このうち、節点番号1と NDPT は必ず必要である。その間で番号が飛んでいるときには前後の節点番号、節点座標より等 間隔で節点座標を補間する。この場合、節点自由度に関する条件は、前の節点のものと同じにな る。

境界条件とは、節点の移動に関する境界条件の事である。有効応力解析では、ここで指定する のは土骨格に関する自由度であり、水に関する境界条件は、4.4節で入力する。

境界条件は、固定、自由、および従属の3通りがある。固定の場合には1、自由の場合には0をデ ータとして与える。また、従属にする場合には、境界条件の値を、従属させる節点番号の値に負 の符号をつけて入力する。この場合、従属させる節点番号の方が小さい事が必要である (ND>|KBC|)。また、解析時にはその節点が存在している事が必要である。

境界条件の変更は解析ごとに可能なので,ここでは,以後の解析で一度でも自由になる可能性 のある自由度成分は全て自由として入力する。

#### 4.1.1 ダミーカード

2.2項でデータを読み込むファイル名(FIN)をブランク以外としたときにのみ必要な一枚のカードで、内容は何でもよい。これは、ユーザーがファイルの先頭にモデルに関するメモを付けている時、データ入力の時それを削除しなくてもよいように設けられた入力である。

#### 4.1.2 節点データ

境界条件は、固定の場合には1,自由の場合には0をデータとして与える。また、従属にする場合には、境界条件の値を、従属させる節点番号の値に負の符号をつけて入力する。この場合、従属させる節点番号の方が小さい事が必要である(ND>[KBC])。また、解析時にはその節点が存在している事が必要である。

#### ND, KBCX, KBCY, KBCT, X, Y (4I5, 2F10.0)

$1\sim$ 5 ND	節点番号	
$6\sim 10~{ m KB0}$	CX x方向自由度に関する境界条件(固定=1,自由=0,従	属=負)
$11 \sim 15$ KBC	CY y方向自由度に関する境界条件(固定=1,自由=0,従	属=負)
$16\sim 20$ KBC	CT 回転に関する境界条件(固定=1,自由=0,従属=負)	
$21\sim 30~X$	x 座標	
$31\sim40$ Y	y 座標	

# 4.2 要素データ

この項では、要素について、要素を構成する節点(要素節点という)の番号、要素特性番号を 入力する。要素は要素番号1のから NELM まで順番に入力する。このうち、要素番号1と NELM は 必ず必要である。その間で飛んでいる要素番号がある場合には、それらの要素は、先に読み込ん だ要素と同じ要素特性を持つ要素とし、その要素節点番号は前後の要素より等間隔に補間して作 成される。

どの要素でも,要素番号,要素特性番号,要素節点が必要なのは当然であるが,その後,要素 特性や構成則の種類によって一緒に読み込むデータがある。そこで,この章の説明は要素特性ご とに書かれている。

要素特性によっては、上記以外にもこの節の入力時に入力した方が都合のよいデータがある。 どの要素特性を用いた場合に、いくつの追加データの入力が必要かは3章の各要素特性に関する記 述の時に示されているので、その必要な数だけパラメータを用意する。これらのカードは2枚目の カードとして4.2.2項で読み込まれる。

要素の飽和,不飽和については6.16節に記述があるので、参照されたい。

### 4.2.1 要素特性ごとのデータ

## (1) ばね要素 (要素特性番号1)

NE, MAT,	NE, MAT, (NOD(I), I = 1, 2), IFRFLD, IDIR, ALEN, AK0, NE1, NE2 (415, 10X, 215, 2F10.0, 215)				
1~ 5	NE	要素番号			
$6\sim 10$	MAT <sup>[6.16]</sup>	要素特性番号。			
$11 \sim 15$	NOD(1)	要素節点番号。			
$16\sim 20$	NOD(2)	要素節点番号。			
$31 \sim 35$	IFRFLD <sup>[6.17]</sup>	通常は0を入力する。1のとき1節点が自由	地盤,2のとき2節点が自由		
		地盤と連結していることを表す。			
$36\sim 40$	IDIR	ばねの作用する方向(節点2の節点1に対す	する相対的な移動方向)の方		
		向余弦ベクトルの決め方			
		=0:軸方向(2節点の座標が異なっていると	きのみ)		
		=1:軸直角方向(2節点の座標が異なってい	るときのみ)。		
		=2:x 軸方向(SH 波解析は全てこれ)			
		=3:y軸方向			
		=4:z軸方向			
		=5:x 軸負方向			
		=6:y 軸負方向			
		=7:z 軸負方向			
$41\sim50$	ALEN	材長。ALEN=0.であれば、プログラムは材長	を節点間距離とする。ALEN		
		はばね定数の計算および、質量の計算に用い	<b>いられる。両節点が同じ座標</b>		
		の時,ALEN=1.0が用いられる。			
$51 \sim 60$	AK0	0 でない値が入力されれば、材料特性の入力	の際に指定する初期剛性 AK		
		の値に関わらず、この値が剛性として用いら	かれる。		
$61\sim 65$	NE1	構成則番号 5 の時のみ意味があり、剛性が	衣存する要素の一つ目の要素		
		番号			
$66\sim70$	NE2	構成則番号 5 の時のみ意味があり、剛性が	衣存する要素の二つ目の要素		
		番号			

(2) ダッシュポット要素 (構成則番号2)

NE, MAT,	(NOD(I), I =	1, 2), IFRFRD, IDIR, ALEN (415, 10X, 215, F10.0)
1~ 5	NE	要素番号
$6\sim 10$	MAT <sup>[6.16]</sup>	要素特性番号。
$11 \sim 15$	NOD(1)	要素節点番号。
$16\sim 20$	NOD(2)	要素節点番号。
$31 \sim 35$	IFRFLD <sup>[6.17]</sup>	通常は0を入力。1のとき1節点が自由地盤、2のとき2節点が自由地盤
		と連結していることを表す。
$36\sim 40$	IDIR	ダッシュポットの作用する方向(節点2の節点1に対する相対的な移動
		方向)の方向余弦ベクトルの決め方
		=0:軸方向(2節点の座標が異なっているときのみ)
		=1:軸直角方向(2節点の座標が異なっているときのみ)。
		=2:x 軸方向(SH 波解析は全てこれ)
		=3:y軸方向
		=4:z 軸方向
		=5:x 軸負方向
		=6:y 軸負方向
		=7:z 軸負方向
$41 \sim 50$	ALEN	断面積または有効長さ。入力がなければ1.0とする。要素特性で入力した

粘性係数にこの値を掛けたものが要素の粘性係数となる。

(3) はり要素(構成則番号3)

NE, MAT,	(4I5, 10X, 3F10.0)		
$1\sim$ 5	NE	要素番号	
$6 \sim 10$	MAT <sup>[6.16]</sup>	要素特性番号。	
$11 \sim 15$	NOD(1)	要素節点番号。	
$16\sim 20$	NOD(2)	要素節点番号。	
$31 \sim 40$	А	断面積	
$41 \sim 50$	AI	断面2次モーメント	
$51 \sim 60$	AS	有効せん断断面積	

<sup>(</sup>注)本来,A,AI,ASは要素特性として要素特性データの中で指定する量である。しかし、例 えばヤング係数,せん断弾性係数などの値が同じで、A,AI,ASの値が異なる部材が多く あるときなど、異なる要素特性カードを作るのはデータ作成上不便である。そこで、 STADASではデータ作成の簡単化を図る意味で、この入力データを用意した。すなわち、 ここでA,AI,ASに0でない値が入力されていれば、要素特性で入力した値に関わらずこ こで入力された値が優先的に用いられる。

AS(有効せん断断面積)については注意が必要である。というのは、AS=0というのはせん断変形なし、すなわち AS=∞を表しているからである。このためのデータの混乱を避けるために、新しいルールとして、『要素特性入力時に AS>0が入力され、ここで AS=0としたいとき(実際の値としては AS=∞)としたいときには、 AS<0(値はなんでも構わない)を入力する。』を付け加える。

1~ 5 NE 要素番号

<sup>(4)</sup> 固体要素(構成則番号4)

NE, MAT, (NOD(I), I = 1, 4), GG, KK (615, 2F10.0)

6~10 MAT<sup>[6.16]</sup> 要素特性番号。
 有効応力解析で,水(間隙水圧)に関する自由度を持っている材料で,
 間隙水圧の自由度を無くしたいときには,MATを負として入力する。その場合,絶対値が要素タイプ番号を与える。
 11~15 NOD(1) 要素節点番号。
 16~20 NOD(2) 要素節点番号。

- 21~ 25 NOD(3) 要素節点番号。
- 26~ 30 NOD(4) 要素節点番号。
- 31~ 40 GG 構成則番号1(弾性)の時のみ意味があり、せん断弾性係数
- 41~ 50 AK 構成則番号1(弾性)の時のみ意味があり、体積弾性係数
- (注)要素節点番号は左周りにつける。また、三角形要素の場合には要素節点4を0とするか要素節点3と要素節点4の番号を同じにする。
- (注)構成則番号1(弾性)では, GG や AK に0でない値が入力されていれば, 3.5.1項の入力に 関わらずここで入力した値が用いられる。
- (5) ジョイント要素

この要素<sup>[6.20]</sup>は、弾性でも拘束圧依存性は入っている。

NE, MAT, (NOD(I), I =	1, 4), AKV, AKH, AKVP, AKHP, ANG (615, 5F10.0)
$1\sim$ 5 NE	要素番号
$6 \sim 10 \text{ MAT}^{[6.16]}$	要素特性番号。
	有効応力解析で,水(間隙水圧)に関する自由度を持っている材料で,
	間隙水圧の自由度を無くしたいときには,MAT を負として入力する。そ
	の場合,絶対値が要素タイプ番号を与える。
$11 \sim 15 \text{ NOD}(1)$	要素節点番号。
$16 \sim 20 \text{ NOD}(2)$	要素節点番号。
$21 \sim 25 \text{ NOD}(3)$	要素節点番号。
$26\sim 30$ NOD(4)	要素節点番号。
$31\sim40~AKV$	$0$ でない入力の時に意味があり,鉛直方向ばね定数 = AKV $\cdot \sigma_m'^{\scriptscriptstyle AKNO}$
$41\sim 50~\mathrm{AKH}$	$0$ でない入力の時に意味があり,水平方向ばね定数 =AKH · $\sigma_{m}^{\prime^{AKHP}}$
$51\sim 60$ AKVP	0 でない入力の時に意味があり,鉛直ばね定数の拘束圧依存性の指数部
$61\sim70~\mathrm{AKHP}$	0 でない入力の時に意味があり,水平ばね定数の拘束圧依存性の指数部
$71\sim 80$ ANG	ばねとしてモデル化するときのせん断方向の水平面からの角度 (度) で,
	半時計周りに測る。以下の注参照。

- (注) 要素節点番号最初に軸方向(長辺)から先に1→2とつける。なお,要素節点1と2,要素 節点3と4を同じにする(I, I, J, Jと入力)事によって節点 Iと節点 Jの間をばねでつない だジョイント要素が可能となる。この場合,せん断の変形方向(通常のジョイント要素 であれば,節点1から節点2に向かう方向)の水平面からの角度(半時計周りが正)を ANG で入力する。
- (注)ここで入力する AKV, AKH, AKVP, AKHP は0でない値が入力されたときのみ意味があり, 3.6節の入力に関わらず,ここで入力した値が用いられる。

(6) 回転ばね要素

NE, MAT, (NOD(I), I = 1, 2), IFRFLD, ALEN, AK0, NE1, NE2 (415, 10X, 15, 5X, 2F10.0, 2I5)

- 1~ 5 NE 要素番号
- 6~10 MAT<sup>[6.16]</sup> 要素特性番号。

11~15 NOD(1) 要素節点番号。

16~ 20 NOD(2) 要素節点番号。

- 31~ 35 IFRFLD<sup>[6.17]</sup> 通常は0を入力する。1のとき1節点が自由地盤,2のとき2節点が自由 地盤と連結していることを表す。
- 41~ 50 ALEN 材長。ALEN=0.であれば、プログラムは材長を節点間距離とする。ALEN はばね定数の計算に用いられる。
- 51~ 60 AK0 0 でない値が入力されれば、材料特性の入力の際に指定する初期剛性 AK の値に関わらず、この値が剛性として用いられる。
- 61~ 65 NE1 構成則番号 5 の時のみ意味があり,剛性が依存する要素の一つ目の要素 番号
- 66~ 70 NE2 構成則番号 5 の時のみ意味があり,剛性が依存する要素の二つ目の要素 番号

### (6) SH 波要素

NE, MAT, (ENOD(I), I	= 1, 4)	(615)
$1\sim$ 5 NE	要素番号	
$6 \sim 10 \text{ MAT}^{[6.16]}$	要素特性番号。	
	有効応力解析で,水(『	間隙水圧)に関する自由度を持っている材料で、
	間隙水圧の自由度を無く	したいときには,MAT を負として入力する。そ
	の場合、絶対値が要素タ	イプ番号を与える。
$11 \sim 15 \text{ ENOD}(1)$	要素節点番号。	
$16 \sim 20 \text{ ENOD}(2)$	要素節点番号。	
21~25 ENOD(3)	要素節点番号。(要素タ	イプによっては0とする)
$26 \sim 30 \text{ ENOD}(4)$	要素節点番号。(要素タ	イプによっては0とする)

### 4.2.2 残りの材料特性パラメータ

要素に関する最も基本的な入力は,前節の入力で,要素番号,要素特性番号,要素節点番号お よび要素特性に固有な要素ごとのデータの入力である。

要素特性の種類によってはこれ以外の情報が必要になることもある。その場合にはここで入力 する。どのデータが必要かと言うことは3章の要素特性の入力の際示される。

1行に8個のデータの入力が可能であるので、必要な行数だけ続ける。現在の所、この節で必要 なデータはない。

要素 タイプ	構成則	データ

PAR(J), J = 1, 8 (8F10.0)

#### 4.3 要素の幅に関するデータ

2.3節の NWIDTH>0を入力した時のみこの節のカードが必要である<sup>[6.3]</sup>。全部で NWIDTH 行の入力が必要。要素番号 IS から IE までの要素の幅を WIDTH とする。

### IS, IE, WIDTH (215, F10.0)

1~ 5 IS 最初の要素番号。

6~10 IE 最後の要素番号。IE=0のとき, IE=IS

11~20 WIDTH 要素の幅。

#### 4.4 水に関する境界条件データ

全応力解析の時、この項の入力は不要である。

ここでは、水に関する境界条件を入力する<sup>[6.8]</sup>。特に指定が無ければ、プログラムは、水に関する自由度を持っている要素と接する辺は排水(すなわち、隣の要素との水の流れが可能)と判定し、隣接要素の無い辺、水に関する自由度を持っていない要素と接する辺では、自動的に非排水境界と設定する。

この項で入力するのは、それ以外の境界条件である。境界条件の変更は各解析の直前でも可能 であるが、ここで、解析の最初から最後まで変わらない境界条件を入力しておくと後の入力作業 が楽である。境界の指定は要素番号とその要素の辺の番号で行なう。

解析領域内で境界を指定する場合には、一つの境界にいくつかの要素が従属していることも普 通であるが、その場合にはその内の一つを指定するだけでよい。プログラムは自動的にその他の 要素を見つけ、同じ境界条件を与える。

#### NBC (I5)

1~ 5 NBC
 読み込む境界の数。NBC=0 であれば以下の入力は不用である。NBC>0 の
 時は NBC 行の以下のデータが必要。

### NBCS, NE, NSIDE, BCVAL (315, F10.0)

$1\sim$ 5 NBCS	境界の種類
	=-1:非排水境界
	=-2:排水境界(境界值=0)
	=-3:わきだし,吸い込み境界(値指定)
	=-4:排水境界(值指定)
$6\sim 10$ NE	要素番号
$11 \sim 15$ NSIDE	辺の番号。要素節点 1→2 が 1,以下,2→3 が 2,3→4 が 3,4→1 が 4。
	ただし,三角形の場合には,3→1が3
$16\sim 25$ BCVAL	境界值

#### 5 解析法に関する入力

この章で述べるのは各種解析の入力である。必要なだけ、この章の入力を繰り返し使うことに よって、順を追って解析を行うことが出来る。

最初に節点,要素データを入力したときには,すべての節点,要素は不活性(存在は認識されているが,解析では用いられない)である。従って,まず要素を活性化させるため,要素の追加(ADDELM),または自重・盛立解析(CONSTUCT)を行なう必要がある。その後必要な解析法の選択を繰り返していく。

この章の最初の入力は、以下に示す、解析の種類(オプションと呼ばれることもある)を指示 することである。一つのオプションは、一つの解析を指示したり、系の状態やパラメータを変更 したりといった一つの仕事に対応している。オプションを指定すると、次は、そのオプションに 対する入力の説明のある節に移動し、要求される入力を行う。それが終わると再びこの位置に入 力が戻ってくる。

解析を行うに際して、次の点は理解しておく必要がある。

- i) STADAS では, 原則的に, 非線形増分解析法を採用している。
- ii) 間隙水圧の扱い方は,静水圧として扱う場合と,過剰間隙水圧として扱う場合の二通りがある。 それぞれに対応して与える過剰間隙水圧の境界条件の値が異なる。これについては, 6.8節を 参照されたい。

KATYPE (A40)

1~ 40 KATYPE 解析の種類を表すフラグ。文字変数で、ブランクでない最初の文字から、 次に現れるブランクまでの部分のみが意味を持つ。意味のある部分のあ と一つ以上のブランクがあれば、その後の入力は無視される。オプショ ンは大文字で書く必要がある。

オプション	解析の内容	節
END	STADAS の実行の終了	5.1
ADDELM	要素をつけ加える。境界条件を変更する。	5.2
CONSTRUCT	自重・盛立解析	5.3
EXCAVATE	掘削解析。要素を取り去る。	5.4
STATIC	静的解析	5.5
EARTHQUAKE	地震応答解析	5.6
DYNAMIC	動的解析・節点加力	5.7
WATER	地下水の変化	5.8
CONSOL	<b>压密解析</b>	5.9
EIGEN	固有値解析	5.10
FREESUP	固定端反力の解放	5.11
TITLE	タイトルの変更	5.12
PRTSTATE	現在の状態を印刷する。	5.13
OUTPUT	現在の状態のファイル出力	5.14
INPUT	現在の状態を読み込む	5.15
CONVERGE	収束判定に関するフラグ値を変更する。	5.16
PARAM	パラメータの値の変更	5.17
CLEARBS	不釣合力のクリアー	5.18
DEBUG	プログラム保守用で、ユーザーは使わない。	5.19

注)SH 波解析では、"ADDELM"、"DYNAMIC"のみが可。有効応力解析は不可

# 5.1 プログラムの終了

プログラムの終了は、次の二つの方法で可能となる。

- (1) データが無くなったとき
- (2) オプションとして、『END』が入力されたとき

これらの場合に、プログラムは、

#### 5.2 要素の付加,境界条件の変更

解析法「ADDELM」が選択されたとき、この節の入力に従う。

本来要素を活性化させた場合,その影響は他の要素に及ぶはずである。例えば,新しく活性化 した要素の自重は他の要素にも外力として作用するので変位や応力が変化する。しかしながら, この節の解析ではある応力を持った要素が突然現れ,これまでに存在した要素の状態を変えるこ となく存在していると考える。例えば別のプログラムで初期応力状態を計算して,それを入力す る場合にはこのオプションを用いる。また,初期応力状態を問題としない材料を用いる解析では このオプションは有効である。

#### 5.2.1 基本情報

MADD,	M	BNODE, MB	SIDE, NPRT1, NPRT2, MISTRS, NADMAS, FIN (715, 5X, A20)
1~	5	MADD	活性化させる,同じ性状を持つ要素のブロックの数。
$6\sim$	10	MBNODE	節点の自由度を変更する節点の数
			>0:一番最初に指定した境界条件から変更。
			<0:直前に行った解析の境界条件から変更。
11~	15	MBSIDE	辺の境界条件を変更する辺の数
$16 \sim 2$	20	NPRT1	=0:活性化させた要素の応力状態を印刷する。
			=1:活性化させた要素の応力状態は印刷しない(出力の煩雑さを避ける)
$21 \sim 2$	25	NPRT2	=0:要素をつけ加えた後の,系の状態を印刷する。
			=1:要素をつけ加えた後の系の状態は印刷しない(出力の煩雑さを避け
			る)
$26\sim 1$	30	MISTRS17	=0:要素の初期状態はユーザーが入力
			=1:要素の初期状態はプログラムが決定する(原則 0)
$31 \sim 10^{-10}$	35	NADMAS	節点に付加する質量を入力するカードの数(節点番号が連続し、質量が
			同じ節点は一枚のカードで入力できる)。
$41 \sim 0$	60	FIN	5.2.2節の要素情報を読み込むためのファイル名。ブランクのとき、ユニ
			ット番号 5, すなわちカード入力が割り当てられる。

#### 5.2.2 要素情報

新たに活性化した要素により新しく活性化された節点の境界条件は、全て4.1節で入力したもの に置き変わる。変更をしたいときには、MBNODEで指定する。

以下の要素の読み込みの最初に, JELM と KELM を読み込んでいる。これは, JELM から KELM までの要素に同じ情報を与える事を意味する。一つの要素のみに同じ情報を与えるのであれば, KELM=0とするか, KELM=JELM とする。なお, KELM が0でないときには KELM≧JELM である 必要がある。JELM が負であれば,前節の要素入力時の水の自由度にかかわらず,水の自由度は ない,すなわち,乾燥状態である事を意味する。

MISTRS=1(要素の初期状態はプログラムが決める)としたときは、以下の入力で必要なのは JELM と KELM のみであり、その他の応力やひずみの入力データは不要である。

既に存在している要素を指定したときには、その要素を初期化した事に相当する。この場合には、プログラムは WARNING を印刷するが、プログラムはそのまま継続される。

#### (1) ばね要素

#### JELM, KELM, EPS (215, 3F10.0)

1~ 5 JELM 同じ初期状態を与える要素の始まりの番号

6~10 KELM 同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
11~ 20 EPS ひずみ(節点変位)<sup>[6.15]</sup>

(2) ダッシュポット

JELM, KELM (215)	
$1\sim$ 5 JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
$6\sim 10$ Kelm	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号

(3) はり要素

## JELM, KELM, AM1, AM2, Q, AN (215, 4F10.0)

$1\sim$ 5 JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
$6\sim 10$ Kelm	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
$11\sim 20$ AM1	1 端のモーメント <sup>[6.23]</sup>
$21\sim 30~\text{AM2}$	2 単のモーメント <sup>[6.23]</sup>
$31 \sim 40 \ Q$	せん断応力
$41\sim 50~AN$	軸力

(4) 固体要素

JELM, KEI	LM, SIGX, SI	GY, TAUXY, PWP0, SIGZ, PWP	(2I5, 6F10.0)
1~ 5	JELM	同じ初期状態を与える要素の始め	まりの番号
$6\sim 10$	KELM	同じ初期状態を与える要素の終れ	わりの番号
$11 \sim 20$	SIGX	$\sigma_x^{l}$	
$21 \sim 30$	SIGY	$\sigma'_y$	
$31 \sim 40$	TAUXY	$ au_{xy}$	
$41\sim50$	PWP0	静水圧	
$51 \sim 60$	SIGZ	$\sigma_z$	
$61\sim70$	PWP	過剰間隙水圧	

(5) ジョイント要素

## JELM, KELM, V, U, PWP0, PWP (215, 4F10.0)

同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
法線方向応力
接線方向応力
静水圧
過剰間隙水圧

## (6) 回転ばね要素

## JELM, KELM, EPS (215, FF10.0)

$1\sim$ 5 JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
$6\sim 10~{ m KELM}$	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
$11\sim 20$ EPS	回転角 <sup>[6.15]</sup>

(7) SH 波要素

JELM, KELM, TAUYZ, TAUZX (215, 4F10.0)

$1\sim$	5	JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの	の番号
---------	---	------	-------------------	-----

- 6~ 10 KELM 同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
- $11 \sim 20$  TAUYZ  $\tau_{vz}$
- $21 \sim 30$  TAUZX  $\tau_{xz}$

## 5.2.3 境界条件

この節の入力は MBNODE>0の時のみ必要である。全部で MBNODE 枚のカードを入力する。

- NODE, (MBDRY(I),I=1,3) (4I5)
  - 1~ 5 NODE 節点番号
     6~ 10 MBDRY(1) x 方向成分に対する変更方法の指示
     11~ 15 MBDRY(2) y 方向成分に対する変更方法の指示
     16~ 20 MBDRY(3) 回転成分に対する変更方法の指示
     =0:変更しない
     =1:自由度を拘束する。(固定)
     =2:自由度を開放する。(自由)
     <0:従属節点とし,節点番号を指定する。</li>

#### 5.2.4 水に関する境界条件

この節の入力は MBSIDE>0の時のみ必要である。全部で MBSIDE 枚のカードを入力する。

- ITYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)
  - 1~ 5 ITYPE 境界の種類
    - =-1:非排水境界
    - =-2:排水境界(境界值=0)
    - =-3:わきだし,吸い込み境界(値指定)
    - =-4:排水境界(值指定)
    - =0:通常の境界の戻すため、プログラムが適当に変更する。隣に要素が あれば、その要素と連続しているように扱うし、要素が無ければ、 非排水の辺として扱う。
    - >0:隣接する要素番号。この処置により,離れた要素と結合することも 可能。この時,JELM は相手側の要素番号,JSIDE は相手側の要素 の辺番号。同時に両方の要素を結び付ける。
  - 6~ 10 IELM 要素番号
  - 11~15 ISIDE 辺番号。4.2節で要素節点を入力したときのn番目の節点とn+1番目の節 点の間の境界の辺番号をnとするようにカウントする。
  - 16~ 20 BVAL 境界值
  - 21~ 25 JELM ITYPE>0のときの相手側の要素番号
  - 26~ 30 JSIDE ITYPE>0のときの相手側の辺番号

#### 5.2.5 付加質量

NADMAS>0の時のみこの項の入力が必要である。全部でNADMAS行のデータを入力する。質量ではなく,重量で入力することに注意。

付加質量として負の値を代入することも可能である。その場合、付加質量を減らす。

IS, IE, AMASSX, AMASSR (215, 2F10.0)

1~ 5 IS 最初の節点番号。

- 6~ 10 IE 最後の節点番号。IE=0 のとき, IE=IS と同じ結果となる。IE>IS となるようにデータを作成する。
- 11~20 AMASSX 節点に付加する並進運動用の重量。
- 21~30 AMASSR 節点に付加する回転慣性に対する重量。

#### 5.3 自重·盛立解析

解析法「CONSTRUCT」が選択されたとき、この節の入力に従う。

自重・盛立解析は,要素を追加するとともに,その要素による自重を作用させ応力状態を求める解析である。一般に自重解析とは,解析に用いる全ての要素の応力を一度に求める場合に,盛立解析とは,盛立の過程を考慮して一部の要素を追加して応力を求める場合に呼ばれるが,解析上はなんら区別はない。

自重・盛立解析は、新しく加わった要素の自重を外力として作用させる静的解析であるが、その荷重を一度に加えるわけではない。次項に示す、NSTEPに等分し、これを順次作用させながら、応力状態を求めていく。

有効応力解析の場合の水に関する自由度を持っている要素の水の扱いに注意が必要である。というのは、現場で、完全に飽和した土を盛り立てながら盛立最上部にあわせて水位を変えていくというような方法はとられないからである。通常行われる方法は、水中に土を入れる(埋め立てに多い)か、乾燥した土を盛り立て、その後水位を上げ飽和させる(ダムなどに多い)かである。このオプションでは、前者の方法で盛立を行う。これは、後者の方法では、盛立られた部分より先に存在している要素では、最終状態に至るまでに、新しく加えられた要素による載荷と、その後の水位の上昇に伴う除荷を受ける、すなわち、応力のサイクルが起こるので、それを敬遠したためである。後者の方法で盛り立てたいときには、一旦盛立る要素を乾燥状態であると指定し、その後オプション『WATER』を用いて水位を変化させる。

## 5.3.1 解析方法の設定

NONSOL,	NSTEP, NST	E1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN, ANGVRT (715, F5.0)
1~ 5	NONSOL	数値解析の手法 <sup>[6.19]</sup>
		=1:接線剛性法
		=2:初期応力法
		=3:修正初期応力法 <sup>[6.18]</sup>
		=4:修正 Newton-Raphson 法
$6\sim 10$	NSTEP	新しく加えられた要素の自重を荷重として加える場合に、荷重を NSTEP
		に分割し,合計 NSTEP の計算で値を求める。
$11 \sim 15$	NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	初期変位の与え方に関するフラグ
		=0:変位は0から出発
		=1:前の解析の継続の値を使う。
$16\sim 20$	NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	解析終了後に系の変位として何を残すかに関するフラグ
		=0:何も残さない。すなわち,変位は捨てられる。
		=1:変位は次のステップに持ち越す。
$21\sim 25$	ITERMX	NONLIN=2 以上, すなわち, イタレーションによる収束計算をする解析
		手法を選んだ時のみ意味がある。ITERMX はイタレーションの最大回数
		である。この回数を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージ
		を印刷し、不釣合力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった
		時計算を終了したければ、値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$26\sim 30$	NPRT	各増分解析時の変位の印刷に関する指示。この指示にかかわらず最終状
		態は印刷される。
		=0:印刷なし。
		>0:NPRT ステップごとに印刷する。
$31 \sim 35$	NDRAIN	排水条件に関するフラグ
		=0:排水条件

36~ 40	ANGVRT	=1:非排水条件 重力の作用方向(角度:度)。0 であれば鉛直方 向。	ANGVRT
5.3.2 基本	<b>卜情報</b>		↓ y
MADD, M	BNODE, ME	SIDE, NPRT1, NPRT2, MISTRS, NADMAS, NADLD, FIN	(8I5, A20)
1~ 5	MADD	付け加える,同じ性状を持つ要素のブロックの数。	
$6 \sim 10$	MBNODE	節点の自由度を変更する節点の数	
		>0:一番最初に指定した境界条件から変更。	
		<0:直前に行った解析の境界条件から変更。	
		ここでは、以後の解析で用いられる境界条件を変更す	「るのみである。
		例えば、固定端を自由端にした場合は、固定端反力が角	解放されるはずで
		あるが、そのようなことはここでは考えない。固定	端反力の解法は
		『FREESUP』で行える。	
$11 \sim 15$	MBSIDE	間隙水圧に関する境界条件を変更する辺の数	
$16 \sim 20$	NPRT1	=0:つけ加えた要素の応力状態を印刷する。	
		=1:つけ加えた要素の応力状態は印刷しない(出力の煩	(雑さを避ける)
$21 \sim 25$	NPRT2	=0:要素をつけ加えた後の、糸の状態を印刷する。	
		=1:要素をつけ加えた後の糸の状態は印刷しない(出力	」の煩雑さを避け
26 20	<b>N G G G 1</b> <sup>4</sup>		
$26 \sim 30$	MISTRS	"初期に与える小さい応力の与え方	
		$=0: / U / / \Delta h + 1$ 目期的に与える。	山ゴム、ハナ-田ハッフ
		-1: 初期応力は 0 とりる。有効応力依付性のない構成界	凹はかりを用いる
		ここはこれにてけっ	
		-2.) クマチんる。 -3.0 と同じ ただし 島知に与うた初期広力に相当する	く 笙価筋 占从 力の
$31 \sim 35$	NADMAS	節占に加える付加質量のカード数(連続した節占で質量	書が同じものけー
51 55		わのカードで入力できろ)	
$36 \sim 40$	NADLD	同時に考慮する筋点荷重の数。一筋点の一方向成分を一	っと数える。
$41 \sim 60$	FIN	5.3.2節の要素情報を読み込むためのファイル名。ブラン	/クのとき、ユニ
		ット番号5, すなわちカード入力が割り当てられる。	- ,

#### 5.3.3 要素情報

新しく作った要素の要素節点の境界条件は、全て一番最初に入力したものに置き変わる。変更 をしたいときには、NBNODEで指定する。

以下の要素の読み込みの最初に, JELM と KELM を読み込んでいる。これは, JELM から KELM までの要素に同じ情報を与える事を意味する。一つの要素のみに同じ情報を与えるのであれば, KELM=0とするか, KELM=JELM とする。なお, KELM が0でないときには KELM≧JELM である 必要がある。JELM が負であれば,前節の要素入力時の水の自由度にかかわらず,水の自由度は ない, すなわち,乾燥状態である事を意味する。

MISTRS=0, 1, 3としたときは,以下の入力で必要なのは JELM と KELM のみであり,その他 の応力,ひずみの入力データは入力しても意味がない。

(1) ばね要素

JELM, KELM, DISP (215, F10.0)

$1\sim 5$	JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
$6\sim 10$	KELM	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
$11 \sim 20$	DISP	相対変位[6.15]

(2) ダッシュポット

JELM, KELM (215)	
$1\sim$ 5 JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
$6\sim 10$ Kelm	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号

(3) はり要素

JELM, KEI	LM, AM1, AM	M2, Q, AN	(2I5, 4F10.0)
1~ 5	JELM	同じ初期状態を与える要素	の始まりの番号
$6 \sim 10$	KELM	同じ初期状態を与える要素	の終わりの番号
$11 \sim 20$	AM1	1 端のモーメント <sup>[6.23]</sup>	
$21\sim 30$	AM2	2 端のモーメント <sup>[6.23]</sup>	
$31 \sim 40$	Q	せん断力	
$41 \sim 50$	AN	軸力	

(4) 固体要素

ELM, KELM, SIGX, SIG	GY, TAUXY, SIGZ	(2I5, 6F10.0)
$1\sim$ 5 JELM	同じ初期状態を与;	える要素の始まりの番号
$6\sim 10$ Kelm	同じ初期状態を与;	える要素の終わりの番号
$11\sim 20$ SIGX	$\sigma'_x$	
$21\sim 30$ SIGY	$\sigma'_y$	
$31 \sim 40$ TAUXY	$ au_{xy}$	
$41\sim 50~\mathrm{SIGZ}$	$\sigma'_z$	

(5) ジョイント要素

(2I5, 2F10.0)
同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
法線方向応力
接線方向応力

(6) 回転バネ

# JELM, KELM, DISP (215, 2F10.0)

1~ 5	JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
$6\sim 10$	KELM	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
$11 \sim 20$	DISP	相対回転角 <sup>[6.15]</sup>

(7) SH 波

JELM, KELM, TAUYZ, TAUZX (215, 4F10.0)

JELM	同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
KELM	同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
TAUYZ	$ au_{yz}$
TAUZX	$ au_{zx}$
	JELM KELM TAUYZ TAUZX

### 5.3.4 境界条件

この節の入力は MBNODE>0の時のみ必要である。全部で MBNODE 枚のカードを入力する。

NODE, (MBDRY(I),I=1,3) (16I5)

1~ 5	NODE	節点番号
$6\sim 10$	MBDRY(1)	x 方向成分に対する変更方法の指示
$11 \sim 15$	MBDRY(2)	y 方向成分に対する変更方法の指示
$16\sim 20$	MBDRY(3)	回転成分に対する変更方法の指示
		=0:変更しない
		=1:自由度を拘束する。(固定)
		=2:自由度を開放する。(自由)
		<0:従属節点とし、節点番号を指定する。

#### 5.3.5 水に関する境界条件

この節の入力は MBSIDE>0の時のみ必要である。全部で MBSIDE 枚のカードを入力する。 自重・盛立解析では,要素の飽和度(要素の乾燥,飽和)を変更することは出来ない。しかし, 新しく盛り立てる要素の飽和,乾燥は指定できる水に関する境界の変更はこれと対応したもので なければならない。

# TYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)

$1\sim$ 6 ITYPE	境界の種類
	=-1:非排水境界
	=-2:排水境界(境界值=0)
	=-3:わきだし,吸い込み境界(値指定)
	=-4:排水境界(值指定)
	=0:通常の境界の戻すため、プログラムが適当に変更する。隣に要素が
	あれば、その要素と連続しているように扱うし、要素が無ければ、
	非排水の辺として扱う。
	>0:隣接する要素番号。この処置により、離れた要素と結合することも
	可能。この時,JELM は相手側の要素番号,JSIDE は相手側の要素
	の辺番号。同時に両方の要素を結び付ける。
$6\sim 10$ IELM	要素番号
$11 \sim 15$ ISIDE	辺番号。4.2節で要素節点を入力したときの n 番目の節点と n+1 番目の節
	点の間の境界の辺番号は n である。
$16\sim 20$ BVAL	境界值
$21\sim 25$ JELM	ITYPE>0のときの相手側の要素番号
$26\sim 30$ JSIDE	ITYPE>0 のときの相手側の辺番号

#### 5.3.6 付加質量

NADMAS>0の時のみこの項の入力が必要である。全部でNADMAS行のデータを入力する。質

量ではなく,重量で入力することに注意。

付加質量として負の値を代入することも可能である。その場合、付加質量を減らす。

IS, IE, AMASSX, AMASSR (215, 2F10.0)

1~ 5 IS 最初の節点番号。

6~ 10 IE 最後の節点番号。IE=0 のとき, IE=IS と同じ結果となる。IE>IS となるようにデータを作成する。

11~20 AMASSX 節点に付加する並進運動用の重量。

21~ 30 AMASSR 節点に付加する回転慣性に対する重量。

## 5.3.7 節点荷重

NADLD>0の時のみこの項の入力が必要である。全部で NADLD 行のデータを入力する。

ND, IDR, ALOAD (215, F10.0)

$1\sim$ 5 ND	節点番号
$6\sim 10$ IDR	荷重の方向を表わす番号
	=1:x方向,=2:y方向,=3:回転
$11 \sim 20$ Aload	荷重

## 5.4 掘削解析。要素を取り去る

解析法「EXCAVATE」が選択されたとき、この節の入力に従う。

掘削解析は、要素を不活性化させる作業である。ここでは、要素を不活性化させると共に、要素に作用していた等価節点外力を符号を逆に作用させる静的解析を行い、不活性化された要素の影響を考慮する。その荷重は一度に加えるわけではなく、次項に示す、NSTEP に等分し、これを 順次作用させながら、応力状態を求めていく。

## 5.4.1 解析方法の設定

NONSOL,	NSTEP, NST	E1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (715)
1~ 5	NONSOL	数値解析の手法 <sup>[6.19]</sup>
		=1:接線剛性法
		=2:初期応力法
		=3:修正初期応力法 <sup>[6.18]</sup>
		=4:修正 Newton-Raphson 法
$6 \sim 10$	NSTEP	不活性化された要素の自重を荷重として加える場合に、荷重を NSTEP に
		分割し,合計 NSTEP ステップの計算で値を求める。
$11 \sim 15$	NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	初期変位の与え方に関するフラグ
		=0:変位は0から出発
		=1:前の解析の継続の値を使う。
$16\sim 20$	NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	解析終了後に系の変位として何を残すかに関するフラグ
		=0:何も残さない。すなわち,変位は捨てられる。
		=1:変位は次のステップに持ち越す。
$21 \sim 25$	ITERMX	NONLIN=2 以上, すなわち, イタレーションによる収束計算をする解析
		手法を選んだ時のみ意味がある。ITERMX はイタレーションの最大回数
		である。この回数を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージ
		を印刷し、不釣合力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった
		時計算を終了したければ, 値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$26 \sim 30$	NPRT	各増分解析時の変位の印刷に関する指示。この指示にかかわらず最終状
		態は印刷される。
		=0:印刷なし。
		>0:NPRT ステップごとに印刷する。
31~ 35	NDRAIN	排水条件に関するフラグ
		=0:排水条件
		=1:非排水条件

5.4.2 基本情報

## MSUB, MBNODE, MBSIDE, NADMAS, NADLD (515)

$1\sim$ 5 MSUB	取り去る,同じ性状を持つ要素のブロックの数。
$6 \sim 10$ MBNODE	節点の自由度を変更する節点の数
	>0:一番最初に指定した境界条件から変更。
	<0:直前に行った解析の境界条件から変更。
	ここでは,以後の解析で用いられる境界条件を変更するのみである。
	例えば、固定端を自由端にした場合は、固定端反力が解放させるはずで
	あるが、そのようなことはここでは考えない。そのような解析をしたい
	場合には他の解析モードを用いる。

11~15 MBSIDE 辺の境界条件を変更する辺の数

- 16~20 NADMAS 節点より取り去る付加質量のカード数(連続した節点で質量が同じもの は一枚のカードで入力できる)。
- 21~25 NADLD 同時に考慮する節点荷重の数。一節点の一方向成分を一つと数える。

#### 5.4.3 要素情報

不活性化させる要素の番号を指定する。

以下の要素の読み込みの最初に, JELM と KELM を読み込んでいる。これは, JELM から KELM までの要素を不活性化させることを意味する。。一つの要素のみを不活性化のであれば, KELM=0 とするか, KELM=JELM とする。なお, KELM が0でないときには KELM≧JELM である必要があ る。

#### JELM, KELM (215)

- 1~ 5 JELM 同じ初期状態を与える要素の始まりの番号
- 6~ 10 KELM 同じ初期状態を与える要素の終わりの番号

## 5.4.4 境界条件

この節の入力は MBNODE>0の時のみ必要である。全部で MBNODE 枚のカードを入力する。

### NODE, (MBDRY(I), I=1,3) (1615)

1~ 5 NODE 節点番号

- 6~10 MBDRY(1) x 方向成分に対する変更方法の指示
- 11~15 MBDRY(2) y方向成分に対する変更方法の指示
- 16~ 20 MBDRY(3) 回転成分に対する変更方法の指示
  - =0:変更しない
  - =1:自由度を拘束する。(固定)
  - =2:自由度を開放する。(自由)
  - <0:従属節点とし、節点番号を指定する。

### 5.4.5 水に関する境界条件

掘削解析では要素の飽和度(飽和,乾燥)を変更することは出来ない。不活性化させた要素を 除いた残りの要素の境界に応じて水に関する境界条件を変更させる必要がある。

## TYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)

1~ 6 ITYPE 境界の種類

- =-1:非排水境界
- =-2: 排水境界(境界值=0)
- =-3:わきだし,吸い込み境界(値指定)
- =-4:排水境界(值指定)
- =0:通常の境界の戻すため、プログラムが適当に変更する。隣に要素が あれば、その要素と連続しているように扱うし、要素が無ければ、 非排水の辺として扱う。
- >0:隣接する要素番号。この処置により,離れた要素と結合することも 可能。この時,JELM は相手側の要素番号,JSIDE は相手側の要素 の辺番号。同時に両方の要素を結び付ける。

#### 6~ 10 IELM 要素番号

$11 \sim 15$	ISIDE	辺番号。4.2節で要素節点を入力したときのn番目の節点とn+1番目の節
		点の間の境界の辺番号は n である。
$16\sim 20$	BVAL	境界值
01 05		TYPE A のしたの切て回の声書 4日

21~ 25 JELM ITYPE>0のときの相手側の要素番号

26~ 30 JSIDE ITYPE>0のときの相手側の辺番号

## 5.4.6 付加質量

NADMAS>0の時のみこの項の入力が必要である。全部でNADMAS行のデータを入力する。質量ではなく,重量で入力することに注意。

付加質量として負の値を代入することも可能である。その場合、付加質量を減らす。

## IS, IE, AMASSX, AMASSR (215, 2F10.0)

$1\sim 5$	IS	最初の節点番号。
$6\sim 10$	IE	最後の節点番号。IE=0のとき、IE=ISと同じ結果となる。IE>ISとなるよ
		うにデータを作成する。
$11 \sim 20$	AMASSX	節点に付加する並進運動用の重量。
$21 \sim 30$	AMASSR	節点に付加する回転慣性に対する重量。

#### 5.4.7 節点荷重

NADLD>0の時のみこの項の入力が必要である。全部で NADLD 行のデータを入力する。

## ND, IDR, ALOAD (215, 2F10.0)

$1\sim$ 5 ND	節点番号
$6\sim 10$ IDR	荷重の方向を表わす番号
	=1:x方向,=2:y方向,=3:回転
$11 \sim 20$ Aload	荷重

#### 5.5 静的解析

解析法「STATIC」が選択されたとき、この節の入力に従う。

STADAS で用意している静的解析の考え方は、次のようなものである。

- ①変位、または力をいくつかの節点に同時に加える。各節点に作用する変位や力は比例的である。
  ②加力方法として、単調載荷と繰返し載荷がある。繰返し載荷では、除荷点の値のみを与える方法と、計算に用いる全ての増分を指定する方法とがある。単調載荷や除荷点指定繰返し載荷では、指定された載荷点までステップを追って解析する必要がある。これは STADAS では非線形解析を基本としているからである。ステップを追う方法として、載荷パラメータの増分値を与える方法と、最終点に付くまでのステップ数を指定する方法がある。
- ③力を加え、変位で除荷点や計算の終了を制御、逆に変位を加え、除荷点や計算の終了を力で制 御することも可能である。この場合、丁度指定した点を求めることはしておらず、指定された 点を越えたときを計算の終了や除荷の判断基準としている。

## 5.5.1 基本情報

NONLIN, N	ISTE1, NSTI	E2, ITERMX, NDRAIN, NOUTND, NOUTEM, NPRT (1015)
1~ 5	NONLIN	数値解析の手法 <sup>[6.19]</sup>
		=1:接線剛性法
		=2:初期応力法 <sup>[6.18]</sup> 。強制変位を与える解析では(K <sub>ab</sub> u <sub>b</sub> の計算が毎回必
		要なため係数行列は常に変化するので),このオプションは有効で
		はなく, NONLIN=3と同じ事となる。
		=3:修正初期剛性法
		=4:修正 Newton-Raphson 法
$6 \sim 10$	NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	初期変位の与え方に関するフラグ
		=0:変位は0から出発
		=1:前の解析の継続の値を使う。
$11 \sim 15$	NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	解析終了後に系の状態として何を残すかに関するフラグ
		0=何も残さない。すなわち,変位は捨てられる。
		1=変位は次のステップに持ち越す。
$16\sim 20$	ITERMX	NONLIN=2 の時のみ意味があり、イタレーションの最大回数。この回数
		を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージを印刷し、不釣合
		力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった時計算を終了した
		ければ,値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$21 \sim 25$	NDRAIN	排水条件
		=0:排水
		=1:非排水
$26 \sim 30$	NOUTND	節点変位を出力する節点の数。負の時,全部の質点の応答
$31 \sim 35$	NOUTEM	要素の応答値を出力する節点の数(応力とひずみ)。負の時全ての要素
		の応答。
$36 \sim 40$	NPRT	途中の計算結果を出力するステップ数
		=0:印刷なし。ただし、最後の状態は印刷する。
		>0:NPRT ステップごとに印刷。さらに最後の状態を印刷。
		<0:-NPRT 個の指定されたステップ数のみを印刷。ただし,NPRT=-9999
		は特別な意味を持っている。次に入力する NCTRL=3~5(一定変位
		振幅繰返し載荷)のとき、載荷方向逆転の時にのみ印刷を行う。

### 5.5.2 制御情報

NCTRL, NLCTRL, NRCTRL, NLOAD, NCTRLN, NCTRLD, NCYC, ASTOP (715, F10.0)

- 加力の方法。NCTRL と以下で必要なデータとの関係は下表に示されてい  $1\sim$  5 NCTRL る。
  - =1:単調載荷(計算終了は終局値)
  - =2:単調載荷(計算終了はステップ数)
  - =3:一定振幅繰返し載荷
  - =4:一定振幅繰返し載荷の後,0に戻る。
  - =5:変動振幅繰返し載荷
  - =6:加力值入力
- 6~ 10 NLCTRL 加力の与え方
  - =1:荷重
  - =2:変位
- 11~15 NRCTRL 除荷点の制御方法
  - =0:NLCTRL と同じ値となる
    - =1:荷重
    - =2:変位
- 加力点の数(1節点,1方向を1と数える。従って,一つの節点に二方向  $16 \sim 20$  NLOAD の加力があるときには2と数える)
- 除荷の制御を行う節点の番号。0を入力すると最初の自由度がある節点を  $21 \sim 25$  NCTRLN 使う。また、荷重で載荷し、除荷を制御する場合、-1 を入力すると、全 ての加力点の節点力の和を除荷制御に用いる。NCTRLN と NCTRLD は, NCTRL=6の時には本来不用である。しかし、これらに適当な値を入力し ておけば、その値を印刷時等に出力するので便利である。
- 除荷の制御を行う自由度の番号  $26 \sim 30$  NCTRLD

=1:x方向,=2:v方向,=3:回転

- $31 \sim 35$  NCYC 繰返し半サイクル数 (NCTRL=3,4,5) または計算ステップ数 (NCTRL=2,6)
- $36 \sim 45$  ASTOP
- 指定された節点 NCTRLN の, NCTRLD 方向の応答値(変位)の絶対値が この値を越えればプログラムはストップする(暴走防止)。NCTRLN が 指定されなければ、自由度番号1番。ASTOP=0なら、この機能は働かな V.

NCTRL	1	2	3	4	5	6
NLCTRL	1~2	1~2	1~2	1~2	1~2	1~2
NRCTRL	0~2	_	0~2	0~2	0~2	1
NLOAD	0	$\bigcirc$	0	$\bigcirc$	$\bigcirc$	0
NCTRLN	0	_	0	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigtriangleup$
NCTRLD	0	_	0	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$\bigtriangleup$
NLOADP	0	$\bigcirc$	0	$\bigcirc$	$\bigcirc$	0
ANLOAD	0	$\bigcirc$	0	$\bigcirc$	$\bigcirc$	
NCYC	_	0	0	0	0	0
AMPL	0	0	0	0	0	_

各制御に対して必要な値

## 5.5.3 入出力ファイル名

FOUT, FIN (2A20)

1~20 FOUT 解析結果をファイル出力する場合のファイル名。1.5節参照)

 21~40 FIN
 NCTRL=6 の時のみ必要で、加力値を入力するファイル名。ブランクのと

 き標準的な入力ディバイス、すなわちカードからデータが読み込まれる。

#### 5.5.4 加力点と加力方向

#### ((NLOADP(J, I), J = 1, 2), I = 1, NLOAD) (10I5) 1枚のカードに5節点分

1~ 5 NLOADP(1,I) I 番目の加力点の節点番号

6~ 10 NLOADP(2,I) I番目の加力点の自由度番号

=1:x方向,=2:y方向,=3:回転

(注)荷重を与え載荷するとき、従属自由度を指定しても、独立自由度を指定してもかまわない。 両方とも指定したときは、両者の和が作用した事になる。一方、変位で載荷するとき、従属自由 度の点に指定してはいけない。その場合、プログラムは強制終了となる。

#### 5.5.5 加力点の比例定数

<u>この項の入力は, NCTRL=6</u>, すなわち荷重を節点ごとに任意に入力するときには不要である。 (ANLOAD(I), I = 1, NLOAD) (5F10.0)

1~10 ANLOAD(1)1 番目の加力点のの比例定数。後に AMPL で指定される増分にこの値を 掛けたものが各節点に加わる実際の値となる。1 行に 5 つのデータ。

#### 5.5.6 節点応答値

この節の入力は,NOUTND>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTND 個の節点番号 を入力する。カードー枚で10の節点番号を入力する。

#### (NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (1015)

NNDOUT(J) 節点応答値を出力する節点の番号(0の時,入力地震波)

#### 5.5.7 要素応答値

この節の入力は,NOUTEL>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTEL 個の節点番号を入力する。カードー枚で10の要素番号を入力する。

(NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (10I5)

NELOUT(J) 要素応答値を出力する要素番号

### 5.5.8 途中の応答値を出力するステップ数

この節の入力は,NPRT<0,すなわち,途中の応答値を出力するステップ数を入力する指示が行 なわれたときのみ必要である。[NPRT]個のステップ数の入力が必要である。カードー枚に10個の ステップ数を入力する。

(NPRTSTP(J), J = 1, NPRT) (8F10.0)

NPRTSTP(J) 途中の応答値を出力するステップ数

#### 5.5.9 加力の大きさ

NCTRL の値により入力方法が異なる。

#### (1) NCTRL=1(単調載荷,終局値指定)のとき

AINCRE, AEND (2F10.0)

- 1~ 10 AINCRE 増分値。符号も意味がある。
- 11~20 AEND
   計算打ち切り値。制御点の応答がこの値を越えたところで計算を終了する。

#### (2) NCTRL=2(単調載荷, ステップ数指定)

NCYC ステップの計算を行った後,計算を終了する。

AINCRE (F10.0)

1~10 AINCRE 増分値。符号も意味がある。

## (3) NCTRL = 3, 4(繰返し載荷)

NCTRL=3と4の違いは、NCTRL=3の計算を終わった後、NCTRL=4だと制御点の応答が0になる までの計算を行うだけである。(下図参照)



## AINCRE, AMP (2F10.0)

1~10 AINCRE 増分値。符号も意味があり、最初の増分の方向を示す。

11~ 20 AMP 振幅

#### (4) NCRTL=5(変動振幅繰返し載荷)

このオプションでは、2種類の入力が必要である。最初の入力は増分値に関するもので、カード ー枚にデータが一つだけである。その後、除荷点の値をカードー枚当り8づつ、合計 NCYC のデ ータ入力を行う。一般的に入力するデータは除荷点であるが、必ずしも載荷の方向が反転しなく てもよい。この場合、載荷制御方法と除荷制御方法が同じ(NLCTRL と NRCTRL が同じ値)であ れば、与えられた点の増分方向のみを判断し、以後の増分の向きを決めることが出来る。異なる 場合には、除荷制御点で除荷が生じるような点の与え方をしていれば載荷方向を反転させるとい う方法を用いている。

## ・増分値(最初の一枚のカード)

AINCRE (F10.0)

1~10 AINCRE 増分値。符号も意味を持っており、最初の増分方向である。

・除荷点列(二枚目以降のカードで全部でNCYCデータ)
 RTN(J), J = 1, NCYC (8F10.0)
 RTN(J) J番目の除荷点の値

## (5) NCTRL=6(載荷点を順番に与える)

以下の制御点のデータを NCYC セット続ける。

ANLOAD(J), J = 1, NLOAD (8F10.0) ANLOAD(J) J番目の加力点の加力値

## 5.6 地震応答解析

解析法「EARTHQUAKE」が選択されたとき、この節の入力に従う。

# 5.6.1 基本データ(1)

NINTEG, NDMPM, NS	TE1, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, FOUT (615, A20)
$1\sim$ 5 NINTEG	数値積分の手法 <sup>[6.19]</sup>
	=1: Newmark $\mathcal{O}\beta$ 法。
	=2:予測子修正子法(初期剛性)。
	=3:予測子修正子法(各増分計算時に1回だけ初期剛性を計算する)。
	=4:予測子修正子法(各増分計算時に1回だけ接線剛性を計算する)。
	=5:Newmarkのβ法(除荷時には除荷剛性を用いるよう一回だけイタレー
	ション)
$6\sim 10$ NDMPM	減衰マトリックスの作り方。
	=0:Rayleigh 減衰。初期値のまま変えない。
	=1:Raileigh 減衰。接線剛性で比例させる。
	0, 1の時, α, βは剛性および質量比例の比例係数。
	(注)接線剛性が求まらない構成則で1を使うのはいけない。
	ここで指定するのは系に関する減衰である。これに加えて要素個別の
	減衰を考えることが出来る。これを要素の部分で与える。
	$=2: \mathcal{E} - \mathcal{F} \overline{\mathcal{M}} \overline{\mathcal{R}}$
	(NDMPM=2 を用いるときには、その前に固有値解析を行い減衰マトリ
(14) ( <b>5</b> ) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6) (6	ックスを求めておく必要がある。
$11 \sim 15$ NSTE1 <sup>[0.14]</sup>	初期条件の与え方に関するファグ
	=0: 変位, 速度, 加速度は0から出発
16 <b>20</b> NGT D2 <sup>[6]4]</sup>	
$16 \sim 20$ NSTE2 <sup>[0,11]</sup>	解析終了後に糸の状態(加速度、速度、変位)として何を残すかに関す
	るノフク
	=1: 変位, 速度, 加速度は次のヘアツノに持ら越り。
21 a. 25 ITEDMY	-2: 変世は行り越りか, 速度, 加速度は信しる。
$21\sim 25$ TIERMX	NINIEG=2 の時のみ息味がめり、イタレーションの取入回数。この回数 も計算な行っても収ましたいときはエラーメッセージを印刷し て始合
	2前昇21つても収入しないこさはエノニアツビニンを印刷し、小町市 カな次回の持ち城して計算を結ける。 収声したかった時計算を放了した
	ければ「値を角にする(統計値は最大編り返し回数)
$26\sim 30$ NDP AIN	ければ、値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$26\sim 30$ NDRAIN	ければ, 値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。 排水条件 =0: 排水
$26\sim 30$ NDRAIN	<ul> <li>ければ,値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。</li> <li>排水条件</li> <li>=0:排水</li> </ul>
$26 \sim 30$ NDRAIN $31 \sim 50$ Fourt	ければ,値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。 排水条件 =0:排水 =1:非排水 時刻歴応答出力ファイル名 ブランクとすると前の出力ファイルと同じ
$26\sim 30$ NDRAIN $31\sim 50$ Fout	ければ, 値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。 排水条件 =0:排水 =1:非排水 時刻歴応答出力ファイル名。ブランクとすると前の出力ファイルと同じ になる

## 5.6.2 基本データ(2)

\_

ALPHA, BETA, NOUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, COEF1, COEF2	(2F10.0, 4I5, 2F10.0)
--	-----------------------

1~10 ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の質量比例係数

11~ 20 BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の剛性比例係数

21~25 NOUTND 節点応答値時刻歴を出力する節点の数(各方向の変位,速度,加速度)。 負の時,全部の質点の応答

**26~30 NOUTEM** 要素の時刻歴を出力する節点の数(応力とひずみ)。負の時全ての要素の応答。

31~ 35	NPRT	途中の計算結果を出力する時刻
		=0:印刷なし。(最後の状態は出力される)
		>0:NPRT ステップごとに印刷。さらに最後の状態を印刷。
		<0:-NPRT 個の指定された時刻のみ。最終状態は印刷される。
$36\sim 40$	MXPRT	途中までの最大値を印刷するステップ数。(最終状態は必ず印刷される)
		=0:印刷なし。(最後の状態は印刷される)
		>0:MXPRT ステップごとに印刷。さらに,最終状態を印刷
		<0:-MXPRT 個の指定された時刻のみ。最終状態は印刷される。
41~ 50	COEF1	数値積分に用いる係数で, Newmark のβ法のβの値。標準値 0.25 または 1/6
51~ 60	COEF2	数値積分に用いる係数で, Newmark のβ法のγの値。標準値 0.5

## 5.6.3 地震波に関するデータ

NDATA, NCARD, DT,	NSDIV, (IBASND(I), I = 1, 2), EQFMT (215, F10.0, 315, 5X, A40)
$1\sim$ 5 NDATA	地震波のデータ数
$6\sim 10$ NCARD	1枚のカードの含まれるデータの数 (≤20)
11~ 20 DT	入力地震動の時間増分。計算時間は NDATA×DT
$21\sim 25$ NSDIV	数値積分のための細分化。時間増分を DT を NDIV 分割し計算する。
$26 \sim 30$ IBASND(1)	変位,速度出力の相対値の基準節点番号。(x 方向)
	=0:計算した値(弾性基盤の時,解放基盤に対する相対値)
	=-1:絶対値
	>0:節点番号
$31 \sim 36$ IBASND(2)	変位,速度出力の相対値の基準節点番号。(y 方向)
	=0:計算した値(弾性基盤の時,解放基盤に対する相対値)
	=-1:絶対値
	>0:節点番号
$41 \sim 80 \text{ FRMT}$	地震波を読み込むための FORMAT

5.6.4 地震波名

IX, IY, EQNAM	(2I1, 8X, A40)	
$1 \sim 1$ IX	x 方向地震波入力があるとき 1,	なければ0とする。
$2\sim~2$ IY	y 方向地震波入力があるとき 1,	なければ0とする。
$11\sim 50$ Eqnam	地震波の名称	

## 5.6.5 地震波のファイル

前項のIX, IY のうち1を入力した数だけのカードを入力する。

# EQMULT, NSKP, FILNAM (F10.0, I5, 5X, A20)

$1 \sim 10$ EQMULT	ファイルより読み込んだ数値に掛ける乗数(0,またはブランクが入力さ
	れると 1.0 に変更する)。
$11 \sim 15$ NSKP	ファイルの先頭より NSKP 行のデータを読み飛ばす。

21~40 FILNAM ファイル名。

#### 5.6.6 節点応答値

この節の入力は,NOUTND>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTND 個の節点番号 を入力する。カードー枚で10の節点番号を入力する。

(NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (1015)

NNDOUT(J) 節点応答値を出力する節点の番号(0の時,入力地震波)

#### 5.6.7 要素応答值

この節の入力は,NOUTEL>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTEL 個の節点番号を 入力する。カードー枚で10の要素番号を入力する。

(NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (10I5)

NELOUT(J) 要素応答値を出力する要素番号

#### 5.6.8 途中の応答値を出力する時刻

この節の入力は、NPRT<0、すなわち、途中の応答値を出力する時刻を入力する指示が行なわれたときのみ必要である。[NPRT]個の時刻の入力が必要である。カードー枚に8個の時刻を入力する。

(PRTTIM(J), J = 1, |NPRT|) (8F10.0)

PRTTIM(J) 途中の応答値を出力する時刻

#### 5.6.9 途中の最大値を出力する時刻

この項の入力は, MXPRT>0の時のみ必要である。全部で MXPRT 個のデータを入力する。 (AMXPRT(J), J = 1, MXPRT) (8F10.0)

AMXPRT(J) 途中の最大値を出力する時刻

## 5.6.10 地震波の読み込み

XCOMP(I), I = 1, NSDIV (EQFMT) 5.6.4項の IX>0の時のみ必要。

YCOMP(I), I=1, NSDIV (EQFMT) 5.6.4項の IY>0の時のみ必要。

XCOMP(I) x 方向の地震波(加速度)。

YCOMP(I) y方向の地震波(加速度)。

一般には地震波ファイルは異なることを前提としている。しかし同じファイルを使うことも可 能である。プログラムでは,x,y各方向成分に関し,NSDIV 個づつ地震波を読み込み,地震応答 解析を行った後次の地震波を読み込むような処理をしている。地震波の入力に同じファイル番号 を使用したときは,この方法で正しく地震波が読み込めるようにデータを並べる。

## 5.7 動的解析・節点加力

解析法「DYNAMIC」が選択されたとき、この節の入力に従う。 節点に動的に繰返し荷重を作用させるケースを解析する。

# 5.7.1 基本データ(1)

NINTEG, NDMPM, NS	TE1, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, FOUT (615, A20)
$1\sim$ 5 NINTEG	数値積分の手法 <sup>[6.19]</sup>
	=1:Newmark の $\beta$ 法。
	=2:予測子修正子法(初期剛性)。
	=3:予測子修正子法(各増分計算時に1回だけ初期剛性を計算する)。
	=4:予測子修正子法(各増分計算時に1回だけ接線剛性を計算する)。
	=5:Newmarkのβ法(除荷時には除荷剛性を用いるよう一回だけイタレー
	ション)
$6\sim 10$ NDMPM	減衰マトリックスの作り方。
	=0:Rayleigh 減衰。初期値のまま変えない。
	=1:Raileigh 減衰。接線剛性で比例させる。
	0,1の時,α,βは剛性および質量比例の比例係数。
	(注)接線剛性が求まらない構成則で1を使うのはいけない。
	ここで指定するのは系に関する減衰である。これに加えて要素個別の
	減衰を考えることが出来る。これを要素の部分で与える。
	=2:モード減衰
	(NDMPM=2 を用いるときには、その前に固有値解析を行い減衰マトリ
	ックスを求めておく必要がある。
$11 \sim 15 \text{ NSTE1}^{[6.14]}$	初期速度,変位,加速度の与え方に関するフラグ
	=0:変位,速度,加速度は0から出発
	=1:前の解析の継続の値を使う。
$16 \sim 20 \text{ NSTE2}^{[6.14]}$	解析終了後に系の速度、変位、加速度として何を残すかに関するフラグ
	=0:何も残さない。
	=1:変位,速度,加速度は次のステップに持ち越す。
	=2:変位は持ち越すが、速度、加速度は捨てる。
$21\sim 25$ ITERMX	NINTEG=2 の時のみ意味があり、イタレーションの最大回数。この回数
	を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージを印刷し、不釣合
	力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった時計算を終了した
	けれは、値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$26\sim 30$ NDRAIN	排水条件
$31\sim 50$ FOUT	時刻歴心谷出力ファイル名。ファンクとすると前の出力ファイルと同じ
	になる。

## 5.7.2 基本データ(2)

ALPHA, BETA, NOUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, COEF1, COEF2, (2F10.0, 4I5, 2F10.0, I5) NLOAD

1~ 10 ALPHA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の質量比例係数

11~ 20 BETA<sup>[6.10]</sup> Rayleigh 減衰の剛性比例係数

21~25 NOUTND 節点応答値時刻歴を出力する節点の数(各方向の変位,速度,加速度)。 負の時,全部の質点の応答

**26~30 NOUTEM** 要素の時刻歴を出力する節点の数(応力とひずみ)。負の時全ての要素 の応答。

$31 \sim 35$	NPRT	途中の計算結果を出力する時刻
		=0:印刷なし。(最後の状態は出力される)
		>0:NPRT ステップごとに印刷。さらに最後の状態を印刷。
		<0:-NPRT 個の指定された時刻のみ。最終状態は印刷される。
$36 \sim 40$	MXPRT	途中までの最大値を印刷するステップ数。(最終状態は必ず印刷される)
		=0:印刷なし。(最後の状態は印刷される)
		>0:MXPRT ステップごとに印刷。さらに,最終状態を印刷
		<0:-MXPRT 個の指定された時刻のみ。最終状態は印刷される。
$41 \sim 50$	COEF1	数値積分に用いる係数で, Newmark のβ法のβの値。標準値 0.25 または 1/6
$51 \sim 60$	COEF2	数値積分に用いる係数で, Newmark のβ法のγの値。標準値 0.5

### 5.7.3 加力点の数

動的加振を行う節点数を入力する。加力点は一方向ごとに一つと数えるので、一節点でも二つ の方向に加振するときは数は2となる。

NLOAD (I5)

1~ 5 NLOAD 加力点の数

### 5.7.4 加力点の指定

(NODEP(J, I), J = 1, 2), I = 1, NDATA (16I5)

 NODEP(1,I)
 節点番号

 NODEP(2,I)
 加力方向。

 =1:x方向,=2:y方向

## 5.7.5 加力用のファイル

FILNAM, FRMT	(A20, A40)
$1\sim 20$ FILNA	M 入力ファイル名
$21\sim 60$ FRMT	入力 FORMAT

## 5.7.6 加力方法の指示

NDATA, DT, (IBASND(I), I = 1, 2) (I5, F10.0, 2I5)

 1~5
 NDATA
 計算ステップ数。

 6~15
 DT
 時間増分
 計算時間はNSTEP\*DT

 16~20
 IBASND(1)
 変位,速度出力の相対値の基準節点番号。(x 方向)

 =0:計算した値(弾性基盤の時,解放基盤に対する相対値)

 =-1:絶対値

 >0:節点番号

 21~25
 IBASND(2)
 変位,速度出力の相対値の基準節点番号。(y 方向)

=0:計算した値(弾性基盤の時,解放基盤に対する相対値)

=-1:絶対値 >0:節点番号

### 5.7.7 節点応答値

この節の入力は,NOUTND>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTND 個の節点番号 を入力する。カードー枚で10の節点番号を入力する。

### (NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (10I5)

NNDOUT(J)節点応答値を出力する節点の番号

#### 5.7.8 要素応答値

この節の入力は,NOUTEL>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTEL 個の節点番号を入力する。カードー枚で10の要素番号を入力する。

## (NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (1015)

NELOUT(J) 要素応答値を出力する要素番号

### 5.7.9 途中の応答値を出力する時刻

この節の入力は、NPRT<0, すなわち,途中の応答値を出力する時刻を入力する指示が行なわれたときのみ必要である。[NPRT]個の時刻の入力が必要である。カードー枚に8個の時刻を入力する。

## (PRTTIM(J), J = 1, NPRT) (8F10.0)

PRTTIM(J) 途中の応答値を出力する時刻

### 5.7.10 途中の最大値を出力する時刻

この項の入力は、MXPRT>0の時のみ必要である。全部で MXPRT 個のデータを入力する。

(AMXPRT(J), J = 1, MXPRT) (8F10.0) AMXPRT(J) 途中の最大値を出力する時刻

## 5.7.11 加力点の読み込み

XCOMP(I), I = 1, NDATA (FRMT) XCOMP(I) 加力の値

## 5.8 地下水位の変化

解析法「WATER」が選択されたとき、この節の入力に従う。

地下水の変化の解析では,要素の飽和度(乾燥→飽和または飽和→乾燥)の変化を伴なう。水 に関する境界条件の設定は新しい境界条件に対応するものでなければならない。

## 5.8.1 解析方法の設定

NONSOL, NSTEP, NS	TE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (7I5)
$1\sim$ 5 NONSOL	数値解析の手法 <sup>[6.19]</sup>
	=1:接線剛性法。収練計算は行わない。不釣合力は次回に持ち越す。
	=2:初期応力法
	=3:修正初期応力法 <sup>[6.18]</sup>
	=4:修正 Newton-Raphson
$6\sim 10$ NSTEP	地下水の変化に伴う荷重を NSTEP に分割し、合計 NSTEP の計算で値を
	求める。
$11 \sim 15 \text{ NSTE1}^{[6.14]}$	初期変位の与え方に関するフラグ
	=0:変位は0から出発
	=1:前の解析の継続の値を使う。
$16 \sim 20 \text{ NSTE2}^{[6.14]}$	解析終了後に系の変位として何を残すかに関するフラグ
	=0:何も残さない。すなわち,変位は捨てられる。
	=1:変位は次のステップに持ち越す。
$21\sim 25$ ITERMX	NONLIN=2 以上, すなわち, イタレーションによる収束計算をする解析
	手法を選んだ時のみ意味がある。ITERMX はイタレーションの最大回数
	である。この回数を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージ
	を印刷し、不釣合力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった
	時計算を終了したければ, 値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$26\sim 30$ NPRT	各増分解析時の変位の印刷に関する指示。この指示にかかわらず最終状
	態は印刷される。
	=0:印刷なし。
	>0:NPRT ステップごとに印刷する。
$31\sim 35$ NDRAIN	排水条件に関するフラグ
	=0:排水条件
	=1:非排水条件

## 5.8.2 基本情報

## MADD, MBSIDE, NADLD (315)

$1\sim$ 5 MADD	水に関する条件が変わる要素ブロックの数。
$6\sim 10$ MBSIDE	辺の境界条件を変更する辺の数
$11 \sim 15$ NADLD	同時に考慮する節点荷重の数。一節点の一方向成分を一つと数える。

## 5.8.3 要素情報

地下水位の変化に伴い水に関する状態が変わった要素,すなわち,乾燥状態から飽和状態,または飽和状態から乾燥状態になった要素を指定する。プログラムでは境界条件の変化と要素の変化の整合性のチェックはしていないので注意が必要である。全部で MADD 枚のカードが必要である。

## JELM, KELM, IFLG (315)

1~ 5 JELM 同じ初期状態を与える要素の始まりの番号

- 6~10 KELM 同じ初期状態を与える要素の終わりの番号
- 11~15 IFLG 水の状態の変化
  - =1:乾燥状態になる。
  - =2:湿潤状態になる。

## 5.8.4 水に関する境界条件

この節の入力は MBSIDE>0の時のみ必要である。全部で MBSIDE 枚のカードの入力が必要である。

]	TYPE, IELM, ISIDE, B	SVAL, JELM, JSIDE (615)
	$1\sim$ 6 ITYPE	境界の種類
		=-1:非排水境界
		=-2:排水境界(境界值=0)
		=-3:わきだし,吸い込み境界(値指定)
		=-4:排水境界(值指定)
		=0:通常の境界の戻すため、プログラムが適当に変更する。となりに要
		素があれば、その要素と連続しているように扱うし、要素が無けれ
		ば、非排水の辺として扱う。
		>0:隣接する要素番号。この処置により、離れた要素と結合することも
		可能。この時, JELM は相手側の要素番号, JSIDE は相手側の要素
		の辺番号。同時に両方の要素を結び付ける。
	$6\sim 10$ IELM	要素番号
	$11 \sim 15$ ISIDE	辺番号。4.2節で要素節点を入力したときのn番目の節点とn+1番目の節
		点の間の境界の辺番号は n である。
	$16\sim 20$ BVAL	境界値
	$21\sim 25$ JELM	ITYPE>0のときの相手側の要素番号

26~30 JSIDE ITYPE>0のときの相手側の辺番号

## 5.8.5 節点荷重

NADLD>0の時のみこの項の入力が必要である。全部で NADLD 行のデータを入力する。

	ND, IDR, ALOAD	(2I5, 2F10.0)
--	----------------	---------------

_ ,, = =	()
$1\sim$ 5 ND	節点番号
$6\sim 10$ IDR	荷重の方向を表わす番号
	=1:x方向,=2:y方向,=3:回転

## 5.9 圧密解析

解析法「CONSOL」が選択されたとき、この節の入力に従う。

## 5.9.1 基本データ

NINTEG, NTCSL, NCS	LD, NCSLW, NSTE1, NSTE2, ITERMX, TEND (715, F10.0)
$1\sim$ 5 NINTEG	数値積分の手法 <sup>[6.19]</sup>
	=1:接線剛性法
	=2:予測子修正子法(初期剛性法)
	=3:予測子修正子法(修正初期剛性法) <sup>[6.18]</sup>
	=4:予測子修正子法(修正 Newton-Raphson 法)
$6\sim 10$ NTCSL	解析時間の与え方
	=0:一定值 <i>Δt</i>
	>0:時間増分とその時間増分で計算するステップ数の組み合せを与える。
	数字は組み合せの数。
	=-1:計算時間を別に読み込む
	$=-2: \Delta t = \Delta t_{old} \times \text{factor}$
$11 \sim 15$ NCSLD	各計算ステップ毎に与える外力に関するフラグ
	=0:外力なし
	>0:外力あり。このとき,NCSLD は外力を与える節点の数
$16\sim 20$ NCSLW	各計算ステップ毎に与える水圧変動に関するフラグ
	=0:水圧変動なし
	>0:水圧変動あり。このとき,NCSLW は水圧変動する辺の数
$21 \sim 25 \text{ NSTE1}^{[6.14]}$	初期変位と速度の与え方に関するフラグ
	=0:変位,速度は0から出発
	=1:前の解析の継続の値を使う。
$26 \sim 30 \text{ NSTE2}^{[6.14]}$	解析終了後に系の変位と速度として何を残すかに関するフラグ
	=0:何も残さない。すなわち、変位、速度は捨てられる。
	=1:変位,速度は次のステップに持ち越す。
	=2:変位は持ち越すが、速度は捨てる。
$31\sim 35$ ITERMX	NINTEG=2 の時のみ意味があり、イタレーションの最大回数。この回数
	を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージを印刷し、不釣合
	力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった時計算を終了した
	ければ、値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。
$36\sim 45$ TEND	計算終了時間。0以外の値が入力されていれば,TENDで計算を終了する。

## 5.9.2 出力方法に関する基本データ

## NOUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, FOUT (415, A20)

- 1~ 5 NOUTND 節点応答値時刻歴を出力する節点の数(各方向の変位,速度)。負の時, 全部の質点の応答
  - 6~10 NOUTEM 要素の時刻歴を出力する節点の数(応力とひずみ)。負の時全ての要素の応答。
- 11~15 NPRT 途中の計算結果を出力するステップ数
  - =0:印刷なし。(最後の状態は出力される)
  - >0:NPRT ステップごとに印刷。さらに最後の状態を印刷。
  - <0:-NPRT 個の指定された時刻のみ。最終状態は印刷される。

16~20 MXPRT 途中までの最大値を印刷するステップ数。(最終状態は必ず印刷される)
 =0:印刷なし。(最後の状態は印刷される)
 >0:MXPRT ステップごとに印刷。さらに、最終状態を印刷
 <0:-MXPRT 個の指定された時刻のみ。最終状態は印刷される。</li>
 21~40 FOUT 時刻歴応答結果出力ファイル名。

### 5.9.3 時間ステップに関する指定

NTCSL の値によって入力方法が異なる。

#### (1) NTCSL=0の時

DELT	(F10.0)	
$1\sim$	10 DELT	時間増分

#### (2) NTCSL>0の時

NSTP(I), DELT(I), I = 1	, NTCSL (I5, 5X, F10.0)
$1\sim$ 5 NSTP(I)	ステップ数
$11 \sim 20$ DELT(I)	その区間の時間増分

### (3) NTCSL=-1の時

NSDIV, FIN, CSLFM1	(I5, 5X, A20, A40)
$1\sim$ 5 NSDIV	一つの FORMAT で読み込む時刻の数
$11\sim 30$ FIN	入力ファイル名
31~ 70 CSLFM1	読み込むための FORMAT。両端を括弧でくくる事。

### (4) NTCSL=-2の時

 DELT, FACTOR
 (2F10.0)

 1~10
 DELT
 最初の時間増分

 11~20
 FACTOR
 乗数

## 5.9.4 外力に関するデータ

この項のデータは、NCSLD>0の時のみ必要である。

### FILN0, CSLFMT (A20, A40)

1~ 20 FILN0 データを読み込むファイル名

21~ 60 CSLFMT データを読み込むための FORMAT。両端を括弧で囲むこと。

NODCSL(I, J), J = 1, 2), I = 1, NCSLD (10I5) 節点番号とその作用方向

#### 5.9.5 水圧変動に関するデータ

この項のデータは、NCSLW>0の時のみ必要である。

FILN1, CSLFMT (A20, A40)

1~ 20 FILN1 データを読み込むファイル名

21~ 60 CSWFMT データを読み込むための FORMAT。両端を括弧で囲むこと。

### 5.9.6 節点応答値

この節の入力は,NOUTND>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTND 個の節点番号 を入力する。カードー枚で10の節点番号を入力する。

### (NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (10I5)

NNDOUT(J) 節点応答値を出力する節点の番号(0の時,入力地震波)

#### 5.9.7 要素応答値

この節の入力は,NOUTEL>0の時のみ必要である。ファイル出力する NOUTEL 個の節点番号を入力する。カードー枚で10の要素番号を入力する。

### (NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (1015)

NELOUT(J) 要素応答値を出力する要素番号

### 5.9.8 途中の応答値を出力する時刻

この節の入力は, NPRT<0, すなわち, 途中の応答値を出力する時刻を入力する指示が行なわれ たときのみ必要である。|NPRT|個の時刻の入力が必要である。カード一枚に10個の時刻を入力す る。

(PRTTIM(J), J = 1, NN) (8F10.0)

PRTTIM(J) 途中の応答値を出力する時刻

## 5.9.9 途中の最大値を出力する時刻

 (AMXPRT(J), J = 1, NN)
 (8F10.0)

 AMXPRT(J)
 途中の最大値を出力する時刻

### 5.9.10 計算時間の読み込み

この節の入力はNTCSL>0の時のみ必要である。

### 5.9.11 外力の読み込み

CSLLD (CSLFMT) 節点荷重

## 5.9.12 変動水圧の読み込み

CSLLD (CSLFMT) 水圧

#### 5.10 固有値解析

解析法「EIGEN」が選択されたとき、この節の入力に従う。

固有値解析を行い,固有周期,固有振動数,固有ベクトルなどを出力すると共に,指示に応じ て動的解析に用いるモード比例減衰(またはひずみエネルギー比例減衰)を計算する。固有値, 固有ベクトルは全てのモードに対して計算され,固有値は全てのモードについて印刷されるが, 固有ベクトルは指示された次数までを印刷するのみである。固有ベクトルの印刷時には刺激係数, 有効剛性なども同じに印刷される。なお,固有ベクトルの印刷は8つのモードが一度に印刷される ので,8の整数倍にすることが勧められる。

固有値解析のためには、剛性マトリックスは対称である必要がある。しかし、構成則によって は剛性マトリックスが非対称となることもある。この場合、プログラムは対称位置の二つの成分 の平均値をそれぞれに用いることで対称化を図る。

#### 5.10.1 基本条件

NSTIF, NMODE, NDMP, NDRAIN, NFOUT, FOUT (515, 5X, A20)				
$1\sim$ 5 NSTIF	 固有値計算に用いる剛性の種類			
	=1:現在の拘束圧に対応した初期剛性を用いる。			
	=2:現在の状態の接線剛性を用いる。			
$6\sim 10$ NMODE	固有ベクトルを印刷するモード数			
$11 \sim 15$ NDMP	減衰マトリックスの計算方法。計算した減衰マトリックスは、次の動的			
	解析で指示により用いることが出来る。			
	=0:減衰マトリックスは計算しない。			
	=1:モード比例減衰により減衰マトリックスを計算する。			
	=2:ひずみエネルギー比例減衰により減衰マトリックスを計算する。			
$16\sim 20$ NDRAIN	排水条件の指示			
	=0:排水条件。水との連成を考えずに計算する。			
	=1:非排水条件。水との連成を考慮して計算する。			
$21\sim 25$ NFOUT	固有ベクトルをファイル出力するモード数。			
$31\sim50$ Fout	固有ベクトルを出力するファイル名。			

#### 5.10.2 モード減衰

NDMP=1の時のみ必要である。

NCRD (I5)

- 1~ 5 NCRD 同じモード減衰のブロックの数。
- IM, JM, DAMP (215, F10.0) NCRD 枚のカード
  - 1~ 5 IM 始めのモード次数
  - 6~10 JM 終わりのモード次数。JM ウ IM のこと。JM < IM のとき, JM = IM にセット される。
  - 11~ 20 DAMP モード減衰。
- (注)固有モードの数は、動的自由度(自由度のうち節点質量が0でない自由度)の数だけ計算される。ユーザーがその自由度数を知らない場合には、大きめの数字を入れておくとよい。プログラムは動的自由度より大きい成分については無視する。なお、減衰マトリックスの計算時に高次のモードの影響は小さいとして無視することはよくない。継続時間が長い場合には高次のモードの共振により応答が異常に大きくなることがある。

## 5.11 固定端反力の解放

解析法「FREESUP」が選択されたとき、この節の入力に従う。 固定端を自由端とし、それまで固定端に反力として作用していた荷重を作用させ、自由端に作 用する外力を0とする。

## 5.11.1 解析方法の設定

NONSOL, NSTEP, NSTE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN, NDFRE (815)			
1~ 5 NON	SOL 非線形解析の	)方法	
	=1:接線剛性	E法	
	=2:初期応え	」法	
	=3:修正初期	l応力法 <sup>[6.18]</sup>	
	=4:修正 Ne	wton-Raphson 法	
$6\sim 10$ NSTE	EP 新しく加えら	れた要素の自重を荷重として加える場合に、荷重を NSTEP	
	に分割し、台	╰計 NSTEP の計算で値を求める。	
$11 \sim 15$ NSTE	El <sup>[6.14]</sup> 初期変位の与	-え方に関するフラグ	
	=0:変位は(	から出発	
	=1:前の解析	Fの継続の値を使う。	
$16\sim 20$ NSTE	E2 <sup>[6.14]</sup> 解析終了後に	系の変位として何を残すかに関するフラグ	
	=0:何も残さ	ない。すなわち、変位は捨てられる。	
	=1:変位はど	このステップに持ち越す。	
$21\sim 25$ ITER	MX NONLIN=2	以上, すなわち, イタレーションによる収束計算をする解析	
	手法を選んた	「時のみ意味がある。ITERMX はイタレーションの最大回数	
	である。この	)回数を計算を行っても収束しないときはエラーメッセージ	
	を印刷し,フ	ぶ釣合力を次回の持ち越して計算を続ける。収束しなかった	
	時計算を終う	·したければ,値を負にする(絶対値は最大繰り返し回数)。	
$26\sim 30$ NPR	[ 各增分解析#	Fの変位の印刷に関する指示。この指示にかかわらず最終状	
	態は印刷され	<i>、</i> る。	
	=0:印刷なし	× 0	
	>0 : NPRT 7	テップごとに印刷する。	
$31\sim 35$ NDR	AIN 排水条件		
	=0:排水		
	=1:非排水乡	2件	
$36\sim 40$ NDF	RE 固定端反力を	·解放する自由度数。一節点一方向を一つと数える。	

## 5.11.2 自由度情報

固定端反力を解放する自由度の節点番号と方向を NDFRE 個指定する。一つの自由度に一枚の カードが必要である。

IND, IDIR (215)

$1\sim$ 5 IND	節点番号
$6\sim 10$ IDIR	固定端反力を解放する方向。
	=1:x方向,=2:y方向,=3:回転

#### 5.12 タイトルの変更

解析法「TITLE」が選択されたとき、この節の入力に従う。

タイトルは、各種の情報が印刷される際、その最初に印刷される。したがって、一連の解析の 間は同じタイトルを使うのが、通常は適当である。しかし、幾つかの解析を連続して行うときな ど、場合によっては解析後とにタイトルを変更したいときもある。このような場合にこのオプシ ョンを用いる。このオプションが用いられた以降の印刷時にはここで入力したタイトルが用いら れる。

#### TITLE (A80)

1~ 80 TITLE 新しいタイトル。

#### 5.13 現在の状態の印刷

解析法「PRTSTATE」が選択されたとき、この節の入力に従う。 現在の系の状態として、

節点:固定度,座標値,付加質量

要素:材料番号,活性度,飽和度,要素節点,水の境界条件 を印刷する。入力カードは不用である。

#### 5.14 現在の状況の出力

解析法「OUTPUT」が選択されたとき、この節の入力に従う。 現在の応答値を出力する。

FILEOUT (A20)

1~20 FILEOUT 出力ファイル名

### 5.15 現在の状況の入力

解析法「INPUT」が選択されたとき、この節の入力に従う。

現在の応答値を入力する。このオプションは、独立して用いることは出来ない。このオプショ ンを用いるための条件は、2章の入力のうち解析法に対する入力を除いた部分と3章の入力が終わ り、次に解析法の入力をする部分までは、前に入力したデータをそのまま入力する必要がある。 その後、このオプションを用いると、系の状態は前回計算を終了した時の状態になる。ただし、 固有値解析を行った結果は失われているので、再び固有値解析を行わない限りモード比例減衰や ひずみエネルギー比例減衰を使うことはできない。

FILEOUT (A20)

1~20 FILEOUT 出力ファイル名

## 5.16 収束判定值

解析法「CONVERGE」が選択されたとき、この節の入力に従う。

収束計算に用いる判定値を変更する。この項の入力では、変更したい所のみ数値を入力する。 ブランクや0が入力された項は以前の値をそのまま用いる。

ERR001, ERR002, IUNBCE (F10.0, I5)

$1 \sim 10$ ERR001	誤差に間する判定値。なお,初期値としては 10 <sup>-3</sup> が用いられている。
	$\ f\  \leq ERR001 \cdot \ f_0\ $ で判定する。ここで, $f$ は誤差, $f_0$ は外力。
$11\sim 20$ ERR002	誤差に間する判定値。なお、初期値としては 10 <sup>-3</sup> が用いられている。
	$\ \Delta f\  \leq ERR002 \cdot \ f_0\ $ で判定する。ここで、 $\Delta f$ はイタレーションにおける前
	回の誤差と今回の誤差の差, f <sub>0</sub> は外力。
$21\sim 25$ IUNBCE	増分計算の各ステップにおいて、次のステップに持ち越す不釣合力に関
	するフラグ。通常は 1 であるが,不釣合力が計算上の不都合を引き起こ
	していると考えられるときのみ2とする。初期値は1に設定されている。
	=1:不釣合力を次のステップに持ち越す。
	=2:不釣合力は次のステップに持ち越さない。

## 5.17 パラメータの値の変更

解析法「PARAM」が選択されたとき、この節の入力に従う。

構成則で用いられているパラメータの値は、材料の特性なので本来は一定値であるべきである が、例えば透水係数など、場合によっては変更したいものもある。もちろん全てのパラメータの 値が変えられるわけではない。変更出来るパラメータは用いる要素特性により決っている。

#### NMAT, NITP, JOB, (PARAM(J), J=1,5) (315, 5X, 5F10.3)

1~ 5 NMAT 要素タイプ番号。

6~10 NITP 構成則番号。ここで、構成則番号が正であれば、その構成則サブルーチンに共通のパラメータを変更するので、構成則サブルーチンは一度だけ呼ばれるだけである。これに対し、構成則番号を負の値とすれば、各要素について設定されるので、構成則サブルーチンは関連するすべての要素について呼ばれる。

11~15 JOB 作業の種類

PARAM(1)~PARAM(5) 0以外の入力がされたものが変更される。

NMAT	NIPT	JOB	PARAM
4	4	1	<ul> <li>最小値を変更する。</li> <li>(1):完全塑性時の接線剛性の剛性の初期剛性に対する比 初期値10<sup>-10</sup>。</li> <li>(2):最小拘束圧の大気圧に対する比の逆数を入力する。 Pa/500であれば,500を入力する。初期値500</li> <li>(3):修正初期応力法に用いる係数。初期値は2.0。</li> </ul>
4	2	1	<ul> <li>最小値を変更する(従って NIPT は2とする)</li> <li>(1):完全塑性時の接線剛性の剛性の初期剛性に対する比 初期値10<sup>-10</sup>。</li> <li>(2):最小拘束圧の大気圧に対する比の逆数を入力する。 Pa/500であれば,500を入力する。初期値500</li> <li>(3):修正初期応力法に用いる係数。初期値は2.0。</li> <li>繰返しに伴う劣化を表す拘束圧を変更する。(従って,NIPT は-2とする)</li> <li>(1):=0.0 拘束圧を初期値に戻す。=1.0 現在の拘束圧を使う。</li> </ul>

## 5.18 不釣合力のクリアー

解析法「CLEARBS」が選択されたとき、この節の入力に従う。

STADAS では各種解析が終わっても、不釣合力は次回の解析に自動的に持ち越される。不釣合 力があまりに大きいと、次回の解析時の最初の計算ステップの応答が異常になる可能性がある。 本来は前回の解析時に不釣合力が十分に小さくなる処置をしておくべきであるが、そのような処 置が出来ないときにこのオプションを用いる。このオプションでは入力データは必要ない。

## 5.19 デバッグ

解析法「DEBUG」が選択されたとき、この節の入力に従う。 このコマンドはプログラマー専用であるので、通常は用いない。

KDBG1, KDBG2, KDBG3, KDBG4, KDBG5 (515)

$1\sim 5$	KDBG1	=0:何もしない
		=2:動的解析で不釣合力を次に持ち越さない。
$6\sim 10$	KDBG2	=0:何もしない
$11 \sim 15$	KDBG3	=0:何もしない
$16\sim 20$	KDBG4	=0:何もしない
		=2 : PRECOR の不釣合力を印刷
$21\sim 25$	KDBG5	=0:何もしない
		=2: PRECOR の計算課程(剛性マトリックス,右辺,解,速度,加速度,
		不釣合力,応力-ひずみ)を印刷

#### 6 入力データ準備のためのメモ

#### 6.1 連立方程式の解法

STADAS で用意している連立方程式の解法は、掃き出し法を原則としている。6.2節で示すよう に、連立方程式の係数行列は対称の場合と非対称の場合の二通りがある。また、連立方程式を掃 き出し法で解く場合に、ピボットの選択をする(Partial pivoiing)かしないかの選択がある。液状 化解析や圧密解析などで、係数行列の係数の間に大きな桁数の違いがあるときには、ピボットの 選択をする解法を選ぶのが好ましい。NSOL と6.2節で示す NCMAT の関係は表6.1.1の通りであり、 これ以外の組み合せを選んではいけない。

NSOL NCMAT	1(対称)	2 (非対称, pivoting)	3(非対称)
1 (対称)	0	×	0
2 (非対称)	×	0	0

表6.1.1 NSOL の値と NCMAT の値の関係

#### 6.2 係数マトリックスの作成方法

一般の有限要素法解析では、係数マトリックスは対称だが、STADAS では必ずしも対称になる とは限らない。次のような場合には、係数マトリックスは非対称となる。

- (1) 構成則が,接線剛性を出力するようなタイプであり,かつ,塑性ポテンシャルと降伏曲面が 一致しないとき。
- (2) ダッシュポットやばねで自由地盤と解析対象領域を繋いだとき。

(3) 液状化解析で、水頭に与える運動エネルギーの項を考慮したとき。

STADAS では対称,非対称の両方の場合に備えて,異なる係数マトリックスの作り方を用意している。普通の場合には対称マトリックスを選ぶが,上記の様な状況の場合には,係数マトリックスの作り方として,非対称を選ぶ必要がある。

STADAS では、固有値解析、モード比例減衰を使ったときを除き、係数行列としてはバンドマトリックスを用いることにし、容量の低減をはかっている。この場合、対称マトリックスは、対角項以外では半分のみを記憶すればよいので、記憶量の節約が可能となる。バンド幅を NB、未知数の数を N とすれば、必要な容量は次のようになる。

対称マトリックスN·NB

非対称マトリックス N·(2NB-1)

すなわち,非対称マトリックスの時には,対称マトリックスに比べ,約2倍の記憶領域が必要であり,連立方程式を解く際の計算量も多くなる。したがって,係数マトリックスが対称であれば対称マトリックス(NCMAT=1)を選んだ方が有利である。

係数マトリックスが対称なのに非対称マトリックスを選んだ方がよいこともある。有効応力解 析では、水に関する項と、土粒子に関する項では、係数マトリックスのオーダーが非常に異なり、 10桁以上違うことも珍しくない。また、非線形解析では、拘束圧が0に近づくと剛性は極端に小さ くなるので、初期剛性に比べてかなり小さくなることもある。すなわち、係数マトリックスのオ ーダーが非常に違う場合がある。前者に関しては、プログラムは特殊な処理をして係数マトリッ クスの値のオーダーを揃える機能も持っているが、それとて万能ではない。また、STADAS では 全て倍精度計算をしているので、計算誤差はかなり小さい。そうはいっても、係数マトリックス のオーダーが異なり、解の精度が落ちてくる事は起こりえる。そのような時にはピボッティング する (NCMAT=2) を選択した方がよいかもしれない。ただし、ピボッティングを行うと、列の入 れ替えを生じるので,対称マトリックスはつかえない。したがって,計算時間,記憶領域ともピ ボッティングしないときに比べて多くなる。ユーザーとしては一度両方のオプションを試して, その程度を把握しておくと良いであろう。

#### 6.3 要素の幅

2次元解析では,通常要素の奥行き方向には単位幅であると仮定して解析を行う。しかし,例え ば疑似三次元解析を行うときなど,要素の幅を変えたいときもある。そのような場合にのみこの フラグを用いる。

#### 6.4 全応力解析・有効応力解析

要素のうち一つでも2相系材料として扱いたいときには、有効応力解析を選び、それ以外の時に は全応力解析を選ぶ。もちろん有効応力解析を選んで、水の自由度のない解析を行うことも出来 るが、水の自由度のない要素を指定するには若干データの作成量が増えることになる。特に、4.4 節の水の自由度の指定のカードは、有効応力解析の時のみ必要であるので、データ作成時には注 意されたい。

なお、間隙水圧に関する自由度を持てる要素は、固体要素とジョイント要素のみである。

#### 6.5 砂時計モード変形

STADAS では、計算の能率を上げるため、また、非排水解析のようなポアソン比がほとんど0.5 の要素の剛性マトリックスを精度よく計算するため、次数低減積分(1点ガウス積分)により体積 積分を行っている。この積分法では、特に系全体の自由度が少ないとき、砂時計モードという変 形モードが現れる。これは、この積分法で作られた要素では、エネルギーを消費することなく、 図6.5.1のような変形が可能だからである。これを、系全体で見ると、図6.5.2のような変形モード となる。



図6.5.1 2次元固体要素における砂時計モード



図6.5.2 典型的な砂時計変形

この様な砂時計モード変形を避けるため、STADASでは、通常の剛性マトリックスに加え、砂 時計モード変形に抵抗する剛性を加えることが出来るようになっている。ただし、この剛性を考 えると、当然ながら計算量は増加する(それでも次数低減をしないで要素剛性マトリックスを作
るよりは計算時間は少なくない)。特に理由がない限り IHGS=1とするのが好ましい。

#### 6.6 解析対象モデルを読むときのファイル

節点座標と要素に関するデータ(4.1節と4.2節の入力データ)は、入力データのうちでかなりの 量を占め、これらのデータを他の制御データと同じ入力とすると、データの構成が分かりにくい 事がしばしばある。また、例えばパラメータを変えた解析を幾つか行いたいときなど、解析対象 モデルを別のファイルにしておくことが便利なこともある。

STADAS では、これらのデータを他のデータと同様に読み込むか、異なるデータとして読み込むかの指示が出来るようになっている。通常のデータと同じファイルから読み込むときにはファイル名をブランクにし、それ以外のときはモデルデータの入っているファイル名を指定する。

なお,別のファイル名を選んだときには,節点データの前に1行余計なデータが必要である。これは,モデルに関するメモ等を書いた行を入れておけるようにしているためであり,データを準備するときに忘れないように注意されたい。

#### 6.7 大気圧

大気圧の値は,解析そのものには関係がないように見える。入力として,大気圧の入力が必要 な理由は次の二つである。

 i) 計算の安定のために、応力や剛性の最小値などが設定されている構成則がある。ところが、値 そのものは単位系により異なるため、プログラムであらかじめ値を用意しておくことが出来ない。プログラムで用意するためには絶対的な基準が必要であり、大気圧はそのような基準とし て用いられる。

大気圧は水深10mの深さの点の圧力に相当する。ということは、例えば、応力の最小値を大 気圧の1/500にとったとすれば、水深2cmの位置の圧力に相当する。

ii) 地盤の解析では、実験式がよく使われる。例えば、豊浦標準砂の微小ひずみ時のせん断弾性係数 G<sub>max</sub>は、次のような式で表される。

$$G_{max} = 840 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} (\sigma'_m)^{0.5}$$

この式は、kgf/cm<sup>2</sup>の単位系でのみ有効である。ところで、この式を次のように変更する。

$$G_{max} = 840 P_a^{0.5} \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{\sigma'_m}{P_a}\right)^{0.5} = 853.8 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{\sigma'_m}{P_a}\right)^{0.5}$$

この式は、単位系に依存しない。STADAS で使用している実験式の幾つかはこの様な処理をされているので、大気圧の入力が必要となる。

#### 6.8 水に関する境界条件

水に関する境界条件は、基本的には次の二つである。

- ・基本境界:間隙水圧の値が指定されている境界。このマニュアルでは、排水境界と呼ぶ事もある。
- ・自然境界:境界を通る水量が指定されている境界。水量が0の場合を非排水境界,境界から水が 沸き出すような場合をわきだし境界,水が吸い込まれる場合を吸い込み境界と呼ぶ。

STADAS では、水に関する境界条件は、全て要素の辺で与えることになる。したがって、排水 境界(基本境界)であれば、辺の中央の間隙水圧の値を入力として与える。一方、わきだし境界 や吸い込み境界では、指定した辺を通って流入、流出する水量を指定することになる。この際、 わきだし境界は負、吸い込み境界は正の水量を指定する。

ジョイント要素の辺を水の境界として指定することは出来ない。

STADAS では、間隙水圧の扱いに関し、全間隙水圧(静水圧+過剰間隙水圧)が用いられる場合と、過剰間隙水圧が用いられる場合がある。第 II 編で示したように、基礎方程式上ではそれらの違いは物体力(STADAS では重力のみが物体力である)の項があるか無いかだけである。すなわち、物体力を考慮して解けば得られた水圧は全間隙水圧となり、考慮しなければ過剰間隙水圧となる。工学的に重要なのは過剰間隙水圧であることから、STADAS では原則として過剰間隙水 圧を求める手法を用いている。しかし、このことは静水圧を求める必要がないと言うことを意味しているわけではなく、静水圧を作業は必要である。

静水圧は、定常状態の水圧であるので、静水圧を求める作業は、解析の最初で水面の位置が決まったとき、水面の位置が変わるときなどに必要である。そのような可能性がある場合として、 STADASでは、次のケースを考えている。

1) CNSTRACT: 自重, 盛り立て解析

2) EXCAVATE: 掘削解析

3) WATTABLE: 地下水位の変動

すなわち、これらの解析が、行なわれると、STADAS ではその時までに指定されている境界条件 に、解析実行時に指定される境界条件を合わせた境界条件を新しい境界条件とみなして、浸透解 析を行ない、その値を静水圧とする。これらの解析が排水条件で行なわれた場合には、過剰間隙 水圧は発生しない。一方、非排水条件で行なわれた場合には、得られた水圧は全水圧であるので、 そこから静水圧を引いたものを過剰間隙水圧とする。なお、このことは STADAS で用いている静 水圧と過剰間隙水圧の定義にもなっていることに注意されたい。

全間隙水圧をベースにしているときと、過剰間隙水圧のみをベースにしているときには、当然、 水に関する境界条件が異なる可能性がある。非排水境界、湧きだし境界については解析の違いに より変わることはない。しかし、排水境界については、変化する。典型的な例を図6.10.1に示す。 図の A 点の静水圧は、 γwh であるので、最初に境界条件を設定する際にはこの値を入れる必要が ある。しかし、A 点の間隙水圧の値は水位が変わらないかぎり変化しないので、例えば地震応答 解析を行なう場合には水圧の値は0である。このような処理は通常はプログラムが行なっているの で、ユーザーは関与する必要がないわけであるが、例えば過剰間隙水圧を扱う解析で、解析中に 水に関する境界条件を変更する場合などについては、そこで入力する値は過剰間隙水圧に関する 値であることを認識しておく必要がある。



図6.10.1 水の境界に関する例題

## 6.9 単位体積重量

有効応力解析で,水の自由度を持つ可能性のある要素(要素タイプ=4,7,8)では,水と土の混合体の湿潤単位体積重量%は,次式で表される。

 $(6.9.1) \qquad \gamma'_t = (1-n)\gamma_s + n\gamma_w$ 

ここで, <sub>*K*, *Yw*はそれぞれ土粒子, 水の単位体積重量, *n*は間隙率である。プログラムが要求するのは常に*Y*,である。4.2項の要素データで, 要素を乾燥状態にあると設定できるが, それにはかかわらず, 単位体積重量の入力は上記の湿潤単位体積重量である。プログラムは, 要素の湿潤, 乾</sub>

燥の状態に応じて、適当な単位体積重量を解析に用いる。

コンクリートや鋼材のような不透水材料で,水に関する自由度を持たない要素については,間 隙率 *n*=0を入力する。この場合,水に関する自由度を持たせないために,要素特性番号を負にし て入力するなど,データ作成に注意が必要である。

要素を乾燥状態にし、かつ、単位体積重量として乾燥単位体積重量(1-*n*)% を入力したいときには、単位体積重量の値を負にして入力する。

全応力解析では,要素の水に関する自由度はない。したがって,湿潤状態の要素に関しては湿 潤単位体積重量を,乾燥状態の要素に関しては乾燥単位体積重量を入力する。

## 6.10 Rayleigh 減衰

Rayleigh 減衰は、減衰マトリックス[*C*]を式6.12.1のように、質量マトリックス[*M*]と剛性マトリックス[*K*]より作るものである。

 $(6.10.1) \quad [C] = \alpha [M] + \beta [K]$ 

ここで, [K]は地震開始時の剛性マトリックスであり, 地震中の剛性変化に対して変えることはしない。

Rayleigh 減衰は、モード減衰と式(6.10.2)の関係があることが知られている。

# (6.10.2) $h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$

ここで、 $h_i$ 、 $\omega_i$ はそれぞれ i 次のモードに関する減衰定数と円振動数である。式から、 $\alpha$ は、振動数の小さい場合によく働き、 $\beta$ は振動数の多い場合によく作用することが分かる。

- これまでは、系全体についての検討をした。その場合には Rayleigh 減衰の物理的な意味は式 6.12.2として説明できる。STADAS では、これ以外に、要素毎に式6.12.1を適用して減衰マトリッ クスを作成することも可能である。減衰が材料に固有の現象だとしたときには、むしろこの方が 物理的に意味があるという見解もある。しかし、この考えは、減衰マトリックスをどのように捕 らえるかで異なってくる。例えば次のような場合には系に対して減衰マトリックスを定義するほ うが自然である。
- 1) 非線形解析では履歴減衰は構成則で考慮される。したがって、この減衰は高次のモードの応答 を押さえ、数値計算の安定をよくするために用いられることが多い。
- 2)通常,系の動的応答は低次のモードの応答に支配される。したがって、線形解析で履歴減衰の かわりに Rayleigh 減衰を用いる場合には低次の減衰を合わせるほうが精度がよい。もちろん、 個々の要素の減衰として減衰マトリックスを合わせることが出来ればより精度がよくなるだろ うが、個々の要素の減衰と Rayleigh 減衰の関係は明かではない。これは Rayleigh 減衰では物理 量である減衰係数を求める必要があることにも起因している。通常は減衰比が与えられ、この 場合には系全体で扱うほうが自然である。

STADAS では、ダッシュポット要素を除き、要素特性の入力時に二つの定数の入力が要求される。このうち、最初の入力であるαが0または正の時は Rayleigh 減衰の入力であると判断される。 この時、αは、質量マトリックスに掛ける係数、βは剛性マトリックスに係数である。一方、αが 負の時はひずみエネルギー比例減衰と判断される。この時bの値は用いられない。

STADAS では、動的解析ではとりあえず Rayleigh 減衰を仮定して減衰マトリックスを作成しに 行き、 $\alpha$ の値が正であれば減衰マトリックスを作成する。一方、 $\alpha$ の値が負であれば Rayleigh 減衰 に基づく減衰マトリックスは作成しない。したがって、要素個別の減衰を用いず、系で減衰を定 義するときは、 $\alpha$ の値を負にしておくと計算時間を節約することが出来る( $\beta$ に対する計算も行わ ない)。

#### 6.11 曲線型応カーひずみ関係

曲線型-1では,双曲線モデル,Ramberg-Osgood モデル<sup>1)</sup>,Davidenkov モデルの3つの構成則が可能である。骨格曲線より,除荷,再載荷した,履歴曲線は,骨格曲線にMasing則を適用して作成する(6.14節参照)。

第 II 編3節で示したように, Masing 則は,実際の履歴挙動と完全に対応したものではない。また,骨格曲線も上の三つのモデルが万全という訳ではない。そこで,曲線型-2モデルでは,より柔軟性に富むモデルを用意している。

双曲線モデル, Ramberg-Osgood モデルは、曲線型-1モデルで用いたものと同じものであるが、 式の表現方法が異なっている。

拡張双曲線モデル, Hardin-Drnevich モデル, 吉田モデルでは, 履歴曲線は, 石原・吉田の考え<sup>2)</sup> に基づいて, 等価減衰比を基にして決められる。最初の二つでは, 減衰定数比 h は, 次の式で求められる。

$$h = h_{max} \left( 1 - \frac{K_{sec}}{K} \right)$$

この式は Hardin-Drnevich が提案した式と同じである。一方,吉田モデルではひずみの関数として 表形式で等価減衰定数比を入力する。

骨格曲線では、Hardin-Drnevich モデルでは、彼らの提案した双曲線モデルを用いている。した がって、ここで使われている方法は、日本で双曲線モデルを呼ぶのに使っている(改良、履歴) Hardin-Drnevich モデルと異なり、彼らの提案に完全に一致するものである。

修正 Dancan-Chang 方式では、Dancan-Chang の提案に基づき、骨格曲線で計算に用いる終局強度を実際の終局強度より大きくすることにより、モデルの一致度をよりあわせることができるように双曲線モデルを修正したものである。

吉田モデル<sup>3)</sup>では,任意の骨格曲線が用いられるように,表形式で骨格曲線の形状を入力するものである。

#### 6.12 Masing 則

Masing 則は, 骨格曲線から履歴曲線を決める決め方を表す法則で, ここでは, 次の二つの法則 をいう。

i) 骨格曲線を式(6.12.1)で表したとする。

 $(6.12.1) \quad \tau = f(\gamma)$ 

すると、点(*Y<sub>R</sub>*, *r<sub>R</sub>*)より除荷したときの履歴曲線は式(6.12.2)で表される。

(6.12.2) 
$$\frac{\tau - \tau_{\scriptscriptstyle R}}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_{\scriptscriptstyle R}}{2}\right)$$

ii)履歴曲線が、以前の除荷点を越えたときは、以前の骨格曲線や履歴曲線の上を動く。

このうち,2番目の条件を満たすためには,過去の除荷点の値を順次記憶していく必要がある。 コンピュータの記憶領域の制約上,無制限な記憶領域を設定することは出来ないので,NREV で その値を与えるわけである。

NREVの値は、通常の地震応答解析であれば、20~30で充分である。記憶すべき除荷点の数は、 新しい除荷点のひずみが前の除荷点のひずみより小さいときに増加する。したがって、例えば、 自由振動をさせて系の振動が次第に減衰していく時には、記憶すべき除荷点の数は1サイクルの載 荷につき2づつ増えるため、その数が膨大になる可能性がある。しかし、そのような場合には、前 回の除荷点を記憶しなくても履歴曲線を作ることは出来る。このような配慮と、指定した NREV の値が充分ではなかった時の対策から、STADAS では、記憶すべき NREV の数が NREV を越えた ときは、上の第2法則を無視して計算を実行するようになっている。再び大きなひずみの入力がく るときに備えて、以前の大きな除荷点は記憶しており、それを生かすようなコーディングが行な われているので、ユーザーはあまりこの値の決定に神経質になる必要はないと考えられる。

#### 6.13 折れ線型応カーひずみ関係

ここでは、骨格曲線が bi-linear や tri-linear で表される折れ線型の応力-ひずみ関係を扱う。デ ータで与えるのは、図6.13.1に摸式的に示した図を参照するとして、初期剛性 G<sub>max</sub> (データの入力 の際には単にばね定数と示されることもある)、第2折れ線の剛性の初期剛性に対する比 G2、第3 折れ線の剛性の初期剛性に対する比 G3、および、第1折れ点、第2折れ点の荷重 T1、T2である。

0<G2<1, 0<G3<G2, T2>T1>0の条件が必要である。なお, Bi-linear 型の骨格曲線を使う場合に は, G3, T2の値は何でもよい。

合計で11種類の力-変位関係が定義できる。それらは3.4項に示されている。。



図6.13.1 骨格曲線の摸式図とデータとの関係

# 6.14 変位の出力

各解析の基本データにNSTE1, NSTE2がある。ここでは、このフラグの使い方を示す。STADAS では、各種の解析を順を追って解析できるようなプログラム構成をしている。この場合、要素の 応力状態は、各解析による結果の重ね合わせで決るが、変位、速度、加速度などは相対的なもの であるので、どの状態を基準とするかで出力が異なる。

例えば、自重解析で地盤の初期状態をもとめ、そこに構造物が建てられたときの状態を静的解 析でもとめ、その際に生じた過剰間隙水圧の消散を圧密解析で求め、その後地震応答解析をした とする。この一連の4つの解析で、それぞれ変位の変化がある。今、圧密解析をしたときの変位の 出力として欲しいのは、その前に行った自重解析と静的解析とここで行った圧密解析の和であろ うか? 通常は、圧密解析のみによるものであろう。このような時には、圧密解析では、NSTE1=0 を入力する。プログラムは圧密解析の出力では圧密解析による変位のみを出力する。次に、ここ で求めた圧密解析の変位をそれ以後の解析で使うことがあるだろうか? ないときにはNSTE2=0 を入力する。プログラムは圧密解析で得られた変位を忘れてしまう。

この例で分かるように、NSTE1は各解析の際に出力する変位、速度、加速度などを、その解析 で生じたものだけを出力するのか、過去からの蓄積量とその解析で生じたものの和として出力す るのかをしていするフラグである。また、NSTE2は、その解析で得られた変位を、過去の蓄積量 に加えるか否かを指定するフラグである。

#### 6.15 初期状態の設定

STADAS では、要素の初期状態を設定するのは、要素の付加(ADDELM)および自重・盛り立 て解析(CONSTRUCT)の2箇所である。初期状態の設定方法は、プログラムが自動的に設定する フラグと、ユーザーが初期値を入力する場合の二つが選択できる。 プログラムが自動的に設定する場合には、原則として、ひずみ(変位)と応力(力、モーメント)を0に設定する。この場合、弾性定数などが拘束圧に依存する構成則を使うときには注意が必要である。というのは、応力を0に設定すると、弾性定数も0となる場合には、以後どのような解析をしても応力は0のままであるからである。これは、そのような構成則では、通常与えられたひずみ増分に接線剛性を掛けることによって応力増分を求めているので、一旦剛性が0になると応力増分がひずみ増分の値に関わらず0となるからである。このような事情を考え、自重・盛り立て解析時には小さい値を与えることにしている(以下の説明参照)。これに対して要素の付加時には0を与えているので、特に注意が必要である。

初期状態として設定すべきものには、ひずみ(変位)と応力(力,モーメント)がある。しか し、すべての構成則でその両方が自由に与えられるわけではない。そこで、STADASでは、初期 状態をユーザーが指定する場合には、初期設定はどちらか一方だけを入力として与えることにし ている。この場合、解析結果は次のように解釈する必要がある。

①ひずみ(変位)を与える場合

応カーひずみ関係が全ひずみ型で与えられているときには、初期状態としてひずみを入力する。 ばね要素がその代表的なものである。プログラムは、与えられたひずみに対応する応力を求め、 その応力を初期応力とする。

②応力を与える場合

応力-ひずみ関係が接線剛性で与えられている場合には、初期状態として応力を入力する。この場合には、ひずみの値は0と設定される。

自重・盛立解析は、各要素の持っている自重を外力として作用させる解析なので、本来初期応 力は0である。しかし、材料特性が有効拘束圧に依存するような材料では、初期応力を0から出発 させると、数値計算上のトラブルを生じる可能性がある。それは、STADAS では増分解析を行っ ているために、最初に応力を0から出発させると、初期の剛性が0となり、いくら外力増分を小さ くしても変形が無限大になってしまうからである。このような場合の数値計算上のテクニックと して最小の剛性を決めておくという方法もあるが、STADAS が液状化解析も行うことを考慮する と、最小の剛性を各構成則のサブルーチンで用意するというのも問題がある。そこで、STADAS では標準的な方法として、小さい応力を初期値として与えることによってその問題を解決するこ とにした(MISTRS=0)。ただし、あまりに初期応力が小さいと、構成則サブルーチンによっては 問題が生じる場合もあるので、ここでは、その要素の自重の1/20を初期応力としている。この場 合、解析を行う場合の外力として自重分全てを加えると、結果として得られる応力は自重による ものと最初に仮定した荷重の和になるので不都合である。そこで,解析に用いる外力としては, 自重による外力から仮定した初期応力に相当する分を引いた値とする。このようにすれば、応力 状態は自重を加えたものとほとんど同じになる。ただし、この処理によって変位が0の出発点が小 さい応力がある状態になるので、変位の出力量は応力を0から出発したものと比べるとやや小さめ の値となる。

初期応力が0から出発しても問題のない構成則を用いている場合には、このような処理は必要がないので、MISTRS=1とする。また、初期に与える応力を MISTRS=0の時のようにプログラムが自動的に決めるのではなく、ユーザーが定義したい場合には、MISTRS=2とする。

MISTRS=0のオプションで変位が少し小さめに出力されるのが気に入らないのであれば,自重に よる外力から初期応力に相当する力を引いて外力として加えるのではなく,自重による外力その ものを加えることも考えられる。MISTRS=3でこのような操作が可能となり,応力が0のときの剛 性を少し考慮したことに相当する。ただし,得られた応力は初期に仮定したものと自重による応 力の和となるので,少し大きめの値となる。

#### 6.16 要素の飽和, 不飽和

STADAS では、有効応力に基づいた解析をしているので、節点移動、回転に関する自由度のみ

ならず,間隙水に関する自由度も可能である。第 II 編の理論で示したように,STADAS では間隙水として要素内では一定値という仮定を設けているので,水の自由度は要素単位で指定される。

STADAS では、不飽和現象は考慮していないので、要素は乾燥状態か、完全飽和状態のいずれかの状態しか取り得ない。また、要素タイプによって間隙水に関する自由度を持つことの出来る要素と持つことが出来ない要素とがある。念のため示すと、次のようである。

1	2	3	4	5	6	7	8
ばね	ダッシュポット	はり	4節点固体	ジョイント	8節点固体	SH	ロッキング
不可	不可	不可	П	П	न	不可	不可

間隙水に関する自由度を持てる要素

ここで可となっている要素については、有効応力解析ではユーザーが指定しなければ自動的に 間隙水に対する自由度を持っている、すなわち飽和していると考えられる。乾燥状態にあること を設定するには、幾つかの方法がある。

- 1) 4.2節の要素データ入力時に、材料特性番号 MAT の値を負にする。この場合、絶対値は材料特 性番号を表し、負の符号が乾燥状態であることを意味している。なお、この場合でも入力する 単位体積重量は湿潤単位体積重量であるので注意されたい。
- 2) 3章の要素特性の入力時に、単位体積重量を負の値として入力する。この場合、この要素は永 人に飽和状態にならないことを意味する。また、入力するのは乾燥単位体積重量に負の符号を つけたものである。(6.9節参照)
- 3) 4章の各種解析の際,『WATER』を選び,飽和度の変更をする。この場合,一度でも飽和する 可能性のある要素は,最初に間隙水の自由度を持っているとして入力しておく必要がある。
- なお, 飽和している要素については, 必ず透水係数を入力する必要がある。ユーザーの気のつか ないところで使われている可能性がある。

# 6.17 自由地盤との連結

例えば、解析範囲と自由地盤を粘性境界を用いるためにダッシュポットを用いて結合するときの状況を模式図で書くと、図6.17.1のようになる。Pensien モデルを用いた解析でも同様なモデルが現れる(この場合には、ダッシュポットの代りにばねが用いられる)。STADAS では、このような系を一度に解くことができるようになっている。このようなモデル化をする場合、自由地盤の動きはバネやダッシュポットを介して自由地盤に影響を与えるが、解析範囲の挙動が自由地盤の挙動に影響を与えることは都合が悪い。通常のプログラムでは、自由地盤の部分に、解析範囲に比べ極端に大きい範囲をモデル化し、近似的に影響が及ばないようにしている。しかし、STADAS では、入力に際の IFRFLD という変数を指定することで、剛性マトリックス作成時にその影響を完全に無視することができる(II 編1.6.3項)。指定の方法は、4.2節で要素節点を指定したとき、最初に定義した節点が自由地盤側の節点である場合には IFRFLD=2と代入する。当然、IFRFLD=0であればどちらの節点も自由地盤上の節点ではない事になる。

ここでは、変数 IFRFLD の使い方について、最も標準的な場合のみを示したが、この他にも、 ばね要素やダッシュポットで、ある点の動きは他の点に影響を与えたいが、その反対の影響を受 けたくないというときにはこのオプションを使うことができる。



図6.17.1 自由地盤のモデル化の例

# 6.18 初期剛性法に用いる剛性

初期剛性法(Stress transfer method)による解法では、一連の計算シークエンスの計算では、最初に作った剛性をそのまま保持して計算を行う。一般には計算が進むにしたがって非線形挙動が現れるため、実際の接線剛性はこれより小さくなるので、この方法では目的とする解に次第に近付いて行くような形でイタレーションが行われる。しかし、材料特性が有効拘束圧に依存する、地盤材料ではこのことは常に正しいとは限らない。例えば代表的な要素試験である、三軸試験や 圧縮試験、また、圧密載荷などでは加力と共に拘束圧が大きくなるので、計算の最初に設定した初期剛性が一番大きいというわけではなくなる。特に、自重解析のように計算の最初の段階では有効拘束圧がほとんど0に近い場合には、計算の最初に設定した初期剛性は実際の接線剛性よりかなり小さいことも起こり得る。このような場合には、イタレーションの際のひずみ増分が解となるべき増分より大きくなる。この差があまり大きいと、イタレーションで収斂しないことも考えられる。また、砂質土のようにダイレタンシー挙動がある場合にも、初期剛性を用いたのでは収斂しないことが起こる。このような場合に各増分計算時にその時の有効拘束圧に応じた初期剛性やそれよりやや大きめの剛性を使う事により収斂を良くすることができる。

#### 6.19 非線形解析の方法

STADAS では、非線形解析の方法として、原則的に次の4つの方法を用意している。それぞれの 手法には特徴があり、状況に応じて適当な手法を選ぶ必要がある。また、構成則の手法によって は全ての手法が使えない事があるので注意が必要である。

# (1) 接線剛性法

増分計算前の接線剛性を用いて,一回の計算を行う方法である。計算時間はかなり早い。その 増分計算で生じた誤差(不釣合力)は次の増分計算の際に持ち越されるので,全体として誤差が 大きくなる事はない。

ところで、多自由度問題については、イタレーションを行わない限り真の接線剛性を求めるこ とは不可能である。例え1自由度問題でも、載荷、除荷により接線剛性は異なるし、拘束圧が変化 するので、真の接線剛性を求めるのは困難である。したがって、接線剛性といっても、実際には 真の接線剛性ではなく、それに近い値というのが真実のところである。もちろん、不釣合力を次 回の増分計算に持ち越すので、全体としての誤差は大きくはならないが、各増分計算では誤差が あることは可能性がある。

多くの構成則で用いられている接線剛性の求め方は次のようなものである。

1) せん断応力がせん断ひずみと拘束圧の関数として次式で表されるとする。

$$\tau = \tau(\gamma, p)$$

したがって、その増分は次のようになる。

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \tau}{\partial p} dp$$

このうち,拘束圧依存の部分については,応力増分が分からないと計算出来ないので,最初の項 の係数を接線剛性とする。 2)前回の増分計算時には接線剛性は分かっている。それを用いる。

## (2) 初期剛性法(Stress transfer method)

ー連の計算の最初の段階で剛性を一度だけ計算し、それを用いてイタレーションにより解を求める方法である。比較的汎用的に使える。しかしながら、6.18節で述べたような状況が起こる場合には収束しない場合もある。

接線剛性が0に近いときにもこの手法では解を求めることが出来ないことがある。それは接線剛 性と初期剛性に差がありすぎ,所定のイタレーション回数では収束しないからである。このよう な事が生じる可能性があるときには他の手法を選ぶ必要がある。



## (3) 修正初期剛性法

前項で述べた,また,6.18節で述べたような理由で初期剛性法では収束が困難な場合で,構成 則が接線剛性を用意していない場合に用いる解法であり,各増分計算の最初のときにその拘束圧 に応じた初期剛性を計算する。構成則によっては初期剛性ではなく,それに変わる適当な値を出 力することもある。

## (4) 修正接線剛性法

接線剛性法では誤差が大きくなると考えられる場合に用いる解法で,各増分計算の最初に接線 剛性を計算し,それを用いてイタレーション計算をする。除荷が起きるときには載荷と仮定して 接線剛性を計算するので,初期剛性法や修正初期剛性法より収束が悪いことも生じる。

#### 6.20 ジョイント要素

ジョイント要素で、上下の辺の要素節点の変位を拘束する(同じにする:ジョイントが離れない)とこの辺での間隙水圧の値を求めることが出来る。ただし、ジョイント要素では、水圧の変動に伴う体積変化を考慮していないので、非排水条件を用いると対角項が0となるので、結果が正しくなくなったり、エラーでプログラムが終了する可能性がある。

# 6.21 ばね要素の剛性

ばね要素の剛性は、単位長さ当たりの剛性として入力する。ばねの一般化力を F は、次のよう に計算できる。

$$F = K\varepsilon = K\frac{\delta}{\ell}$$

ここで、*ε*はひずみ、*δ*は節点間の相対変位である。データとして入力するのは、上式の*K*である。 この様な入力は、同じばねを異なる長さで使う際に材料特性の定義が一つですむので便利であ る。例えばトラス部材は軸方向の自由度しか持たないので、ばね要素でモデル化できる。この際、 同じ断面のトラス材であれば一つの材料を定義するだけで材長が変わっても自動的に正しい剛性 を用いた計算が行われる。

しかし、同じばね定数を持つばねを異なる長さでつなぐときには不便である。例えば、杭と地 盤の相互作用解析で杭と自由地盤をつなぐばねのばね定数は杭の水平方向の位置に関わらず同じ であるが、FEM のモデル化を行うとモデル上のばねの長さは異なることになる。この場合にはば ね定数として実際のばね定数を用い、ばねの長さを単位の長さとおくと良い。ばねの長さの指定 は要素の情報を入力する際に行うことが出来る。

#### 6.22 ばね要素の有限変形フラグ

ばね要素のばねの作用方向は最初に指定した方向余弦方向のみである。しかし、例えば図に示 した方向の変形が起こったとすれば、初期の方向余弦の方向(水平方向)だけではなく、鉛直方 向にも作用するようにしたいという考えもある。また、軸直角方向の変位に対して生じている実 際の伸びを力として反映したいときもある。明らかにこの様な作用方向の変更は、有限変形理論 の範疇に属するが、その利用頻度が高いと考えられるので、ここでその効果を取り込んでいる。



#### 6.23 はり要素の断面力

要素に対する断面力の正の方向は,既に示したごとく,次のようになっている。ここで,中間 荷重の影響は考慮されていないので,せん断応力と軸力に関しては部材中で変化することはない ので,入力および出力はただ一つの量で表されている。これに対して,モーメントは部材内で線 形分布を仮定しているので,部材中で値が異なる。



両材端に正のモーメントが作用すると、図に示すように、逆モーメントが作用したことになり、 部材中で曲率が0になる所があるし、引っ張り縁も変化する。

一方,引っ張り縁が変化しない,等モーメントのケースでは両端のモーメントの符号が異なる ことになる。すなわち,図の座表系で下側が引っ張り縁になっているときには(左側の節点が1 節点,右側が2節点とすれば)1節点のモーメントは負の値,2節点のモーメントは正の値で入力す る必要がある。

さらに, STADAS では中間荷重は考えていないので,初期応力を与える際にはこの影響も考え た値を入力する必要がある。考慮する方法は簡単で,各はりを固定ばりにモデル化し,中間荷重 をかける。そして得られた固定端の断面力を初期応力状態として作用させればよいのである。例 えば,等分布荷重であれば,次のようになる。

# 6.24 実験式の適用について

吉田モデルでは、多くの実験式を用いることが出来る。多くの実験式では動的変形特性は拘束 圧の函数として与えられ、せん断弾性定数で無次元化されている。したがって、弾性定数を決め れば応力-ひずみ関係は自動的に決まる。理論編でも述べたように、もし実験式が液状化で対象 となる低拘束圧も含め定義されているのであればこれを用いた解析も可能であるが、実際にはそ のような領域での式は定義されていない。そこで、STADAS では初期応力状態での応力-ひずみ 関係を用い、別途粘着力と内部摩擦角から計算したせん断強度で無次元化することによって拘束 圧の影響を考慮している。

ここで注意が必要なのは、せん断弾性定数、せん断強度と実験式で与えられる  $G/G_{max}-\gamma$ 関係とは独立に指定できることである。例として有効拘束圧  $\sigma'_{m0} = 1 \text{ kgf/cm}^2$ ,  $G_{max}=1000 \text{ kgf/cm}^2$ を与えると、応力ーひずみ関係は例えば下図のようにかける。



一方,粘着力=0,内部摩擦角40度を仮定すると,せん断強度は二次元解析では0.643kgf/cm<sup>2</sup>となる。図から分かるように、このせん断応力と上図をみれば、ある実験式ではせん断強度を超える応力が発生しているし、ある実験式では最大のせん断応力でもせん断強度に至っていないことが分かる。全応力解析や、有効応力解析でもひずみが余り大きくならない範囲では、このような現象は特に問題とはならない。また、せん断強度を超えてもIFLGRの設定が適切であればせん断応力もきちんと評価できる。しかし、液状化解析では注意が必要である。また、要素試験のシミュレーションを行う際にも注意が必要である。例えばせん断強度以内のせん断応力振幅を与えても対応するせん断応力が存在しないこともあるわけである。

っまり、実験式を使って液状化解析を行う際には、適当な実験式と適当なせん断強度を独立に 与えて良いのではなく、両者には適当な関係が必要である。その関係がどのようなものかは現在 のデータからは判断できない。例えば、基準ひずみをもとにせん断強度を決めるようにすれば、 この矛盾はある程度は数値解析的には解消できるかも出来ない。そこで、上記のケースについて 基準ひずみとそれから求めた内部摩擦角を例示しておく。ただし、この関係は絶対的なものでは なく、あくまでこのケースについての事例であることに注意されたい。なお、粘土については内 部摩擦角は示していない。

実験式	$\gamma_r$ (%)	<b>ø</b> (度)	実験式	$\gamma_r$ (%)	<b>ø</b> (度)
港湾	0.034425	20.1	告示粘土	0.105855	
安田・山口	0.093530	69.3	告示砂	0.043220	25.6
土研沖積粘土	0.161545		JR 砕石	0.045850	27.3
土研洪積粘土	0.095640		JR 豊浦砂	0.050000	30.0
土研砂	0.050000	30.0	JR 稲毛砂	0.034716	20.3
			JR 岩手粘土	0.073487	

なお、ここでは実験式について示したが、表形式で与えるデータについても同じ事がいえる。

# 参考文献

- Jenning, P. C. (1964): Periodic Response of a General Yielding Structure, Proc. ASCE, Vol. 80, No. EM2, pp. 133-166
- Ishihara, K., Yoshida, N. and Tsujino, S. (1985): Modelling of stress-strain relations of soils in cyclic loading, Proc. 5th International Conference for Numerical Mothod in Geomechanics, Nagoya, Vol. 1, pp. 373-380
- 3) 吉田望, 辻野修一, 石原研而(1990): 地盤の1次元非線形解析に用いる土のせん断応カー せん断ひずみ関係のモデル化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(中国), pp. 1639-1640

#### 7 エラーメッセージ

STADAS では、データー入力などに対する間違いがあったとき、プログラムの制限を越えたときなどで、これ以上のプログラムの実行が出来なくなったときや、実行に意味がなくなると判断されるときには、エラーメッセージを印刷し、プログラムは自動的に終了する。エラーメッセージは、次のような形で印刷されます。

# \*\*\*\*\* ERROR \*\*\*\*\* CODE = \$\$\$

## 

\*\*\*\*\* Job is terminated by the program \*\*\*\*\*

ここで、\$\$\$はエラーコード番号、###はエラーの説明である。エラーの説明は印刷では簡潔に示 されている。もう少し詳しい情報が以下に示されている。

STADAS では、特に詳細なエラーチェックのためのルーチンを用意しているわけではない。また、データとしては誤っていてもプログラムの実行上は問題とならないエラーはいくらもある。 当然のことながら、それらはプログラムでは検出しない。

- (1) 用意された配列のサイズが不足です。プログラマーと相談してください(プログラムの配列「ZZ」のサイズを変更し, MXAREA を新しいサイズに置き換えて下さい。)
- (2) 全応力解析では、水に関する自由度はありません。したがって、水に関する境界条件を指 定することは出来ません。NBC0=0と入力して下さい。
- (3) ダッシュポット要素で、その特性を時刻歴で読み込むとき、全ての読み込むファイル名は 同じでなければいけませんが、異なるファイル名が入力されました。
- (4) 指定された材料番号で,要素タイプか構成則タイプのいずれかが誤りです。要素タイプは1 ~8の間です。また,構成則タイプ番号は要素タイプにより制限があります。
- (5) 節点番号の並び方が異常です。節点番号は1から NDPT まで順番に並んでいる必要があります。
- (6) 節点数より大きい節点番号が入力されています。
- (7) 要素番号の並び方が異常です。要素番号は1から NELM まで順番に並んでいる必要があり ます。
- (8) 要素数より大きい要素番号が入力されています。
- (9) 指定された要素の要素特性番号が要素特性の数より大きく入力されました。
- (10) 指定された要素節点の番号のうち一つ以上が、節点番号の最大値より大きい。
- (11) 要素を定義するのに使われた要素節点番号の数が,要素を規定するのに足りないか多すぎます。
- (12) 水に関する境界条件で、0でない境界値を持つ辺の数が、NBC0で指定された辺の数を越え ました。2.3節のNBC0にもっと大きい値を入れて下さい。
- (13) 水に関する境界条件で、境界の種類として正しくない番号が入力されました。
- (14) 水に関する境界条件を指定する際,要素番号として正しくない番号が入力されました。要素番号は1~NELMの間です。
- (15) 水に関する境界条件の入力の際,辺の番号として正しくない番号が指定されました。
- (16) 水に関する自由度を持っていない要素に、水に関する境界条件を入力しようとしました。
- (17) 固体要素で,要素の面積が0か負になりました。要素節点の並び方に異常があると考えられます。
- (18) 独立自由度として指定された自由度が従属自由度でした。
- (19) 独立自由度として自分自身が指定されました。

- (20) 使えない要素タイプが入力されたか、要素タイプで使えない構成則番号が入力されました。
- (注) このエラーは通常プログラムエラーである(CSTTUT)。
- (21) 指定された作業を行うのに、新たに記憶容量が必要となりましたが、残りがありません。(1)を参照して下さい。
- (22) 前の解析結果を持ってこようとしましたが、自由度が設定されていません。最初に自由度 を設定するときに、将来自由度を持つと考えられる節点は全て自由として設定して下さい。
- (23) 要素を活性化させる作業中, 誤った要素番号が入力されました。
- (24) 節点の境界条件を変更する際, 誤った節点番号が入力されました。
- (25) 従属自由度と指定された節点番号に誤りがあります。独立自由度として指定された節点番 号がないか,活性化されていません。
- (26) 水に関する境界条件を変更する際指定された要素は活性化されていません。
- (27) 水の境界条件を変更する際指定された要素は、水に関する自由度を持っていません。
- (28) 水の境界条件の変更の際,実際の要素の辺の数より多い辺番号が指定されました。
- (29) SH 波の解析では、動的解析のみが可能で、自重・盛立解析は出来ません。
- (30) 静的解析の変位による加力で、従属自由度点に強制変位が指定されました。
- (31) ばね要素、ダッシュポット要素、はり要素で、方向余弦を決める際または材長を計算する際に、二つの節点の座標値が同じなので、決める事が出来ませんでした。
- (32) 方向余弦の決め方を指定する番号が違います。0~7の数字で指定して下さい。
- (33) 入力される要素番号が正しくありません。通常,負の値や要素番号が要素数より大きいときに出力されます。
- (34) 入力された節点番号が正しくありません。通常,負の値や節点数より大きい番号が入力されたときに出力されます。
- (35) 制御用に入力された番号が正しくありません。マニュアルにしたがって下さい。
- (36) 水の境界値を変動させる指示がありましたが、指示された要素の指示された辺は水の境界 として0以外の値を取り得る境界として指定されていません。
- (37) 地震波の入力で、1行には1つ以上のデータが書かれている必要があります。
- (38) 材料特性を呼んでいる途中でファイルが終わりになりました。
- (39) 節点番号を呼んでいる途中でファイルが終わりになりました。
- (40) 要素番号を呼んでいる途中でファイルが終わりになりました。
- (41) 要素の幅を呼んでいる途中でファイルが終わりになりました。
- (42) 水の境界条件を呼んでいる途中でファイルが終わりになりました。
- (43) 材料番号は連続していなければいけませんが、連続していない値が入力されました。

#### 8 補助プログラム

STADAS を実行して得られた結果は作図する必要がある。このうち、時刻歴はベクトル上に並んでれば多くのソフトで読むことが出来る。この章ではこのために STADAS の書式なし時刻歴出 カファイルから必要なデータを取りだし、ベクトル上に並べて出力するプログラムを紹介する。 いずれのプログラムも対話形式のプログラムで、コンソールに向かいながら対話形式でデータを 取り出すことが出来る。

結果の作図にはこの他、メッシュ図や最大加速度、変位、応力等の出力がある。適当なプログラムがあれば STADAS の標準出力のデータを利用して作図することが出来る。STADAS に特化したプログラムとして POST2D や POSTEQ が作られているが、これらは別のプログラムであるので、ここでは述べない。

最初に示す PCUP はこのアドレスを指定することが出来る汎用的なソフトである。PCUP は汎用的であるので、本来これだけで必要なデータが足りてしまうが、一方ではアドレスを一々確認するという手間がかかる。これに対して、節点や要素の番号を指定し、必要なデータを取り出すことが出来るように特化したプログラムもある。これらを使うことによって、多くの必要なデータをより楽に取り出すことが出来る。

#### 8.1 PCUP

PCUP は、STADAS の実行の結果得られた書式なしの時刻歴結果を取り出すためのプログラム である。STADAS の標準的な出力にはどのようなデータがどこに格納されているかを示すアドレ スが印刷されているので、このアドレスを入力することによってデータを取り出すことが出来る。 PCUP を実行すると、次のような形式で対話が進行する。

#### STADAS の出力ファイル名 ブランク = TIME. out

STADAS で時刻歴出力を指定したファイル名を入力する。ブランクを入力すると、ファイル名が『TIME.out』に変えられる。

#### | 書式付き出力ファイル名 ブランク = TIMEHIST.out

書式付きでデータを取り出した結果を出力するためのファイル名。ブランクを入力すると、ファイル名が『TIMEHIST.out』に変えられる。

# いくつのデータを取り出しますか

#### 1行に書ける数字で,10以内を推奨。100以上は不可

取り出すデータの数を入力する。出力の際には、ここで入力したデータを1行で書くので、あまり多い数字は勧められない。10程度が無難。これ以上欲しいときは、何度か実行するのがよい。

データの出力フォーマットを選んで下さい'					
1 = [+#. ###E+##]	(有効数字4桁+スペースなし)				
2 = [ +#. ###E+##]	(有効数字4桁+スペース)				
3 = [ +0. ######E+##]	(有効数字8桁+スペース)				
4 = [ #####. #####]	(少数以下5桁,整数部5桁)				
5 = [ ######. ####]	(少数以下4桁,整数部6桁)				
6 = [ ########. ###]	(少数以下3桁,整数部7桁)				
7 = [ +#. ####E+##]	(有効数字5桁+スペース)				

各データをどのような形式で出力するかを指定する。上記の表示は、バージョンによって異なっているかもしれないが、たずねていることは同じである。上で、#が数字である。書式中にEが

入っているのは浮動小数点表示なので、有効数字が確保される。これに対して E の付いていない ものは固定小数点表示なので、結果がみやすいが、一方では、有効数字が確保されない可能性が あること、また、あまり大きい数字が入るとオーバーフローしてしまう可能性がある。一般的に は、1または2が勧められる。

#### |データの番号 各データはブランクかカンマで区切る

データの番号で、二つ上の入力で指示したデータの数だけ数字を入力する。この数字は、 STADAS を実行した際、番地とデータの対応表が印刷されているが、その番地に相当する。

この後,入力した番号のエコーが印刷される。これにより,入力時の桁の間違いなどをチェッ クできる。その後,データが指定したファイルに出力され,最後に,

# PCUP が終了しました。データ数 = #### が画面に現れ,プログラムが終了する。ここで,####は読み込んだデータの数である。

## 8.2 PC-Node

PC-Node は節点の応答を取り出すプログラムである。

STADAS の印刷ファイル ブランク=out.out

STADAS のアドレスを取り出すために、標準出力ファイルが必要で、その名称を指定する。出 力ファイルの中にある

Table of address for time history output in FILE =

という行を探して、アドレスを読み込む。したがって、これを含むアドレス部分のみに切り出し ても構わない。また、一連の解析を行った場合でアドレスが幾つか書かれている場合には一番最 初のアドレスを読み込むので、二つ目以降のアドレスを読み込ませるのであれば、上記の行を含 むアドレス部分を切り出しておいてそのファイルを入力する。

# 時刻歴ファイル名:####

上記のフィアル名を変更するときは新しいファイル名を そうでなければブランクを入力

書式なし時刻歴ファイル名である。####は上記の STADAS の標準出力ファイルに印刷されたファイル名で,計算時に出力されているファイル名でもある。この名前を変更したときのみ新しいファイル名を入力する。

書式付き出力ファイル名 ブランク = NODERESP.wave

出力のためのファイル名である。

いくつの節点を取り出しますか。

取り出す節点の数。10以内の数字が好ましい。これは、一行に書かれる文字数を余り多くしないための配慮である。10以上を入力すると、10個の節点を一つのブロックとして出力される。

節点番号 各データはブランクかカンマで区切る

上で入力した数だけのデータを入力する。データの間はブランク,カンマなどである。enterキーを押しても良い。

この入力後、節点番号のエコーが出力される。

取り出すデータの種類  $1=\alpha x, Vx, \delta x$   $2=\alpha y, Vy, \delta y$   $3=\alpha x, \alpha y, \delta x, \delta y$  $4=\alpha t, Vt, \delta t$ 

各節点で取り出すデータを指定する。  $\alpha$  は加速度、V は速度、 $\delta$  は変位を表す。また、x、y は x 方向と y 方向を表し、t は回転を表す。1~4のどれかの番号を指定することで、対応するデータ が取り出せる。

加速度,速度,変位の倍率'

出力時,単位変換を行いたいとき(例えば m 単位で計算し cm 単位で出力)に備えて,元のデ ータにかける定数を入力する。3つの数字を入力する。データの区切りはブランクまたはカンマで ある。もし0が入力されると1.0が用いられる。

これでデータ入力は終わりである。データの種類に応じて以下に示すようなヘッダが最初の行 に印刷されるので、データの識別は用意である。ここで#は節点番号である。

 $\label{eq:constraint} \begin{bmatrix} DisX_{\#} & DisT_{\#} & VelX_{\#} & VelY_{\#} & AccX_{\#} & AccY_{\#} & AccT_{\#} \end{bmatrix}$ 

## 8.3 PC-Elem

要素のデータを取り出すプログラムである。要素タイプごとに出力されるものが異なり,次の ようなものが出力される。

> ばね:力,変位 はり: $M_1$ ,  $M_2$ , Q, N,  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$ ,  $\delta$ ,  $\varepsilon$ 固体: $\sigma_m$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\gamma_{xy}$ , PWP,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ ,  $\sigma_e$ ,  $\varepsilon_e$ ,  $U/\sigma_{v0}$ ,  $1-\sigma_m/\sigma_{m0}$ ジョイント: H, V,  $\gamma$ ,  $\delta$ 回転ばね:モーメント,回転角 SH 波: せん断応力, せん断ひずみ

なお、固体要素では処理したデータが出力されているが、次の様になっている。

$$\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \quad \sigma_e = \sqrt{\left(\left(\sigma_x - \sigma_y\right)/2\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \varepsilon_e = \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

である。また、過剰間隙水圧比は二つの書式で出力されている。

STADAS の印刷ファイル ブランク=out.out

STADAS のアドレスを取り出すために、標準出力ファイルが必要で、その名称を指定する。出 カファイルの中にある

Table of address for time history output in FILE =

という行を探して、アドレスを読み込む。したがって、これを含むアドレス部分のみに切り出し ても構わない。また、一連の解析を行った場合でアドレスが幾つか書かれている場合には一番最 初のアドレスを読み込むので、二つ目以降のアドレスを読み込ませるのであれば、上記の行を含 むアドレス部分を切り出しておいてそのファイルを入力する。

時刻歴ファイル名:####

上記のフィアル名を変更するときは新しいファイル名を

そうでなければブランクを入力

書式なし時刻歴ファイル名である。####は上記の STADAS の標準出力ファイルに印刷されたファイル名で,計算時に出力されているファイル名でもある。この名前を変更したときのみ新しいファイル名を入力する。

書式付き出力ファイル名 ブランク = TIMEHIST.wave

いくつの要素を取り出しますか

要素番号 各データはブランクかカンマで区切る

固体要素の応力とひずみの倍率(単位変換用)
 (ひずみは実ひずみで出力されています)
 これに掛ける数字を入力してください
 応力とひずみにかける乗数。ひずみを%で出力したいときには100を入力する。
 これで入力は終わりである。出力は一つの要素ごとに行われる。最初の行には次のようなヘッ

ダがつけられる。

ばね:「Forc\_#」「Disp\_#」 はり:「M1\_#」「M2\_#」「QQ\_#」「NN\_#」「Kap1\_#」「Kap2\_#」「Delt\_#」「Eps\_#」 固体:「SigM\_#」「Tau\_#」「Gam\_#」「PWP\_#」「SigX\_#」「SigY\_#」「EpsX\_#」「EpsY\_#」 「SigE\_#」「EpsE\_#」「PWPR\_#」「SMR\_#」 ジョイント:「Fv#」「Fh#」「Delt\_#」「Gam\_#」 回転ばね:「Mom\_#」「Rot\_#」 SH 波:「Tau\_#」「Gam\_#」

#### 8.4 STADAStoPOSTEQ

このプログラムは、STADAS の標準出力ファイルから、一次元地震応答解析結果作図プログラム POSTEQ 用に一次元のデータを取り出す。POSTEQ が使えない環境では意味がない。

STADAS の出力ファイル名ブランク=out.outSTADAS の標準出力ファイル名

POSTEQ 用の出力ファイル名 ブランク=STADAS.max

POSTEQ 用の出力ファイル名

層数(半無限含まず)

回転自由度 なし=0, あり=1

解析時,一つでも回転の自由度のある節点があるときは1をそうでなければ0を入力する。

節点番号と要素番号を二つ地表から入力 要素番号が一つであれば、それを使う 二つであれば、その平均を使う 一行に3データずつ NLAY+1層入力

層の情報を入力する。一般の層では節点番号とその節点の下にある二つの要素の番号を入力する。すると、要素の応答値として二つの要素の平均値が出力として用いられる。もし一つの要素 で代表させるとすれば、二つ目の要素番号を0にする。

入力は、半無限層を含む層数分必要であるが、半無限層では当然ながら要素番号は不要である。

# 9 バージョンアップ

- 1.00 1993.5 動的解析(有効応力解析)
- 2.00 1994.5 各種解析
- 3.00 1999.5 マニュアルの更新
- 3.01 2000.2 武田モデルをバネとはりに組み込む。
- 3.10 2001.11 はり要素の非線形の機能拡張。ジョイント要素のばね化。その他
- 4.00 2001.12 吉田モデルの組み替え。要素の入力の全体的な構成変更。
- 4.01 2002.2 小さいバグの修正 (ZZ3030, ZZ1020, ZZZ004)
- 4.02 2002.5 ZZ3020とZZ3030でイタレーション時応答が倍になる現象

# 第 || 編 理論編

# 1 液状化解析の基礎方程式

この章では、プログラムの基本構成である、水と土の相互作用を考えた、Biotの式<sup>1)2)3)4)</sup>の FEM 解析への定式化を示す。Biot の式はこれまで多くの研究者により利用されてきた<sup>5)-11)</sup>。ここでは、これらを包括するような基礎式を示し、その後 STADAS で用いている FEM 解析の定式化を示す。

## 1.1 基本量と記号

## 1.1.1 応力とひずみ

3次元状態における(全)応力とひずみをマトリックス表示で次のように表わす。

(1.1.1) 
$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{\tau_{xy}} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^{^{1}} : (全)応力ベクトル$$

(1.1.2) 
$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{\tau_{xy}} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx} \right\}^1 : \mathcal{W} \neq \mathcal{H} \land \mathcal{I} \land \mathcal{I}$$

次に土骨格に作用する有効応力を次のように表わす。

(1.1.3)  $\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{m\}p$ 

ここで,

(1.1.4) 
$$\{\sigma'\}=\{\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^{\mathsf{I}}$$
: 有効応力ベクトル

 $(1.1.5) \qquad \left\{m\right\} = \left\{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right\}^{\mathrm{T}}$ 

ベクトル $\{m\}$ はテンソル表示で表した場合の Kronecker (クロネッカー)の $\delta$ に対応するベクトルである。また, pは間隙水圧 (porewater pressure) である。

ベクトル $\{m\}$ を用いれば、拘束圧 $\sigma_m$ 、有効拘束圧 $\sigma_m$ 、体積ひずみ $\varepsilon_v$ はそれぞれ次のように表せる。

(1.1.6) 
$$\sigma_{m} = \frac{1}{3} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\sigma\} = \frac{1}{3} \{\sigma\}^{\mathrm{T}} \{m\}$$
$$\sigma_{m}' = \frac{1}{3} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\sigma'\} = \frac{1}{3} \{\sigma'\}^{\mathrm{T}} \{m\}$$
$$\varepsilon_{v} = \{m\}^{\mathrm{T}} \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} \{m\}$$

図1.1.1に応力とひずみの正の向きを示す。土質力学の通常の方法として,応力は圧縮力の時正, ひずみは縮む時を正としている。また,ひずみは工学ひずみ(すなわち,せん断成分はテンソル ひずみの2倍)である。



図1.1.1 応力とひずみの正の向き

# 1.1.2 構成則

液状化解析では、土粒子、土骨格、水と三つの異なる挙動をする材料を扱う。それぞれに対す る構成則を次のように表す。 1) 土粒子

土粒子そのものの剛性は無限大, すなわち土粒子は変形しないものとする。したがって, 土の 変形はすべて土骨格の変形によるものだけである。

2) 土骨格

土骨格の構成則は, 増分形で次の形で表す。

 $(1.1.7) \qquad \left\{ d\sigma' \right\} = \left[ D \right] \left\{ d\varepsilon \right\}$ 

ここで,[D]は接線剛性マトリックスである。ダイレタンシーによる体積ひずみを分離して求める 構成則では,式(1.1.7)の代りに増分形で次の様に表される。

(1.1.8)  $\{d\sigma'\} = [D](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_d\})$ 

しかし、この式は最終的には式(1.1.7)の形にできる(章末注参照)。

3) 水

水はせん断変形に抵抗しない材料として扱う。また,粘性等の速度に依存する項は考慮しない。 したがって、構成則として必要なのは水の体積ひずみ*ε*<sub>wv</sub>と間隙水圧*p*の関係式である。この関係 は次式のように表される。

(1.1.9)  $p = K_w \varepsilon_{wv}$ ここで  $K_w$  は水の体積弾性係数である。

### 1.1.3 ひずみ変位関係式

ひずみを微小ひずみとすると,ひずみ-変位関係式は,マトリックス表示で次のように表される。

(1.1.10) {
$$\varepsilon$$
} = -[L]{ $u$ }  
ここで, [L]は微分オペレータで,  
(1.1.11) [L] = 
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

(1.1.12)  $\{u\} = \{u_x \ u_y \ u_z\}^{\mathsf{T}}$ :変位ベクトル

 $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ : x, y, z 方向への変位

なお、式(1.1.10)の右辺に負の符号がついているのは、縮むひずみを正としているからである。

#### 1.1.4 Darcy の法則と水の速度

Darcy (ダルシー)の法則は、3次元座標系では、一般化した形で次のように表される。 (1.1.13)  $\{\dot{w}\} = -k\{\nabla\}h$ 

ここで、{∇}は微分オペレータで、次式で表される。

(1.1.14)  $\{\nabla\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right\}^T$ 

{*w*}: 水の見かけの速さ(approach velocity または superficial velocity)

*k*: 透水係数(coefficient of permeability)

*h*: 全水頭(total head)

式(1.1.13)では*k*は等方, すなわちどの方向の流れに対しても透水係数の値は変わらないとしたが, 実際の土では堆積条件の違いなどを反映し, *k*の値が方向によって違うことも普通である。この場 合には,透水係数をテンソルと考え次のように表す。

(1.1.15)  $\{\dot{w}\} = -[k]\{\nabla\}h$ 

 $k_x$ ,  $k_y$ ,  $k_z$ をそれぞれ x, y, z 方向への透水係数とすると, [k]は次式となる。

$$(1.1.16) \quad \begin{bmatrix} k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

# 1.2 釣合式

液状化解析では、土粒子と水が別々に挙動するため、全ての挙動を別々に扱う必要がある。す なわち、二つの種類の釣合式が必要となる。ここでは、2相系材料全体の釣合式と水の釣合式の二 つを用いる。

## 1.2.1 全体の釣合式

土と水の混合体を一体のものとして考える。土と水の混合体全体の釣合式は結局,次のように なる。

(1.2.1)  $[L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{\ddot{w}\} = \{0\}$ 

ここで、{b}は物体力を生じさせる加速度(符号は作用方向とは反対=慣性力)の意味で、実際の 物体力はこれに質量密度を掛けたものである。しかし、この違いは基礎式の理解を混乱させるも のではないと考えられるので、以後{b}を物体力ということにする。また、左辺第3項は、考えて いる微小要素全体が土粒子と同じ加速度で動いているとした項、第4項はそれに対する水の動きを 土粒子の動きからみて補正するための項である。

# 1.2.2 水に関する釣合式と Darcy の法則

図1.2.1に示す,単位体積の微小要素に作用する x 方向の力を参照すると,水に作用する力に関する釣合式は次のようになる。

(1.2.2)  $\{\nabla\}p + \{R\} + \rho_f\{\ddot{U}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$ 

ここで、Rは水が土粒子中を流れることによる抵抗力で、次のように表される。

 $\{R\} = \rho_f g[k]^{-1} \{\dot{w}\}$ 

また、Uは水の絶対変位で、土粒子の変位および水の見かけの相対変位とは次の関係にある。

(1.2.3)  $\{U\} = \{u\} + \frac{\{w\}}{n}$ 

ここで, nは間隙率である。



図1.2.1 単位体積の微小水要素に作用する x 方向の力

これらの式を式(1.2.2)に代入すると、水の釣合式として次式が得られる。

(1.2.4)  $\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n}\{\ddot{w}\} - \rho_f\{b\} = [0]$ 

ここで、要素の位置を表すベクトルを $\{x\}$ とし、 $\{\nabla\}\{x\}^{T}\{b\}=\{b\}$ という関係に着目すると、式 (1.2.4)は次のように書くことも出来る。

(1.2.5) 
$$\{\dot{w}\} = -\frac{[k]}{\rho_f g} \left( \{\nabla\} p + \rho_f \{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n} \{\ddot{w}\} - \rho_f \{b\} \right)$$

この式は,既に式(1.1.13)に示した Darcy の法則そのものである。すなわち,全水頭 h は次式で表される。

(1.2.6) 
$$h = \frac{p}{\rho_f g} - \frac{\{x\}^T \{b\}}{g} + \frac{\{x\}^T}{g} \left\{ \{\ddot{u}\} + \frac{1}{n} \{\ddot{w}\} \right\}$$

ここで、{x}は位置ベクトルである。式(1.2.6)の右辺第1項は圧力水頭、第2項は位置水頭である。 また、3項は運動エネルギーによる水頭で、通常の問題では考えられていない項である。

# 1.3 連続の式(質量保存の式)

土と水の混合体に水の出入りがあると、これに伴って体積変化が生じる。連続の式とは、この ような水の出入りと体積変化の関係を述べたもので、質量保存の式と呼ばれることもある。土骨 格の体積変化を生じさせる要因は、(1)水の流入、流出の結果としての残留水分、(2)水圧の変化に よる水の体積変化の二つである。

単位時間に単位体積に流入した水と流出した水の体積の差(減少量)は、- $\{\nabla\}^{\mathsf{T}}\{w\}$ である。一方、単位時間当りの水の体積変化(減少)は、式(1.1.9)より

(1.3.1) 
$$\dot{\varepsilon}_{wv} = \frac{\dot{p}}{K_w}$$

である。水の体積は全体の間隙比 n 倍であるので、水の体積変化の、混合体全体の体積変化(減少)への影響は  $np/K_w$  となる。これら二つの効果により生じた土と水の混合体全体の体積変化(減少)は、次式となる。

(1.3.2)  $\dot{\varepsilon}_{w} = \{m\}^{T} \{\dot{\varepsilon}\}$ 

流れ出した水による体積変化(減少)と、水圧の変化による水の体積変化(減少)の和が、混 合体全体の微小要素の体積変化(減少)に等しいと言うのが連続の式で、結局次のようになる。

(1.3.3) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\} = \{\nabla\}^{\mathrm{T}}\{\dot{w}\} + \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

水の構成則である式(1.1.9)は式(1.3.3)を作る過程で考慮したので、式(1.3.3)右辺の第2項は、ひず みでなく圧力となっている

# 1.4 混合体に関する基礎方程式

#### 1.4.1 厳密な基礎式

1.2, 1.3節で液状化解析に必要な基礎式について説明した。これをまとめると, 次のようになる。(1) 有効応力の定義式

- (1.1.3)  $\{\sigma'\} = \{\sigma\} \{m\}p$
- (2) 土骨格の構成則 (1.1.7)  $\{d\sigma'\}=[D]\{d\epsilon\}$
- (3) ひずみ-変位関係式 (1.1.10) {ε}-[L]{u}
- (4) 全体の釣合式

(1.2.1) 
$$[L]^{I} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{\ddot{w}\} = \{0\}$$

(5) 水の釣合式

(1.2.4) 
$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f \{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n}\{\ddot{w}\} - \rho_f \{b\} = \{0\}$$

(6) 連続の式

(1.3.3) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\} = \{\nabla\}^{\mathrm{T}}\{\dot{w}\} + \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

これらの式では, u, w, p が独立変数として用いられており, u-w-p 形式と呼ばれる。

水を圧縮性, すなわち K<sub>w</sub>≠∞とすると, 式(1.3.3)を p について解き, これを式(1.2.4)に代入する ことにより, 基礎式より p を消去し, 未知数の数を減らすことができる。この様にした基礎式は u-w 形式と呼ばれる。Kw=∞とすると間隙水圧は式(1.2.4)1ヶ所にしか現れないので, これを消去す ることはできない。u-w-p, u-w 形式は Biot の式を運動方程式まで考慮して作った厳密な式である。

#### 1.4.2 混合体の基礎方程式の近似式(u-p 形式)

前項では、厳密な基礎方程式を示した。しかしながら、厳密な式は、未知数の数が多く、解く に際して計算量が多くなる。そのような意味で、u-w-p形式の基礎方程式を直接解いた解析コード はない。u-w 形式はやはり厳密な式ではあるが、基礎式を作る段階で水圧の項を消去したので、 解析上必要とされる水圧の値は、方程式を解いただけでは求まらず、別に求める必要がある。ま た、未知数の数は間隙水圧の部分がなくなっただけであり、余り減ったとはいえない。

ここでは、従来2相系の問題の一つである、圧密解析で用いられてきた定式化となじみがよく、 かつ、ダムや河川、海洋などを扱うときの水の部分とのなじみがよい近似解法を展開する。

第1の近似は、間隙水は骨格の間を、水の土骨格に対する相対加速度 wが土骨格の加速度に比べて無視できる程度に遅くしか流れないとするものである。 w=0とおくと、式(1.2.1)、(1.2.4)はそれぞれ次のように書ける。

(1.4.1)  $[L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$ 

(1.4.2)  $\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$ 式(1.4.2)をwについて解くと、次のようになる。

(1.4.3) 
$$\left\{\dot{w}\right\} = \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p - \rho_f \{\ddot{u}\} + \rho_f \{b\}\right)$$

これを式(1.3.3)に代入すると次式が得られる。

(1.4.4) 
$$\{\nabla\}^{T} = \frac{[k]}{\rho_{f}g} \left(-\{\nabla\}p - \rho_{f}\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{b\}\right) = \{m\}^{T}\{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

式(1.4.1),(1.4.4)が wを無視した場合の基礎方程式である。ここでは、uとpが未知数となっていることから、u-p形式と呼ばれ、連続の式と水の釣合式が合わせて一つの式で表現された。すなわちwの項がなくなり、これにともない、式の数が3つ減っている。通常の液状化解析の範囲では、この近似は充分な精度で成立する。

これに加え,式(1.4.4)の $\rho_f\{ii\}$ も無視されることもある(その物理的な意味は後に式(1.5.29)のと ころで示す)。この項を無視できると,加速度項は全体の釣合式に現れるのみとなる。Zienkiewicz は数値計算を行い<sup>9)</sup>,その結果,「we do not recommend that this term should be generally suppressed, although at low permeabilities its importance is small(この項を省略すべきだというところまでは勧め られないが,透水係数が小さい場合にはこの項は余り重要ではない)」と、やや微妙な表現では あるが,無視しても構わないとの結論を得ている。すると、式(1.4.4)は次のようになる。

(1.4.5) 
$$\left\{\nabla\right\}^{\mathrm{T}} = \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\left\{\nabla\right\}p + \rho_f \left\{b\right\}\right) = \left\{m\right\}^{\mathrm{T}} \left\{\dot{\varepsilon}\right\} - \frac{n}{K_w} \dot{\mu}$$

式(1.4.1)と式(1.4.5)が基礎式の一つの組合せであり、これも u-p 形式である。

### 1.4.3 圧密の式

**u-p**形式の近似では、*wをü*に対して無視できるとしたが、さらに一歩踏み込んで、加速度その ものが小さい場合にはすべての加速度項を無視することも可能であろう。このような仮定は地震 時には成立しないことは明らかであるが、地震後の過剰間隙水圧の消散過程ではかなり妥当なも のとなる。

w, üを無視すると、基礎方程式は、次のようになる。

(1.4.6) 
$$[L]^{1} \{\sigma\} - \rho\{b\} = \{0\}$$

(1.4.7) 
$$\left\{\nabla\right\}^{\mathrm{T}} = \frac{\lfloor \kappa \rfloor}{\rho_{f}g} \left(-\left\{\nabla\right\}p + \rho_{f}\left\{b\right\}\right) = \left\{m\right\}^{\mathrm{T}}\left\{\dot{\varepsilon}\right\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

この式は、いわゆる圧密の式である。式(1.4.5)と式(1.4.7)は同じ式であり、u-p 形式で $\rho_f{\tilde{u}}$ の項を無視した場合には、プログラムを作る場合に水に関する部分は圧密解析の部分と同じ式が使える。なお、圧密解析では、 $K_w$ を無限大と考え $np/K_w$ の項を無視するのが普通である。この場合には、式(1.4.7)は次のようになる。

(1.4.8) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_{f}\{b\}\right) = \{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\}$$

式(1.4.6)と式(1.4.8)が一般に使われる圧密解析の基礎方程式である。

# 1.4.4 浸透の式

これまでの基礎式では、土粒子と水の挙動は相互作用をしており、従って基礎方程式も連成していた。以下では、水に関する項を分離した基礎方程式を紹介する。いずれの場合でも土と水の 混合体の全体としての釣合式は変わらない。この中には有効応力表示すれば分かるように水に関 する項が含まれているので、土骨格の挙動はいずれにしろ水の挙動の影響を受けるわけである。 しかし、ある仮定をおくことによって、水の挙動を土骨格の挙動から分離する。すなわち相互作 用は生じなくなる。

連成項が生じるのは二つの理由による。①Darcyの法則により土骨格が水の流れを拘束する。② 水圧の変化に伴い土粒子の体積変化が生じる(連続の式)

ここでは、そのうち後者の部分を無視する。すなわち、水圧の変化により土粒子の体積変化は 生じないとする(この条件は、定常状態では常に成立する)。すると、式(1.4.4)は、次のようにな る。

(1.4.9) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} = \frac{[k]}{\rho_{f}g} (-\{\nabla\}p - \rho_{f}\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{b\}) = -\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

この式はまだ連成しているが、先に述べたように $\rho_f{\tilde{u}}$ の項を無視すれば、連成項はなくなる。 また、圧密解析で行ったのと同様に加速度の値が小さいとすればやはり連成項はなくなる。すな わち、準静的な場合には、連成項は無視できて、水に関する支配方程式は次式となる。

(1.4.10) 
$$\left\{\nabla\right\}^{T} = \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g} \left(-\left\{\nabla\right\}p + \rho_{f}\left\{b\right\}\right) = -\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

これが、非定常浸透に関する支配方程式である。さらに、定常状態の場合には、水圧の時間変動 もないので、右辺は0となり、次式が得られる。

(1.4.11) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_f \{b\}\right) = 0$$

これは、定常浸透流に関する支配方程式である。

物体力の時間変動がなく,加速度も無視していることを考慮し,式(1.2.6)を式(1.4.10), (1.4.11) に代入すると,それぞれ次の式を得る。

(1.4.12)  $\{\nabla\}^{\mathrm{T}}[k]\{\nabla\}h = \frac{n\rho_{f}g}{K_{w}}\dot{h}$ 

$$(1.4.13) \quad \{\nabla\}^{1}[k]\{\nabla\}h = 0$$

これらは、土質力学でよく用いられる浸透流の式である。

# 1.4.5 過剰間隙水圧

過剰間隙水圧は間隙水圧の静水圧からの変化量であり、次の式で定義される。

(1.4.14)  $p_d = p - p_s$ 

ここで $p_d$ は過剰間隙水圧, $p_s$ は浸透方程式の解(静水圧)である。 $p_s$ が式(1.4.11)の解であることを考慮し,式(1.4.14)を式(1.4.4)に代入すると、次式を得る。

(1.4.15) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p_d - \rho_f \{\ddot{u}\}\right) = \{m\}^{\mathrm{T}} \{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_w} \dot{p}$$

すなわち,形式的には,過剰間隙水圧による基礎方程式と全水圧による基礎方程式は,静的な力 である物体力の項があるかないかだけの差となる。

#### 1.4.6 非排水条件

非排水条件とは読んで字のごとく、水が排水しない、すなわち間隙水の移動がないという条件 である。材料試験法の一つとしてこの条件による実験は多く行われてきた。実際的な問題で非排 水条件が成立するのは、現象が非常に早く起きるときであると考えられる。この様な場合の例と して、圧密解析に先立ち荷重が加わったときの間隙水圧を求める問題がある。この場合には荷重 が瞬時に加わるため、間隙水圧が消散する時間的余裕がないと考えられる。もう一つの例が液状 化解析の場合である。

地震の継続時間は高々数分のオーダーであり、この様に短時間では過剰間隙水圧の消散量はそれほど多くないかもしれないので、非排水を仮定されることも多い。また、圧密解析では、初期 に加わる荷重の載荷に要する時間は短いとして、非排水状態が仮定される。

非排水条件とは、間隙水は土と異なる動きをしないと言うのが条件である。これを式で表すと、 次のようになる。

(1.4.16) w = 0

とすれば、 w は当然0である。すなわち、非排水条件下では、 混合体の厳密な基礎式と、 u-p 形式 による近似式とは同じ結果を与える。

ところで, u-p 形式では, wに関する項を消去したので,式(1.4.16)の条件は直接は使うことができない様にみえる。しかし,式(1.4.16)に代わる条件式(1.3.3)でw=0とおけば次の式が得られる。

(1.4.17) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p} = 0$$

この条件を使って非排水条件下の基礎式を導くことにする。u-w-p 形式の式から出発する。式 (1.2.1)は, 次のようになる。

(1.4.18)  $[L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$ 

次に、式(1.4.17)の時間に関する微分は、速度の項がないので増分に置き換えることができる。

(1.4.19)  $dp = \frac{K_w}{n} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{d}\varepsilon\}$ 

また、有効応力の定義式(1.1.3)を増分形で表すと次のようになる。

(1.4.20)  $\{d\sigma'\} = \{d\sigma\} - \{m\}dp$ 

式(1.4.20)に構成則(1.1.7)、および式(1.4.19)を代入すると次式となる。

(1.4.21)  $\{d\sigma\} = [D]\{d\varepsilon\} + \{m\}\frac{K_w}{n}\{m\}^{T}\{d\varepsilon\} = [\overline{D}]\{d\varepsilon\}$ 

ここで、 D は、非排水条件下の接線剛性マトリックスで、次の式で表される。

(1.4.22)  $\left[\overline{D}\right] = \left[D\right] + \left\{m\right\} \frac{K_w}{n} \left\{m\right\}^{\mathrm{T}}$ 

式(1.4.18),(1.1.10),(1.4.21)が,非排水条件時の基礎方程式である。これらの式には間隙水圧が現 れていない。すなわち,非排水条件を仮定することで変数の数を減らすことができたわけである。 このため,変位と間隙水圧の連成項もなくなり,扱い易い式になっている。なお,[D]が弾性マト リックスであれば,[D]は弾性マトリックスの体積弾性係数 Kを(K+K<sub>w</sub>/n) に置き換えた式であ る。式(1.4.22)より,非排水条件下では水の体積弾性係数 K<sub>w</sub>を無限大とすることができないことが 明らかになった。また,無限大の代わりに非常に大きい値を用いることは,将来連立方程式を解 く際の係数マトリックスの性状を悪くするので危険である。STADAS では,このようなことを考 慮し,FEM の定式化の段階で非排水条件を導入している。これについては後で述べる。

#### 1.5 有限要素法への定式化

ここでは、これまでに導いた基礎方程式の有限要素法定式化を行う。

# 1.5.1 重み付き残差法による定式化

{u<sup>n</sup>}を節点変位とする。領域 V 内の変位 {u} を補間関数 (interpolation function) [N]を用い,

 $(1.5.1) \qquad \{u\} = [N] \{u^n\}$ 

の様に補間する。補間関数[*N*]は,FEM 解析では,変位関数(diaplacement function;補間が変位に 関して行われるときだけ)と呼ばれたり,形状関数(shape function)と呼ばれたりもする。

要素全体の釣合式(1.4.1)に関する残差を最小にするように重み付き積分を行うと次のようになる。

(1.5.2)  $\int_{v} [N]^{\mathrm{T}} ([L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho \{b\} + \rho \{\ddot{u}\}) \mathrm{dV} = \{0\}$ 

ここで、重み関数として、補間関数と同じものを選んでいる。

式(1.5.2)の積分は境界を含む要素全体について行わねばならない。式(1.5.2)の第1項に Gauss の 定理(部分積分)を用いると次のようになる。

(1.5.3)  $\int_{\nu} [N]^{\mathsf{T}} [L]^{\mathsf{T}} \{\sigma\} d\mathbf{V} = \int_{s} [N]^{\mathsf{T}} [n]^{\mathsf{T}} \{\sigma\} d\mathbf{S} - \int_{\nu} ([L] [N])^{\mathsf{T}} \{\sigma\} d\mathbf{V} = \int_{s} [N]^{\mathsf{T}} \{T\} d\mathbf{S} - \int_{\nu} ([L] [N])^{\mathsf{T}} \{\sigma\} d\mathbf{V}$ ここで, [n]は, 法線の方向余弦マトリックス (各列が方向余弦ベクトル $\{n\}$ で構成されるマトリックス), (1.5.4)  $[T] = -[n]^{\mathrm{T}} \{\sigma\}$ 

は表面力ベクトル(traction vector)である。また、Sは領域Vの表面で、dSは表面に関する積分を表す。なお、式(1.5.4)の右辺に負の符号がついているのは、圧縮力を応力の正方向にとっているからである。式(1.5.3)で表面力が陽な形で現れたので、この式を式(1.5.2)に代入すると次の式が得られる。

(1.5.5)  $-\int_{v} \left( \left[ L \right] N \right)^{\mathsf{T}} \{ \sigma \} dV - \int_{s} \left[ N \right]^{\mathsf{T}} \{ T \} dS - \int_{v} \left[ N \right]^{\mathsf{T}} \rho \{ b \} dV + \int_{v} \left[ N \right]^{\mathsf{T}} \rho \{ \ddot{u} \} dV = \{ 0 \}$ これが重み付き残差法によって緩和された釣合式である。

変位を式(1.5.1)で表すと、ひずみは式(1.1.10)より次のように表せる。

(1.5.6)  $\{\varepsilon\} = -[L]\{u\} = -[L][N]\{u^n\} = -[B]\{u^n\}$ 

ここで,

 $(1.5.7) \qquad \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ 

はひずみマトリックス(strain matrix),または単にBマトリックスと呼ばれるマトリックスである。式(1.5.6),(1.5.7)を構成則(1.1.7)に代入すると、次の関係式が得られる。

(1.5.8)  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = -[D][B]\{u^n\}$ 

これらを用いれは、式(1.5.5)は最終的には次のようになる。

 $\int_{v} \left[ B \right]^{\mathrm{T}} \left[ D \right] \left[ B \right] dV \cdot \left\{ u^{n} \right\} = \int_{s} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \left\{ T \right\} dS + \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ b \right\} dV - \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ \ddot{u} \right\} dV$ 

または,

(1.5.9)  $[K]{u^n} = {F}$ 

ここで,

(1.5.10)  $[K] = \int_{v} [B]^{\mathsf{T}} [D] [B] dV$  : 剛性マトリックス

 $\{F\} = \int_{s} [N]^{\mathsf{T}} \{T\} dS + \int_{v} [N]^{\mathsf{T}} \rho\{b\} dV - - \int_{v} [N]^{\mathsf{T}} \rho\{\ddot{u}\} dV : 等価節点外力ベクトル$ 

以上が,全体の釣合式の有限要素定式化であるが,このままでは使いにくいので,有効応力による定式化に変更する。また,非線形の構成則を使うことも考え,増分型の方程式とする。すると,静的な物体力{b}の増分は{0}であるので,式には現れなくなる。全ひずみ型と増分型の定式化の差はこの物体力の項のみである。

増分型で表された基礎式を重み付き残差法により緩和した釣合式は,式(1.5.5)より,次のようになる。

(1.5.11)  $-\int_{v} \left( \left[ L \right] N \right] \right)^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}\mathrm{V} - \int_{s} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}T \right\} \mathrm{d}\mathrm{S} + \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ \mathrm{d}\ddot{u} \right\} \mathrm{d}\mathrm{V} = \left\{ 0 \right\}$ 

このうち,全応力増分{do}は、式(1.5.6)、(1.1.7)、(1.1.3)より、次のように表さされる。

(1.5.12)  $\{d\sigma\} = \{d\sigma'\} + \{m\}dp = -[D][B]\{du^n\} + \{m\}dp$ 

これで、  $\{d\sigma\}$ が求まったので、式(1.5.11)に代入すると、離散化された式が次のように得られる。 - $\int_{s} [N]^{T} \{dT\} dS + \int_{v} [B]^{T} (-[D] B] \{du^{n}\} - \{m\} dp ) dV + \int_{v} [N]^{T} \rho \{N\} \{d\ddot{u}\} dV = \{0\}$ 

または,

(1.5.13)  $[M] \{ \mathrm{d}\ddot{u}^n \} + [K] \{ \mathrm{d}u^n \} - \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \{ m \} \mathrm{d}p \mathrm{d}\mathrm{V} = \{ \mathrm{d}F \}$ 

ここで,

 $\begin{bmatrix} M \end{bmatrix} = \int_{v} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}^{T} \rho \{N\} dV : 質量マトリックス$  $\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \int_{v} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} dV : (接線) 剛性マトリックス$  $\{dF\} = \int_{s} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}^{T} \{dT\} dS : 節点外力ベクトル$ 

以上で、土と水の混合体全体の運動方程式の FEM 化ができた。STADAS ではもう少し計算を減 らすための簡単化を行う。すなわち、Christian が最初に行ったように<sup>12)</sup>、要素内で過剰間隙水圧 増分を一定値  $dp^m$  と考える。すると、全体の釣合式(1.5.13)の間隙水圧に関する積分の被積分関数 である間隙水圧は定数となり、次のように表すことができる。

(1.5.14)  $\int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \{m\} \mathrm{d}p \mathrm{d}V = \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \{m\} \mathrm{d}V \mathrm{d}p = \{K_{p}\} \mathrm{d}p^{m}$ 

ここで、上添字 m は間隙水圧が要素の代表値であることを示している。

(1.5.15)  $\{K_p\} = \int_{V} [B]^{T} \{m\} dV$ : 間隙水圧ベクトル

なお、ここでは、要素内で間隙水圧を一定という説明をしたが、次に示すように、水に関する式の離散化では要素内の一点の間隙水圧の値しか使わないことから、式(1.5.14)の過剰間隙水圧は要素中心の値である。

さらに、間隙水圧を後方差分式で展開する。

 $(1.5.16) \quad dp^m = p^m{}_t - p^m{}_{t-dt}$ 

ここで、2番目の添字は対応する時刻を表している。

式(1.5.14), (1.5.16)を,式(1.5.13)に代入すると全体の釣合式は次のようになる。

(1.5.17)  $[M] \{ d\ddot{u}^n \} + [K] \{ du^n \} - \{ K_p \} p^m_t = \{ dF \} - \{ K_p \} p^m_{t-dt}$ 

また,数値計算に際して生じた不釣合力{dR}は次のようになる。

(1.5.18) 
$$\{dR\} = \{dF\} - \{K_p\}(p^m_t - p^m_{t-dt}) - [M]\{d\ddot{u}^n\} - \{df^e\}$$

$${df^e} = \int_{v} [B]^{\mathsf{T}} {d\sigma'} d\mathsf{V}$$
:有効応力と等価な節点力

この展開により計算量が大幅に減少していることは明かである。

# 1.5.2 水に関する式

次に水に関する式(1.4.4)を時間増分 dt に対して増分表示すると次のようになる。

(1.5.19) 
$$-\{\nabla\}^{\mathrm{T}}\frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g}(\{\nabla\}p+\rho_{f}\{\ddot{u}\}-\rho_{f}\{b\})\mathrm{d}t=\{m\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{d}\varepsilon\}-\frac{n}{K_{w}}\mathrm{d}p$$

ここで、 $\{d_{\mathcal{E}}\}$ 、 $d_{\mathcal{P}}$ は時間  $d_{\mathcal{E}}$ の間の変化量であるので、増分量に書き改められている。通常の FEM では、この式にも重み付き残差法を適用する。しかし、ここでは赤井・田村が行ったように<sup>13)</sup>この項を要素全体について積分する。なお、赤井・田村の論文では圧密解析を目的としていることから、 $K_w=\infty$ とし、式(1.5.19)の右辺第2項は考えていない。また、当然ながら $\rho_f\{\ddot{u}\}$ の項も考慮していない。

式(1.5.19)は、微小要素に対する式であるが、これを一つの要素全体で積分する。まず右辺はそれぞれ次のように積分できる。

(1.5.20) 
$$\int_{v} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{d}\varepsilon\} \mathrm{d}\mathbf{V} = -\int_{v} \{m\}^{\mathrm{T}} [B] \{\mathrm{d}u^{n}\} \mathrm{d}\mathbf{V} = -\{K_{p}\} \{\mathrm{d}u^{n}\}$$

 $(1.5.21) \qquad \int_{V} dp dV = V dp^{m}$ 

ここで、Vは要素内で過剰間隙水圧の値を一定とすれば要素の体積である。



図1.5.1 水の流れを考えるためのモデル

次に式(1.5.19)の左辺の要素全体に対する積分,すなわち要素に流入する水量の合計を計算する。 簡単のために,まず赤井・田村が考えた図1.5.1に示す2次元の長方形要素を考えてみよう。

いま,m 点は考えている要素の中心, $I_1 \sim I_4$ は隣接する要素の中心であり,要素の名前もこれに応じてm, $I_1 \sim I_4$ と呼ぶことにする。Darcyの法則によれば時間 dt のうちに要素 m から要素  $I_1$ へ流出する水量  $Q_1$ は,図1.5.1を参照すれば次のように表される。

$$Q_1 = \mathrm{d}t\,s_1\,k\,\frac{h_n - h_1}{\ell_1}$$

したがって、回りの4つの要素へ流出する水量Qは次のようになる。

(1.5.22) 
$$Q = dt \frac{h_m}{\ell} \sum_{i=1}^4 s_i k_i - dt \sum_{i=1}^4 s_i k_i \frac{h_m}{\ell_i}$$

この式は単純な長方形要素について書いたものであるが,辺の数が n 個の一般的な要素について同じ様な計算を行えばやはり,流出する水量は次のように計算できる。

$$Q = \alpha \left( p^{m} + \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \left\{ \ddot{u}^{m} \right\} - \left\{ b \right\} \right) \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p^{i} + \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \left\{ \ddot{u}^{i} \right\} - \left\{ b \right\} \right) \right) \mathrm{d}t$$
$$= \alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \alpha \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}^{m} \right\}$$

または,

$$(1.5.23) \qquad Q = \alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \left\{ c_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}^{m} \right\} - \sum_{i=1}^{n} \left( \alpha_{i} \left( p^{i} - \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \left\{ c_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}^{i} \right\} \right)$$

なお,式の誘導に際して全水頭は式(1.2.6)により各成分に分離している。また, *p*を過剰間隙水圧 とすれば物体力の項{*b*}は不要である。ここで,

(1.5.24) 
$$\alpha_{i} = \frac{s_{i}k_{i}}{\rho_{f}g\ell_{i}}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{i}k_{i}}{\rho_{f}g\ell_{i}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i}$$
  
 $s_{i}k_{i} = s_{xi}k_{xim}\cos\theta + s_{yi}k_{yim}\sin\theta$   
 $k_{xim}, k_{yim}: \mathbf{m} \bar{h} \bar{h}$ 

 $\{du_i^n\}: 要素 i の要素節点変位$  $<math display="block">\{c_m\} = \alpha \rho_f [N_m]^T \{x_m\}$  $\{c_i\} = \alpha_i \rho_f [N_i]^T \{x_i\}$ 

(注)4節点アイソパラメトリック要素を使う2次元解析では,要素中心の自然座標は,*x=h=*0である。従って,上の式は次のようになる。



図1.5.2 一般的な場合の水の流れを計算するためのモデル

Qが流出量(すなわち,Qが正の時体積は減少)であることに注意すれば,式(1.5.19)と等価な 式は次のようになる。

$$\alpha \left( p_{t}^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p_{t}^{i} - \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \left\{ c_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}^{n} \right\} - \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}_{i}^{n} \right\}$$
$$= -\left\{ K_{p} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}u^{n} \right\} - \frac{nV}{K_{w}} \left( p_{t}^{m} - p_{t-dt}^{m} \right)$$

または, 整理して書き直し,

$$(1.5.26) \quad \left(-\alpha dt - \frac{nV}{K_w}\right) p_t^m - \left\{K_p\right\}^{\mathrm{T}} \left\{du^n\right\} + \sum_{i=1}^n \alpha_i p_t^i dt - \left\{c_m\right\}^{\mathrm{T}} \left\{d\dot{u}^n\right\} + \sum_{i=1}^n \left\{c_i\right\}^{\mathrm{T}} \left\{d\dot{u}_i^n\right\} = -\frac{nV}{K_w} p_{t-dt}^m + B$$

ここで,

(1.5.27) 
$$B = -\alpha dt \rho_f \{x_m\}^{\mathrm{T}} \{b\} + \sum_{i=1}^n \alpha_i dt \rho_f \{x_i\}^{\mathrm{T}} \{b\}$$

式(1.5.23), (1.5.26)のΣの部分は式の上からは理解しづらいかもしれない。例えば、図1.5.1の要素について式(1.5.23)の左辺の間隙水圧に関する項を全体系のマトリックスに加える際には次のような位置に加えることになる。

$p^{m}$	$p^1$	$p^2$	$p^3$	$p^4$
$-\alpha dt - \frac{nV}{K_w}$	$\alpha_1 dt$	$\alpha_2 dt$	$\alpha_3 dt$	$\alpha_4 dt$

式(1.5.23)や式(1.5.26)を一つの要素について作っている限りこれ以上分かりやすい表現は無理である。しかし、系全体について重ね合わせるとより表現が簡潔になる。例えば、要素 m について考えているとき、要素 i の自由度には $\alpha_i$ dt が成分として現れたが、逆に要素 i について考えているとき、要素 m には(同じような表示をするとすれば) $\alpha_m$ dt が現れる。ところで、式の誘導から明らかなように、この時現れる $\alpha_l$ と $\alpha_m$ は同じものである。このことを考慮すれば、間隙水圧に関する係数マトリックス[4]を次のように書くことができる。

(1.5.28) 
$$[A] = [A_{ij}]$$
  
ここで,  
 $A_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} dt - \frac{nV}{K_w}$  (総和は要素 i と接する辺について行う)  
 $A_{ij} = \frac{s_{ij}k_{ij}}{\rho_f g \ell_{ij}}$  (i≠j かつ要素 i と要素 j で水が流れるとき)  
 $A_{ij} = 0$  (要素 i と要素 j で水が流れないとき)

また,

$$\begin{split} s_{ij}k_{ij} &= s_{ijx}k_{ijx} \left| \cos \theta_{ij} \right| + s_{ijy}k_{ijy} \left| \sin \theta_{ij} \right| \\ s_{ijx}, s_{ijy} : 要素 i と要素 j の接する辺の x, y 方向への正射影の長さ \\ \theta_{ij} : 要素 i と要素 j の中心を結ぶ線の x 軸と成す角度 \\ k_{ijx}, k_{ijy} : 要素 i と要素 j の間の平均透水係数で, 次式により求める \\ \frac{\ell_{ij}}{k_{ijx}} &= \frac{\ell_{ij}}{k_{xi}} + \frac{\ell_{ij}}{k_{xj}}, \quad \frac{\ell_{ij}}{k_{ijy}} &= \frac{\ell_{ij}}{k_{yi}} + \frac{\ell_{ij}}{k_{yj}} \\ k_{xi}, k_{yi}, k_{xj}, k_{xj} : 要素 i, j o x, y 方向の透水係数 \\ \ell_{ij} : 要素 i と要素 j の中心間の距離 \\ \ell_{iji}, \ell_{ijj} : \ell_{lij} o 5 5, 要素 i, j o 部分の長さ \end{split}$$

明らかに[A]は対称である。同様に、速度に関する項は、形式的に次のように書くことができる。

$\left\{ \mathrm{d}u^{n} ight\}$	$\left\{ \mathrm{d}u_{1}^{n}\right\}$	$\left\{ \mathrm{d} u_2^n \right\}$	$\left\{ \mathrm{d} u_3^n \right\}$	$\left\{ \mathrm{d} u_4^n \right\}$
$-\left\{c_{m}\right\}^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{1} ight\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{2}^{}\right\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{3} ight\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{4} ight\} ^{\mathrm{T}}$

しかし,節点変位 $\{du^n\}$ ,  $\{du_1^n\}$ ,  $\{du_2^n\}$ ,  $\{du_3^n\}$ ,  $\{du_4^n\}$ には同じ自由度成分が含まれる。それも考慮し,速度増分と間隙水圧の連成項の係数マトリックス[*Q*]を次のように表す。

(1.5.29) 
$$[\mathcal{Q}]^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}\dot{u} \} = [\mathcal{Q}_{im}] \{ \mathrm{d}\dot{u} \} = \sum_{\mathrm{all elements}} \left( -\{c_m\}^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}\dot{u}^n \} + \sum_{i=1}^n \{c_i\}^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}\dot{u}^n \} \right)$$

*Q<sub>im</sub>*は自由度 i が要素 m またはそれと水の流れがある要素の要素節点のとき0でない値を取り,それ以外の時は0となる。その詳細な成分を書くことは可能ではあるが,かなり複雑なものとなる。 実用的には式(1.5.26)を用いて計算することになるので,ここでは示さない。

全体の運動方程式(1.5.17)にはこれに相当する項はないので、支配方程式は非対称となる。ただし、液状化解析では構成則も非関連流れ則を使い非対称であるのが普通であるので、このことは実際上問題にはならない。

なお、この項は式(1.4.4)に現れる $\rho_f\{\vec{u}\}$ と同じものである。その由来からして、全水頭のうち運動エネルギーによる成分である。水の流れは加速度の時間変動に比べればそれほど早いとは思われないこと、隣接する要素間では加速度の値はそれほど違わないこと、最終的には加速度が0になること等を考えると、数値計算に与えるこの項の影響は余り大きくないと考えられる。そのような意味では無視してもかまわない量といえる。

# 1.5.3 全体の方程式

式(1.5.17), (1.5.26)が最終的な式で、まとめると次のようになる。

$$(1.5.30) \quad \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ \ddot{p}^m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [Q]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\dot{u}^n \\ \dot{p}^m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^T & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ p^m_t \end{bmatrix} = \begin{cases} dF - K_p p^m_{t-dt} \\ -\frac{nV}{K_w} p^m_{t-dt} + B \end{cases}$$

式(1.5.30)は時刻 *t*-dt の値を基に時刻 *t* の値を求める式である。ここで, 圧力 *p* に対する時間微分 の項は, 二つの式をまとめて書いたために形式的に現れた項であり, 実際にこの方程式を解く場

合にはこの項は関係しない。なお、先に述べたように、圧密解析では左辺の二つの項は無いので、 剛性マトリックスが対称であれば連立方程式を解く際の係数マトリックスは対称となる。また、 液状化解析でも速度の項([*Q*])を無視すれば(式(1.4.5)の誘導を参照)係数マトリックスは対称 となる。

ここで、数値計算の手法について少し補足をしておく。式(1.5.23)の第2項の係数マトリックスの 対角成分は剛性マトリックス[K]と、水に関するマトリックス[*a*]である。このうち[*a*]は式(1.5.13) からわかるように非常に小さい値である透水係数と時間増分に比例する。このため*K*と*a*の値の 差は非常に大きくなる可能性がある。赤井・田村が解析を行ったような粘性土に対する圧密解析 では、dt は小さいときでも0.1日程度が普通であるが、液状化解析では dt は0.01秒などの値が用い られるのが普通である。このため、透水係数は砂の方が大きいが、*a*の値は液状化解析の方が小 さくなることもある。さらに、液状化解析といえども粘性土を用いることもある。したがって、 液状化解析では *K*と $\alpha$ の値の差は大きく、10桁違うことも珍しくはない。STADAS では、次のよ うな方法<sup>14)</sup>でこれを解決している。式(1.5.30)の下の式に適当な数 $\beta$ を掛け、さらに圧力に関する未 知数をの代わりに / $\beta$ と置き換えると式(1.5.30)は次のように書き改められる。

$$(1.5.31) \quad \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ \ddot{p}^m_t \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta [Q]^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\dot{u}^n \\ \dot{p}^m_t \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -\beta K_p \\ -\beta K_p^T & \beta^2 A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ p^m_t \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF - K_p p^m_{t-dt} \\ -\frac{nV}{K_w} \beta p^m_{t-dt} + \beta B \end{bmatrix}$$

この変換は間隙水圧に関しては時刻 tの間隙水圧の $1/\beta$ の値を求めようとしたものである。左辺第3 項は元のマトリックスが対称であればこの変換によっても対称である。さらに、小さかった項が  $\beta$ 倍されたので、 $\beta$ の値を適当に選ぶことにより精度よい数値計算を行うことができる。 $\beta$ の値は、 単位系にもよるが SI単位系を使う場合には1000~10000の値がかなりの問題に対しよい値を与える ようである。

# 1.5.4 非排水条件

増分形の構成則を使う場合には、非排水条件の式をそのまま使うことができる。1.4.2項で述べた手法を用いて基礎式の段階で間隙水圧を消去すれば、釣合式は次のようになる。

(1.5.32)  $[M]{\ddot{u}^n} + [K']{u^n} = \{dF\}$ 

ここで,

(1.5.33) 
$$[K'] = \int_{v} [B]^{\mathsf{T}} \left( [D] + \{m\} \frac{K_{w}}{n} \{m\}^{\mathsf{T}} \right) [B] \mathrm{d}\mathsf{V}$$

は非排水条件下における剛性マトリックスである。式(1.5.33)の右辺の括弧の中は、土と水を一体 として考えた場合の見かけの接線剛性である。式(1.5.32)の特徴は、連立方程式を解く際に、水に 関する自由度が無いので連立方程式の未知数の数を少なくできるということである。水圧につい ては、式(1.4.19)から求めることになる。しかし、この方法には、次に述べるような欠点もある。

圧密解析や水の排水を考える液状化解析では水を非圧縮材料と考え、*K*<sub>w</sub>を無限大とすることが 多い。しかし、非排水条件下ではこの仮定は単純には使えない。これは、式(1.5.33)で*K*<sub>w</sub>を無限大 にできないことから明かである。また、余り大きな*K*<sub>w</sub>の値を用いると、剛性マトリックス計算の 際に大きな誤差が入ってくるので好ましくない。

STADAS では、Christian 系の解法の特徴を生かした非排水条件の導入を行っている。この方法 は最初 Christian<sup>15)</sup>によって体積変化が無いという条件を使うために導入されたのであるが、以下 ではより一般的な形で示す。

全体の釣合式はこれまでと同様式(1.5.17)を使うが、間隙水圧に対する差分式は用いないことに すれば式(1.5.17)は次のように表せる。

(1.5.34)  $[M] \{ d\ddot{u}^n \} + [K] \{ du^n \} - [K_p] dp^m = \{ dF \}$ 

一方,非排水条件の条件式(1.4.17)は節点変位を用いれば次のように表すことが出来る。

(1.5.35) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{d}\varepsilon\} = -\{m\}^{\mathrm{T}}[B]\{\mathrm{d}u^n\} = \frac{n}{K_w}\mathrm{d}p$$

この式は要素内の各点で成立すべき条件式であるが、この条件を少しゆるめ、各要素で成立していればよいとする。また、これまでの解法と同じく間隙水圧は要素内で一定とする。すなわち、式(1.5.35)の代わりにこれを要素積分した式が非排水条件に対する条件式というように条件を緩めるわけである。式(1.5.35)を要素積分すると次のようになる。

(1.5.36) 
$$\left[K_{p}\right]^{\mathrm{T}}\left\{\mathrm{d}u^{n}\right\} + \frac{nV}{K_{w}}\mathrm{d}p^{m} = 0$$

式(1.5.34), (1.5.36)を連立させれば非排水条件下の離散化された式が次のように得られる。

(1.5.37) 
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ d\ddot{p}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^{\mathrm{T}} & -\frac{nV}{K_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ dp^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF \\ 0 \end{bmatrix}$$

先に示した方法では非排水条件下では未知数を節点変位のみに減らしてきたが、この方法では排水条件下における式と同様、2相系の連成した式を解いていることになる。また、この式では *K*<sub>w</sub> を無限大としても方程式を解くことが出来る。すなわち、先に述べたように Christian 系の解法で は水の剛性を無限大として解を求めることが出来る。

式(1.5.37)を式(1.5.30)と比べると,非排水条件も排水条件時の式と本質的には同じ形をしている。 式(1.5.30)では水の流れを考えたのに対し,式(1.5.37)ではその代わりに体積変化がないという条件 を用いたのがその違いである。したがって, Christian 系の解法を用いる場合には係数マトリック スの計算法を変えるだけで同じ式が使えることになる。

### 1.5.5 圧密解析

圧密解析は、過剰間隙水圧の消散を計算するものである。従って、圧密解析では非排水条件ということは有り得ず、常に排水条件のみが可能となる。ただし、圧密解析では、間隙水圧の消散 に要する時間に比べて荷重が載荷される時間は短いとして初期条件として与えられる荷重が加え られたときには非排水条件が仮定される。この部分については、次の静的解析で述べる。

1.4.3項で示したように, 圧密解析では加速度を無視する。式(1.5.30)で $\{d\ddot{u}^n\} = \{0\}$ とおき, さらに, 運動エネルギーによる全水頭の変化量である,  $\{d\dot{u}^n\}$ の項も無視すれば, 圧密解析の基礎方程式として次式を得る。

(1.5.38) 
$$\begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^{\mathrm{T}} & A \end{bmatrix} \begin{cases} \mathrm{d}u^n \\ p_t^m \end{cases} = \begin{cases} \mathrm{d}F - K_p p_{t-dt}^m \\ -\frac{nV}{K_w} p_{t-dt}^m \end{cases}$$

この式は、赤井・田村の示した式と同じものである。

#### 1.5.6 静的解析

静的解析では,荷重が静的に作用し,応答も静的であるとして,時間に関する変化量を無視する。この場合,水に関する条件として,排水条件,非排水条件の二つがある。

非排水条件では、式(1.5.37)の加速度項を無視した式が基礎方程式となる。

(1.5.39) 
$$\begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^{\mathrm{T}} & -\frac{nV}{K_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}u^n \\ \mathrm{d}p^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}F \\ 0 \end{bmatrix}$$

一方,排水条件では,水圧の値は変化しない。したがって,上の式で dp<sup>m</sup>=0とおいてよく,基礎方程式は次のようになる。

 $(1.5.40) \quad [K] \{ \mathrm{d}u^n \} = \{ \mathrm{d}F \}$ 

なお、この場合の水圧の値は次項に述べる浸透解析を解き求めることができる。

#### 1.5.7 浸透流解析

最後に浸透流に関する定式化を示す。非定常浸透流は、式(1.5.26)において連成項を無視すれば よく、

(1.5.41) 
$$\alpha \left( p_t^m - \rho_f \{ x_m \}^{\mathsf{T}} \{ b \} \right) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( p_t^i - \rho_f \{ x_i \}^{\mathsf{T}} \{ b \} \right) dt = -\frac{n\nu}{K_w} \left( p_t^m - p_{t-dt}^m \right)$$
  
さらに、定常な問題に関しては、 $p_l = p_{t-dt} = p$  とおけばよく、次式が得られる。  
(1.5.42)  $\alpha \left( p^m - \rho_f \{ x_m \}^{\mathsf{T}} \{ b \} \right) dt - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( p^i - \rho_f \{ x_i \}^{\mathsf{T}} \{ b \} \right) dt = 0$ 

# 1.6 境界条件

# 1.6.1 土粒子の変位に関する境界条件

土粒子に関する境界をまとめると図1.6.1の様になる。このうち自由境界の扱いは自明であるこ とから、以下では解析基盤と側方境界の設定方法について紹介する。両境界の違いは地震波が入 射する境界としない境界である。変位の問題を扱うのであるから、以後簡単のために、支配方程 式から変位に関する項のみを取り出して考えることにする。すなわち、支配方程式を

(1.6.1)  $[M]{\ddot{u}} + [C]{\dot{u}} + [K]{u} = \{0\}$ と表すことにする。



図1.6.1 変位の境界条件の分類

#### 1.6.2 剛基盤

剛基盤とは、地震波の入射してくる基盤がまるで剛体のように同じ動きをすると仮定した基盤 である。

いま,基盤以外の変位{u}を基盤の変位{u<sub>b</sub>}と基盤に対する相対変位に分けることにする。

 $(1.6.2) \qquad \{u\} = \{u_r\} + \{u_{br}\}$ 

ここで、{ubr}は基盤の変位に対応する相対変位で、

(1.6.3) 
$$\{u_{br}\} = \begin{bmatrix} I_b \end{bmatrix} \{u_b\} = \begin{bmatrix} I_x & I_y & I_z \end{bmatrix} \begin{cases} u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{cases}$$

 $[I_b]$ は3列のマトリックスで、その各列を構成するベクトル $\{I_x\}$ 、 $\{I_y\}$ 、 $\{I_z\}$ は、それぞれ x、y、z 方向の自由度に対応する成分が1でその他の成分が0のベクトル、また、 $\{u_b\}$ の成分 $u_{bx}$ 、 $u_{by}$ 、 $u_{bz}$ は x、y、z 方向の変位である。

式(1.6.3)を式(1.6.1)に代入し、基盤の変位成分とその他の変位成分に分けると式(1.6.1)は次のように書き直すことができる。
$$(1.6.4) \qquad \begin{bmatrix} M_r & 0\\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r + \ddot{u}_{br}\\ \ddot{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_r & C_{br}\\ C_{rb} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_r + \dot{u}_{br}\\ \dot{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & K_{br}\\ K_{rb} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r + u_{br}\\ u_b \end{bmatrix} = \begin{cases} 0\\ 0 \end{cases}$$

変位{ub}は既知であるので、式(1.6.4)の上の式を書き下すと次のようになる。

(1.6.5)  $[M_r]\{\dot{u}_r\} + [C_r]\{\dot{u}_r\} + [K]\{u_r\} = -[M_r][I_b]\{\ddot{u}_b\} - ([C_r][I_b] + [C_{hb}])\{\dot{u}_b\} - ([K_r][I_b] + [K_{hb}])\{u_b\}$ 式(1.6.5)の右辺で $\{u_b\}$ が剛体変位であるから、右辺第3項は $\{0\}$ となる。右辺第2項は、Rayleigh 減 衰のうち剛性マトリックス比例減衰を用いている場合や、相対的な速度差に比例するような減衰 (すなわち構造減衰)を用いている場合には $\{0\}$ となる。質量比例減衰を用いている場合のように、 質点の絶対速度に比例した減衰(粘性減衰)を用いている場合にはこの項は $\{0\}$ にはならないが、 通常この項の影響は小さいとして無視される。これら2項を無視すると、式(1.6.5)は次のようにな る。

(1.6.6)  $[M_r]{\ddot{u}_r} + [C_r]{\dot{u}_r} + [K]{u_r} = -[M_r][I_b]{\ddot{u}_b}$ 式(1.6.6)が剛基盤に対する運動方程式である。

#### 1.6.3 弾性基盤

ここでは2次元問題に対し, Joyner にしたがって<sup>16)</sup>弾性基盤のモデル化手法を示す。

図1.6.2(a)に示すようにに解析範囲の基盤に地震波が境界に直交して入射してくる二次元問題を 考える。座標系 x-y は y が基盤と直交(鉛直上向き)しているとする。地震波の進行方向が y 軸 方向であるから, x 軸は SV 波の振動方向に, y 軸は P 波の振動方向である。ここで,検討の対象 とするのは, P, SV 波で,波動の進行方向が境界と直交しているような入射波と反射波である。 また,境界の挙動を検討する際,境界は無限地盤に含まれるとして考える。



添字 P, S をそれぞれ P 波, SV 波に関する量, 添字 I, R を入射波 (incident wave), 反射波 (reflected wave) を表す量とする。すると, 境界上の点 (実際には境界より少しだけ下の点)の速度は次のように表せる。

(1.6.7)  $\begin{array}{c} v_{x} = v_{SI} + v_{SR} \\ v_{y} = v_{PI} + v_{PR} \end{array}$ 

次に、図1.6.2(b)に示すような、図1.6.2(a)のモデルの解析範囲を除いたモデル、すなわち基盤が解放しているモデル(解放基盤)を考える。ここにも同じ地震波が入射してくるとし、このモデルの解放基盤上の点の量に添字 Fをつけることにする。解放基盤に直角に入射する波は位相が180°逆転して反射するので、解放基盤の速度は次のように表される。

(1.6.8)  $v_{Fx} = 2v_{SI}$  $v_{Fy} = 2v_{PI}$ 

ここで考えている波はいずれも平面波であり、その変位 u はいずれも位置と時間の関数として

次のように表される。

$$u_{PI} = u_{PI} \left( y - V_{p} t \right)$$

$$u_{PR} = u_{PR} \left( y + V_{p} t \right)$$

$$u_{SI} = u_{SI} \left( y - V_{s} t \right)$$

$$u_{SR} = u_{SR} \left( y + V_{s} t \right)$$

ここで、*V<sub>p</sub>*は圧縮波の速度、*V<sub>s</sub>*はせん断波の速度である。この関係を利用すれば、ここで考えている3つの波により生じるひずみはそれぞれ次のように表せる。

(1.6.10) 
$$\varepsilon_{yI} = -\frac{\partial u_{PI}}{\partial y} = \frac{v_{PI}}{V_P}, \quad \varepsilon_{yR} = -\frac{\partial u_{PR}}{\partial y} = \frac{v_{PR}}{V_P}$$
$$\gamma_{xyI} = -\frac{\partial u_{SI}}{\partial y} = \frac{v_{SI}}{V_S}, \quad \gamma_{xyR} = -\frac{\partial u_{SR}}{\partial y} = \frac{v_{SR}}{V_S}$$

ここで、Vp, Vsは基盤の弾性定数(体積弾性係数K, せん断弾性係数G)と、質量密度pを用い

(1.6.11) 
$$V_P = \sqrt{\frac{1}{\rho}} \left( K + \frac{4}{3}G \right), \quad V_S = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

の様に表されるので、P, SV 波により境界に発生する応力はそれぞれ次のようになる。

(1.6.12) 
$$\sigma_{yI} = \frac{v_{PI}}{V_p} \left( K + \frac{4}{3}G \right) = \rho V_p v_{PI} \quad \sigma_{yR} = -\frac{v_{PR}}{V_p} \left( K + \frac{4}{3}G \right) = \rho V_p v_{PR}$$
$$\tau_{xyI} = \frac{v_{SI}}{V_s} G = \rho V_S v_{SI} \quad \tau_{xyR} = -\frac{v_{SR}}{V_s} G = -\rho V_S v_{SR}$$

境界に作用する応力は入射波による応力と反射波による応力の和であるから、

(1.6.13)  $\sigma_{y} = -\rho V_{P} (v_{PR} - v_{PI}) = -\rho V_{P} (V_{y} - V_{Fy})$  $\tau_{xy} = -\rho V_{S} (v_{SR} - v_{SI}) = -\rho V_{S} (V_{x} - V_{Fx})$ 

これまでの議論では1点の応力を考えたが、実際の解析ではこれを節点力に直す必要がある。式(1.6.13)の応力を境界に作用する表面力と考えれば式(1.5.4),(1.5.10)によりこれを行うことが可能である。境界が直線であれば、節点に作用する力は両隣の節点の中点までの部分の合力であり、奥行き単位幅当りについて次のようになる。

(1.6.14) 
$$\{F\} = \begin{cases} \rho V_S \ell (v_x - v_{Fx}) \\ \rho V_P \ell (v_y - v_{Fy}) \end{cases} = \begin{cases} \mu_x (\dot{u}_x - \dot{u}_{Fx}) \\ \mu_y (\dot{u}_y - \dot{u}_{Fy}) \end{cases}$$

*ℓ*は考えている節点の両端の節点までの距離の和の半分, *μ<sub>x</sub>*, *μ<sub>y</sub>*は境界につける等価な境界である ダッシュポットの粘性係数である。

上記の式の誘導では無限地盤が弾性であること以外には、入射波、反射の進行方向が境界に直 交しているということしか仮定しなかった。このうち、入射波が境界に直交していることは、入 力地震動の与え方から成立しているが、反射波は解析範囲での応答の結果であり、必ずしも境界 に直交しているとは限らない。この意味で、式(1.6.14)は近似式である。しかし、1次元解析では反 射波も境界に直交しているので、式(1.6.14)は厳密なモデルである。

1方向に振動する地震波のみを考え、式(1.6.14)による節点力を運動方程式(1.6.1)に組み込むと、 次のようになる。

(1.6.15)  $[M]{\ddot{u}} + [C']{\dot{u}} + [K]{u} = \mu \{I\}\dot{u}_f$ 

ここで、{*I*}は基盤上の節点で地震波の振動方向の自由度成分が1で他の成分が0ベクトル、*u*fは解析基盤が解放基盤であったときの変位である。また、

(1.6.16)  $[C'] = [C] + [\mu]$ 

[µ]は対角マトリックスで、ダッシュポットのついている自由度だけ式(1.6.14)で定義されるダッシュポットの減衰係数が入っている。

式(1.6.15)では、入力として速度を与えている。一般的には地震入力としては加速度が用いられることが多いので、これは少し使いづらい。そこで、変位を基盤が解放基盤であったとしたときの変位とそれに対する相対変位に分ける。

 $(1.6.17) \quad \{u\} = \{u_r\} + \{I_b\}u_f$ 

ここで、 $\{I_b\}$ はダッシュポットのついている自由度方向の成分が1で他の成分が0のベクトルである。 式(1.6.17)を式(1.6.16)にに代入すると次式が得られる。

(1.6.18)  $[M]\{\ddot{u}_r\} + [C']\{\dot{u}_r\} + [K]\{u_r\} = -[M]\{I_b\}\ddot{u}_f - [C]\{I_b\}\dot{u}_f$ 

これで,解放基盤の動きの速度の項が消え,代わりに加速度の項が残った。すなわち,入力として加速度が使えることになったわけである。なお,この式でも減衰が要素内の相対的な動きに比例するような場合には右辺第2項は {0}となる。

式(1.6.17)では、一つの方向の地震波のみを考えたが、例えば上下、水平両方向の地震波を考えるなら、これと対応する項を入れなければならない。

### 1.6.4 側方境界

ここでは、最もよく用いられる側方境界である、弾性基盤と同じダッシュポットを用いるモデ ルを示す。



図1.6.3 Lysmer の考えたエネルギー伝達境界

Lysmer 等は、図1.6.3のように領域内で生じる振動に対し、次のような境界条件が、波の透過に 対し非常によい性能を与えることを示した<sup>17)</sup>。

(1.6.19)  $\sigma = -a\rho V_P v_n$  $\tau = -b\rho V_S v_t$ 

ここで、 $\sigma$ 、rはそれぞれ境界の法線、接線方向応力、 $v_n$ 、 $v_l$ は法線、接線方向速度、a、bは係数 で無次元量である。特に、a=1、b=1とした場合を標準境界と呼び、領域内から境界に入射する波 の入射角が余り離れていない場合にはこの標準境界が入射波を最もよく吸収する。また、定常の Rayleigh 波に対しては深さ方向にa、bの値を変えることで完全に伝播する波を吸収できる。

この境界の物理的意味は先に示した弾性基盤に対する境界と同じ意味であるが(年代的にはこの方が先に発表されており Joyner の示した方法はこの境界を準用したものである),入射する波は境界に対して任意の角度で入射することを考えいることが異なる。図1.6.4に示すように標準境界はかなり広い入射角の範囲に対しよい吸収能力を示している。Joyner の方法では,境界に直交して伝播する波しか考えなかったが,図1.6.4から推測されるように斜めに境界に入ってくる反射波に対しても実用的には充分有効であると考えられる。

Lysmer の方法では、振動源は解析範囲内にあり、この波動が先の境界条件で吸収できることを いっているわけである。地震応答解析の場合には地震は当然解析範囲外で生じるわけで、したが って、解析範囲外でも地盤は振動している。この様な場合には式(1.6.19)の境界条件を使うことは できない。解析の対象としているモデルから自由地盤の動きを引いたとすれば自由地盤の変位は0 になる。すなわち、側方境界で吸収すべき波は自由地盤の動きから外れた波だけであるとすれば、 式(1.6.19)に代わる境界条件は次のようになる。

(1.6.20)  $\sigma = -a\rho V_P(v_x - v_{Fx})$  $\tau = -b\rho V_S(v_y - v_{Fy})$ 

なお,実際の問題では *a=b=*1とした標準境界が用いられるのが普通で,入力データとして *a*, *b* を用意しているプログラムはほとんど無い。しかし,この場合でも例えば *V<sub>s</sub>*, *V<sub>P</sub>*の値に *a*, *b* を 効果を考慮した値を入力すれば使うことができる。



図1.6.5に示すような i 層と i+1層の間の節点に作用する節点力  $\{F_{i+1}\}$ は図の記号を用いると標準 境界に対しては、次のように表される。

$$(1.6.21) \quad \left\{F_{i+1}\right\} \begin{cases} \left(\rho_{i}\ell_{i}V_{Pi} + \rho_{i+1}\ell_{i+1}V_{Pi+1}\right)\left(\dot{u}_{x,i+1} - \dot{u}_{Fx,i+1}\right)\right) \\ \left(\rho_{i}\ell_{i}V_{Si} + \rho_{i+1}\ell_{i+1}V_{Si+1}\right)\left(\dot{u}_{y,i+1} - \dot{u}_{Fy,i+1}\right) \\ \left(\mu_{yrbi}\left(\dot{u}_{y,i+1} - \dot{u}_{Fy,i+1}\right)\right) \end{cases}$$





図1.6.6 側方粘性境界の模式図

式(1.6.6), (1.6.18)に更にこのようなダッシュポットを考慮した運動方程式は次のように書ける。 (1.6.22)  $\begin{bmatrix} M^* \\ \ddot{u}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* \\ \dot{u}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K^* \\ u_r \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} M \\ I_b \end{bmatrix} \ddot{u}_g - \begin{bmatrix} \mu_{rb} \\ I_F \end{bmatrix} \dot{u}_F$ 

ここで、 $M^*$ 、 $C^*$ 、 $K^*$ 、 $u_g$ は剛基盤の時、それぞれ  $M_r$ 、 $C_r$ 、 $K_r$ 、 $u_b$ を、また弾性基盤の時、それぞれ M、C、K、 $u_f$ をあらわす。また、 $[m_{rb}]$ はダッシュポットのついている自由度だけに作用し、 $u_F$ は側方自由地盤の動きである。

ダッシュポットを側方境界に用いる計算をするには、2回の計算を行う必要がある。すなわち、 自由地盤の計算を最初に行い、次に下方から入射する地震動と側方の自由地盤の振動を入力と計 算を行うわけである。一度に解くために自由地盤の質量を大きくして解析する方法もあるが、余 り大きくすれば数値計算に悪い影響を与えるし、余り小さいと自由地盤が解析対象地盤の挙動の 影響を受けてしまう。STADASでは、図1.6.6のようなモデル化をそのまま同時に解くので、2度プ ログラムを実行する必要はない。この方法を用いる場合には、図1.6.6に書いたようにモデル化し、 このまま全体系を解くと、自由地盤の応答も解析範囲の影響を受けることになる。そこで、運動 方程式を作るとき、ダッシュポット減衰の項は、自由地盤の部分には加えないようにしなければ ならない。これを式で表すと次のようになる。

 $(1.6.23) \quad \begin{bmatrix} M^* & 0 \\ 0 & M_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}^n \\ \ddot{u}^n_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^* + \mu_{rb} & \mu_{rb} \\ 0 & C_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}^n \\ \dot{u}^n_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & K_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^n \\ u_F^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [M] \{I\} \\ [M_F] \{I_F\} \end{bmatrix} \ddot{u}_g$ 

ここで、上の列は解析範囲、下の列は自由地盤に関する運動方程式、添字 F は自由地盤の諸量を 表している。

# 1.6.5 水に関する境界条件

水に関する境界条件は、水圧の値が指定される基本境界と、水量が指定される自然境界の二つ である。

STADAS で用いている方法では、要素中心の間隙水圧しか扱っていないので、境界条件の与え 方には少し工夫を要する。いま、図1.6.7に示すように、考えている境界を対称軸にして、境界に 接している要素と軸対称な仮想の要素を考え、考えている要素の間隙水圧を *p*<sub>m</sub>、仮想の要素の間 隙水圧を *p*<sub>i</sub> とする。



基本境界では、間隙水圧の値が与えられている。この値を $p_b$ とすると、要素中心間の間隙水圧の分布が直線的であることから、仮想の要素の間隙水圧 $p_i$ は、

$$(1.6.24) \qquad p_b = \frac{p^m + p^i}{2}$$

を  $p_i$ について解けば求まる。すなわち、  $p^i = 2p^b - p^m$ となる。すなわち、この辺を通って流れる 水量 Q は (加速度の値を同じとすれば)

(1.6.25) 
$$Q = \frac{sk}{\rho_f g\ell} (p^m - p^i) = \frac{2sk}{\rho_f g\ell} (p^m - p_b)$$

である。したがって、 $\alpha$ の計算の際に、 $\ell$ を要素中心間距離ではなく、辺の中央までの距離とし、 さらに、 $p_b$ の項を右辺にも加えればよいことになる。

一方,自然境界の場合には流量が与えられている。境界を流れる水量 dQ は次式で与えられる。

(1.6.26) 
$$dQ = \frac{sk}{\ell \gamma_w} \left( dp^i - dp^m \right)$$

ここで、k は要素中心間を結ぶ方向に対する透水係数、s は境界の長さ、 $\ell$ は要素中心間の距離である。

この様に,基本境界,自然境界いずれの場合にも仮想要素の間隙水圧が,境界が属している要素の間隙水圧で表せる。すると,式(1.5.23)の流量が計算できるので,これまでと同じようにして 定式化を行うことができる。

実際に用いられる境界は  $dp_b=0$ , または, dQ=0であるが, これ以外の場合には, 定式化の際に  $dp_b \diamond dQ$  が式(1.5.30)の左辺から右辺に移動することに注意されたい。

$$dQ=0 : 非排水 \alpha_i を加える必要なし dp_i=dp_m$$

$$p_b=0: 排水 \frac{sk}{\rho_f g(\ell/2)} \epsilon \alpha_i c m える。 d2 は辺までの距離$$
わきだし境界:単位時間の吸い込み量を Q\*とすると, -Q\*dt を左辺に加える。
基本境界:  $\frac{sk}{\rho_f g(\ell/2)} p_b dt \epsilon f a c c m z \delta$ 。

#### 1.7 時間に関する数値積分

#### 1.7.1 Newmark の*β*法

基礎式(1.5.30)では、間隙水圧は時刻 *t*-dt の値を基に時刻 t の値を求めているので、変位に関しても同様な方式を用いる。Newmark の $\beta$ 法を適用すると、時刻 t の変位、速度は次のように表される。

$$\dot{u}_{t} = \dot{u}_{t-dt} + (1-\gamma) dt \ddot{u}_{t-dt} + \gamma dt \ddot{u}_{t}$$

$$(1.7.1) \qquad u_{t} = u_{t-dt} + dt \dot{u}_{t-dt} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right) (dt)^{2} \ddot{u}_{t-dt} + \beta (dt)^{2} \ddot{u}_{t}$$

ここで,  $\gamma$ ,  $\beta$ は式の精度等に影響を与えるパラメータで,  $0 \le \gamma \le 1$ ,  $0 \le \beta \le 1/2$ の値を取る。 $\gamma$ の値として $\gamma = 1/2$ として速度を求める方法は Crank-Nicholson 法と呼ばれ, 一般的によく用いられる。これは, これ以外の値を用いると応答値に数値減衰が入るからである<sup>18)</sup>し, また,  $\gamma = 1/2$ は一般的に精度がよいからである。

式(1.7.1)を増分表示にすると次のようになる。

(1.7.2) 
$$\{ d\dot{u} \} = dt \{ \ddot{u}_{t-dt} \} + \gamma dt \{ d\ddot{u} \}$$
$$\{ du \} = dt \{ \dot{u}_{t-dt} \} + \frac{1}{2} (dt)^2 \{ \ddot{u}_{t-dt} \} + \beta (dt)^2 \{ d\ddot{u} \}$$

これをこのまま基礎式(1.5.30)に代入すると、未知量は {*dü*} 、 {*p*(*t*)}だけとなる。これでも解ける わけであるが、圧密解析では変位増分が未知数であることを考えると、ここでも同じように変位 増分を未知数としておく方が便利である。式(1.7.2)を速度と加速度増分について解くと、次のよう になる。 (1.7.3)

$$d\ddot{u} = \frac{1}{\beta (dt)^2} du - \frac{1}{\beta dt} \dot{u} - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}$$
$$d\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta dt} du + dt \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}$$

ここで, *u*, *u*はそれぞれ時刻 *t*-*dt* における値である。これを基礎式に代入すると, 次の連立方程式が得られる。

この方法のメリットは、剛性マトリックス[*K*]の項は左辺にしか現れないことである。したがって、剛性マトリックスを作りながらその中に必要な他の項を埋め込んでいってもかまわないことになる。

### 1.7.2 予測子修正子法

構成則で,接線剛性と応力がひずみの関数で与えらえるばあいには式(1.5.30)の[K] {u}の項が非線形の式になるので,直接解法のように一意的に解を求めることはできなくなる。この場合にはイタレーションにより解を求めることになる。STADASでは,予測子修正子法を用いる。

予測子としては、Newmark のβ法を用いる。この際、加速度増分は入力地震動の加速度と同じ、 すなわち、解析対象は剛体移動をすると仮定したときの加速度応答値を初期値として用いる。間 隙水圧に関しては前のステップの値を初期値として用いる。

修正子としては,初期剛性,接線剛性のいずれを使うこともできる。これらを用いた解析の流 れを図1.7.1に示す。



図1.7.1 予測子修正子法に基づく反復解法の手順

# 参考文献

- Biot, M.A., General Theory of Three-dimensional Consolidation, J. Appl Phys., Vol 12, pp.155-164, 1941
- Biot, M.A., Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, J. Appl. Phys, Vol. 26, pp.182-185, 1955
- Biot, M.A., Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, J. Appl. Phys, Vol. 33, pp.1483-1898, 1962
- Biot, M.A., Theory of Stability and Consolidation of a Porous Media under Initial Stress, J. Math. and Mech., Vol. 12, pp.521-541, 1963
- Ghaboussi, J. and Wilson, E.L., Variational Formulation of Dynamics of Fluid Saturated Porous Elastic Solids, Proc. ASCE, Vol. 98, No. EM4, pp.947-963, 1972
- Bowen, R.M., Theory of Mixtures, Continuum Physics, Vol. III, Eringen ed., Academic Press, 1976, New York
- 7) Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol. 30, pp.385-395, 1980
- Zienkiewicz, O.C., Basic Formulation of Static and Dynamic Behavior of Soil and Other Porous Media, Numerical Methods in Geomechanics, J.B. Martins ed., D. Reidl Publishing Co., 1982
- 9) Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C. ed., Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads Constitutive relations and numerical treatment, John Wiley and Sons, 1982
- Prevost, J.H., Nonlinear Transient Phenomena in Saturated Porous Media, Comp. Mech. in Appl. Mech. Eng., Vol. 20, pp.3-8, 1982
- Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T, Dynamic Behavior of Saturated Porous Media, The Generalized Biot Formulation and Its Numerical Solution, International Journal of Numerical and Applied Method in Geomechanics, Vol. 8, pp.71-96, 1984
- Christian, J.T. and Boehmar, J.W., Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE, Vol. 96, No. SM4, pp.1435-1457, 1968
- 13) 赤井浩一,田村武,弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析,土木学会論文報告集,第269 号, pp.95-104, 1976
- 14) 荒井克彦,渡辺知幸,植田康宏:多次元圧密数値解析手法の比較,土質工学会論文報告集, Vol.24 No. 3, pp.178~180, 1983
- Christian, J.T., Undrained Stress Distribution by Numerical Methods, Proc. ASCE, SM6, Nov., 1968, pp.1333-11345
- Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 65, No. 5, pp.1337-1357, October 1975
- Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM4, 1969, pp.859-877
- 18) 吉田裕,時間依存問題,構造工学における有限要素法の理論と応用,日本鋼構造協会,昭和 59年11月

### 2 砂時計モード変形

STADAS では、数値積分の効率化、液状化解析における解法との適合性の二つの目的で、2次元 解析用固体要素で、体積(面積)に関する積分を行う際、1点ガウス積分を用いている。この方法 は、1章で示したように、また、この章で示すように、色々な有利な特徴を持っているが、砂時計 不安定が生じる可能性があるという欠点を持っている。STADAS では、これを抗砂時計マトリッ クス(anti-hourglass mode matrix)を導入することで解決している。この章ではその手法を説明す る。

# 2.1 基本条件

この章では、土骨格の変形のみを扱う。全応力解析の場合には土と水が一体となったものと考 えてよい。水について考慮しなくてもよい理由は、この章の説明から自明となる。

有限要素法への定式化については,前章で示したが,ここではそれを再掲し,1点ガウス積分の 特徴を生かした積分法を示す。基礎となる式は次のとおりである。

(1) 変位の補間

(2.1.1) 
$$u = \{N\}^{T} \{u_{n}\}$$
$$v = \{N\}^{T} \{v_{n}\}$$

*u*, *v*: x, y 方向の変位 添字 *n* は節点変位であることを表す。

(2) 補間関数

(3)

(2.1.2) 
$$\{N\}^{T} = \{N_{1} \ N_{2} \ N_{3} \ N_{4}\}$$
  
(2.1.3)  $N_{i} = (1 + \xi \cdot \xi_{i})(1 + \eta \cdot \eta_{i})$   
(2.1.4)  $\xi_{i} = -1, 1, 1, -1$  for  $i = 1$  to 4  
(2.1.5)  $\eta_{i} = -1, 1, 1, -1$  for  $i = 1$  to 4  
構成則

 $(2.1.6) \qquad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ 

応力は圧縮が正, ひずみは工学ひずみ

(4)ひずみ-変位関係式

(2.1.7) 
$$\{\varepsilon\} = -\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \begin{bmatrix} u\\ v \end{bmatrix}$$

1点ガウス積分では、応力、ひずみなどには要素中央の値を用いる。したがって、要素中央の値を求めておくのが便利である。要素中央では $\xi = \eta = 0$ である。式(2.1.1)~(2.1.5)を式(2.1.7)に代入すれば、要素中央のひずみを次のように求めることができる。

$$(2.1.8) \qquad \left\{ \varepsilon_{c} \right\} = \frac{1}{A} \begin{cases} \left\{ b_{x} \right\}^{\mathrm{T}} & 0\\ 0 & \left\{ b_{y} \right\}^{\mathrm{T}} \\ \left\{ b_{y} \right\}^{\mathrm{T}} & \left\{ b_{x} \right\}^{\mathrm{T}} \end{cases} \begin{cases} u_{n} \\ v_{n} \end{cases} \frac{1}{A} \begin{bmatrix} B_{c} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{n} \\ v_{n} \end{cases} \right\}$$

ここで,

(2.1.9) 
$$\{b_x\}^T = \frac{1}{2}\{y_2 - y_4 \quad y_3 - y_1 \quad y_4 - y_2 \quad y_1 - y_3\} = \int \frac{\partial\{N\}}{\partial x} dA$$
  
(2.1.10)  $\{b_y\}^T = \frac{1}{2}\{x_4 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_4 \quad x_3 - x_1\} = \int \frac{\partial\{N\}}{\partial y} dA$ 

なお,式(2.1.8)で添字 c は要素中心における値であることを示す。以下では,各種の量は要素面積 に関する積分以外は,要素中心における値を表すことは自明であることが多いので,特に必要で ない限り添字を付けずに表す。

#### 2.2 要素剛性マトリックス

1点ガウス積分の長所の一つは、要素剛性マトリックスを作る計算量が少なくてすむということである。また、1点ガウス積分を用いれば、ポアソン比が極端に0.5に近い材料に関しても要素剛 性マトリックスを作ることができる。実際、単精度計算でもv=0.49999程度ならほとんど問題なく 剛性マトリックスを作ることができる。2点以上のガウス積分ではポアソン比が0.5に近くなると 数値計算の誤差が多く、このような計算は出来ない(Zienkiewicz)。このことは、非排水条件に おける解析をする際に重要となる。

仮想変位{δu<sub>n</sub>}に対する仮想仕事式は,式(2.2.1)のようになる。

(2.2.1)  $\{\delta U_n\}^{\mathsf{T}} \{f_n\} = \int \{\delta \varepsilon\}^{\mathsf{T}} \{\sigma\} dA = A \{\delta \varepsilon_c\}^{\mathsf{T}} \{\sigma_c\} = A \{\delta U_n\}^{\mathsf{T}} [B_c] \{\sigma_c\}$ 式(2.2.1)が任意の $\{\delta u_n\}$ に対して成立する条件に,式(2.1.6)と式(2.1.8)を代入すると,節点外力 $\{f_n\}$ と節点変位 $\{U_n\} = \{\{u_n\} = \{v_n\}\}$ の関係は,式(2.2.2)となる。

(2.2.2)  $\{f_n\} = A[B_c]^T [D_c] [B_c] \{U_c\}$ 

すなわち、剛性マトリックス[K]は、式(2.2.3)となる。

 $(2.2.3) \qquad [K] = A[B_c]^T [D_c] [B_c]$ 

### 2.3 砂時計モード

先ず,基本的な変位に関連し,式(2.3.1),(2.3.2)の二つのベクトルを定義する。その意味は,後 に明らかになる。

(2.3.1)  $\{s\}^{\mathsf{T}} = \{1 \ 1 \ 1 \ 1\}$  : 剛体モード変位

(2.3.2)  ${h}^{T} = {1 -1 1 -1} : 砂時計モード$ 

ここで定義された二つのベクトルと、既存のベクトルとは、次のような関係がある。

(2.3.3)  $\{s\}^{\mathsf{T}}\{h\} = \{s\}^{\mathsf{T}}\{b_x\} = \{s\}^{\mathsf{T}}\{b_y\} = 0$ 

(2.3.4)  $\{h\}^{\mathrm{T}}\{b_x\} = \{h\}^{\mathrm{T}}\{b_y\} = 0$ 

# さらに、節点座標 (x 座標: $\{x_n\}$ , y 座標 $\{y_n\}$ )と前述の $\{b_x\}$ , $\{b_y\}$ との関係は次のようになる。

(2.3.5)  $\{x_n\}^{\mathsf{T}}\{b_n\} = \{y_n\}^{\mathsf{T}}\{b_n\} = A$ 

(2.3.6)  $\{x_n\}^{\mathsf{T}}\{b_n\} = \{y_n\}^{\mathsf{T}}\{b_n\} = 0$ 

これまでにも述べたように、1点ガウス積分では、要素中心の値しか使わない。つまり、1点ガ ウス積分では要素全体の状態を、要素中心の値を基にし、変位が線形に変化するという仮定で求 めるわけである。いま、変位を例にとってみると、4節点要素では、各節点に x、y 方向の変位の 自由度があるので、合計8の自由度がある。つまり、要素の変形状態を8つのパラメータで表して いる。これと変形との関係を見ると、まず、要素のひずみ状態に影響を与えない変形として x、y 方向への剛体移動と回転の3つの自由度がある。また、要素中心の3つのひずみの1次結合として表 される3つの自由度の変形がある。したがって、要素の変形を表すのに6つの自由度がある。これ は、要素の持っている自由度8に対して二つ少ない。つまり、二つの変形を表すことが出来ないわ けである。

例として,長方形の要素を考える。図2.3.1に示す変形モードのうち上の3つの場合は,要素中心に応力が生じ,それぞれ*ε*, *ε*, *Ky*.に対応している。これに対し,下二つの変形モードに関しては要素中心ではひずみは生じない。つまり,このような変形対しては要素は剛性を持たないので,解析が不安定になることがある。このような不安定現象を砂時計不安定という。



図2.3.1 要素中央に応力を生じる変形(上段)と生じない変形(下段)

上では、一つの要素で要素中心に応力を生じさせない変形パターンを説明したが、実際の解析 では多くの要素があり、その中で各要素の応力を変化させず図2.3.1の様な変形が生じるには、次 のような変形パターンとなることが普通である。これより、砂時計変形モードの意味は明瞭であ る。

<u> </u>			

図2.3.2 砂時計モード変形の系としての表れ方

この形から、このような不安定現象を、砂時計不安定現象(hourglass instability)という。以下では、このような不安定現象を避けるために、抗砂時計マトリックス(anti-hourglass matrix)を導入する手法する。

砂時計モード変形をなくすには、このような変形に対し剛性を持たせればよい。上に示したように、砂時計モード変形には、x 方向に変形するものと、y 方向に変形するものがある。そこで、 $q_x$ 、 $q_y$ を砂時計モード変形に対する一般化ひずみ(generalized strain)、{ $\gamma$ }を砂時計モード変形に関する形状関数(shape function)とする。

- (2.3.7)  $q_x = \{\gamma\}^{\mathrm{T}} \{u_n\}$
- (2.3.8)  $q_{v} = \{\gamma\}^{\mathrm{T}} \{v_{n}\}$

ここで、形状関数{パは、次のように定義する。

(2.3.9)  $\{\gamma\} = \{h\} + \alpha_x \{b_x\} \alpha_y \{b_y\}$ 

 $a_x$ ,  $a_y$  は係数で、その値については次に述べる、他の変位との直交性に関連して決まるものである。

ここで,形状関数{パは,変位が,剛体変位,一定ひずみを生じさせる変位(理由は後述)の場合に,一般化ひずみ q が0となるようなものでなければならない。すなわち, パは,上記二つの変位モードと直交する(すなわち,このような変位が生じたときそれによって砂時計モードの一般化ひずみが生じない)ものでなければならない。以下では,そのことを証明する。

#### 2.4 剛体モードとの直交性

2次元解析では、3つの独立する剛体変位モードがある。それを下表に示す。

	x 方向並進	y 方向並進	回転
$\{u_n\}$	$\{s\}$	{0}	$-\{x_n\}$
$\{\mathcal{V}_n\}$	{0}	$\{s\}$	$\{\mathcal{Y}_n\}$

剛体変位はこれら3つの変位モードの線形結合として,3つの任意定数β<sub>1</sub>,β<sub>2</sub>,β<sub>3</sub>を用い,式(2.4.1) のように与えられる。

(2.4.1)  $\begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases} = \beta_1 \begin{cases} s \\ 0 \end{cases} + \beta_2 \begin{cases} 0 \\ s \end{cases} + \beta_3 \begin{cases} -x_n \\ y_n \end{cases}$ 

x 方向砂時計変位モードとの直交性が成立するためには,

(2.4.2)  $(\{h\} + \alpha_x \{b_x\} + \alpha_y \{b_y\})^{\mathsf{T}} (\beta_1 \{s\} + \beta_3 \{x_n\}) = 0$ 

が任意の $\beta_1$ ,  $\beta_3$ について成立すればよい。なお、回転に関して符号が先の符号と異なるが、これ は後の展開をより簡略にするために行ったものである。いずれにしろ直交性は y 方向の変位に無 関係に成立しなければならないので問題はない。式(2.4.1)が任意の $\beta_1$ ,  $\beta_3$ について成立するために は、次の二つの式が成立する必要がある。

(2.4.3)  $\{h\}^{\mathrm{T}}\{s\} + \alpha_{x}\{b_{x}\}^{\mathrm{T}}\{s\} + \alpha_{y}\{b_{y}\}^{\mathrm{T}}\{s\} = 0$ 

(2.4.4)  $\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} + \alpha_x\{b_x\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} + \alpha_y\{b_y\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} = 0$ 

このうち,式(2.3.3)より,式(2.4.3)は常に成立する。式(2.4.4)では,式(2.3.5),(2.3.6)の関係を用い れば,第3項は0,第2項の内積は*A*である。従って,式(2.4.4)が常に成立するための条件は,式(2.4.5) となる。この際,α,の値に制限はない。

(2.4.5)  $\alpha_x = -\frac{1}{A} \{h\}^{\mathrm{T}} \{x_n\}$ 

同様に、y 方向の砂時計モードと剛体変位が直交するための条件は、 $\alpha_x$ には制限がなく、 $\alpha_y$ に関し、式(2.4.6)となる。

(2.4.6)  $\alpha_{y} = -\frac{1}{A} \{h\}^{T} \{y_{n}\}$ 

従って, x, y 両方向への剛体変位に対して直交しているためには, 砂時計モードに関する形状 関数は, 次の様になる。

(2.4.7) 
$$\{\gamma\} = \{h\} - \frac{1}{A} \left(\{h\}^{\mathsf{T}} \{x_n\} \{b_x\} + \{h\}^{\mathsf{T}} \{y_n\} \{b_y\}\right)$$

剛体回転に関する検算として、 $\beta_1=\beta_2=0, \beta_3=1$ 考えると、

(2.4.8) 
$$q_x = -\{h\}^{\mathrm{T}}\{x_n\} + \frac{1}{A}(\{b_x\}^{\mathrm{T}}\{x_n\}^{\mathrm{T}}\{h\}\{x_n\} + \{b_y\}^{\mathrm{T}}\{y_n\}^{\mathrm{T}}\{h\}\{x_n\})$$

ここで,式(2.4.8)の括弧内の二つの項で,中央部の二つの積 $\{x_n\}^T\{h\}, \{y_n\}^T\{h\}$ はスカラーとなる。 その部分を除いた両端の積は,式(2.3.5),(2.3.6)の関係を用いれば,

(2.4.9)  $q_x = -\{h\}^T \{x_n\} + \{h\}^T \{x_n\} = 0$ となり、確かに直交していることがわかる。

# 2.5 一定ひずみ変位モードとの直交性

一般に n 点ガウス積分は2n-1次式までの関数に関して正解を与える。従って、一点ガウス積分が正解を与えるのは、1次式までである。すなわち、要素内で、変位が直線変化する、またはひずみが一定の場合である。これを式で表すと次のようになる。

(2.5.1) 
$$u = u_c + \frac{\partial u_c}{\partial x} (x - x_c), \quad v = v_c + \frac{\partial v_c}{\partial y} (y - y_c)$$
  
または、節点変位に着目すると、

(2.5.2) 
$$\{u_n\} = \{s\}u_c + \frac{\partial u_c}{\partial x}(\{x_n\} - \{s\}x_c)$$
  
(2.5.3) 
$$\{v_n\} = \{s\}v_c + \frac{\partial v_c}{\partial y}(\{y_n\} - \{s\}y_c)$$

このうち,x方向の変位に関しては、次のようになる。

$$q_{x} = \{\gamma\}\{u_{n}\} = \underline{\{h\}^{\mathsf{T}}\{s\}}u_{c}\frac{\partial u_{c}}{\partial x}\left(\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\} - \underline{\{h\}^{\mathsf{T}}\{s\}}x_{c}\right)$$

$$-\frac{1}{A}\left(\underline{\{b_{x}\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}} + \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\underline{\{b_{x}\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{x_{n}\}} - \underline{\{b_{x}\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}}x_{c}\right)\right)$$

$$(2.5.4)$$

$$-\frac{1}{A}\left(\underline{\{b_{y}\}^{\mathsf{T}}\{y_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}} + \frac{\partial u_{c}}{\partial y}\underline{\{b_{y}\}^{\mathsf{T}}\{y_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{x_{n}\}} - \underline{\{b_{y}\}^{\mathsf{T}}\{y_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}}x_{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\} - \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}=0$$

(注 下線は、積が0であるか、中央2項の積がスカラーでこれを外した両側2項の積が0となるので、結局0となるものである。同様に二重の下線は、両側2項の積が面積 A となる。また、 $\{h\}^{T}\{x_n\}$ はスカラーであり、 $\{x_n\}^{T}\{h\}$ と等しい。)

同様に,  $q_y=0$ も証明できる。従って,一定ひずみモードに関しても{ $\gamma$ }は直交していることが証明された。

### 2.6 砂時計変形モードによる剛性マトリックス

先に一般化ひずみを定義した。これに対する一般化応力は次のように定義される。

 $(2.6.1) \qquad Q_x = c_x q_x \quad Q_y = c_y q_y$ 

ここで、 $c_x$ 、 $c_y$ は比例係数である。さらに、砂時計変形による等価節点力を $\{f_H\}$ とする。砂時計変形に関する仮想仕事式は次のようになる。

(2.6.2)  $\{\delta u_n\}^{\mathsf{T}}\{f^{\mathsf{H}}\} = \delta q_x Q_x + \delta q_y Q_y = \{\delta u_n\}^{\mathsf{T}}\{\gamma\}c_x\{\gamma\}^{\mathsf{T}}\{u_n\} + \{\delta v_n\}^{\mathsf{T}}\{\gamma\}c_y\{\gamma\}^{\mathsf{T}}\{v_n\}$ すなわち、砂時計変形モードに関する剛性マトリックス[*K*<sub>H</sub>]は次のようになる。

(2.6.3) 
$$\{f^H\} = \{K^H\} \begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases} = \begin{bmatrix} c_x \{\gamma\}^T \{\gamma\} & 0 \\ 0 & c_y \{\gamma\}^T \{\gamma\} \end{bmatrix} \begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases}$$

また,明らかなように,砂時計変形に関する一般化応力と要素の等価節点力に関する関係は, 次のようになる。

(2.6.4)  $\{f_x^H\} = \{\gamma\}Q_x, \{f_y^H\} = \{\gamma\}Q_y$ 

# 2.7 砂時計変形モードに関する係数の決定

砂時計変形に関し、その一般化ひずみと一般化応力を結び付ける係数 *c<sub>x</sub>*, *c<sub>y</sub>*の大きさは、どの様なものであろうと、それ以外の一般の FEM 定式化を行った結果に影響することはない。従って、その大きさは全く自由である様に見える。しかし、その値は自由にとることはできない。



図2.7.1 基本となる長方形要素

まず、図2.7.1に示すような長方形を考える。この時には、 $\{h\}^{T}\{x_n\}=\{h\}^{T}\{y_n\}$ となるので、 $\{\gamma\}=\{h\}$ である。節点変位として $\{u_n\}$ を図2.7.1に示すような大きさ $\delta$ の砂時計モードをあたえる。すると、

(2.7.1) 
$$q = \{\gamma\}^r \{h\} = \{1 -1 \ 1 -1\} \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{cases} \delta = 4\delta$$

となる。一方,等価節点力の大きさをfとすると,仕事式は次のようになる。 (2.7.2)  $\{u_x\}{f^{H}}=Q_xq_x$ 

または,

(2.7.3) or  $4f\delta = Q \cdot 4\delta$ 

すなわち, *f=Q* である。これらが, 図2.7.1に示されている。

さて,長方形要素について,砂時計モードの形状を見ると,はりの純曲げ問題と等価であることがわかる。従って,ここでは,モーメントー曲率関係より *c* の値を求めることを考える。すなわち,

 $(2.7.4) \qquad M = EI\kappa$ 

の関係が成立するように Q=cq 関係の係数を決めるわけである。

曲げ変形に関し、次の式が成立する。

 $(2.7.5) \qquad M = Q \cdot 2b$ 

(2.7.6) 
$$I = \frac{1}{12} (2b)^3 = \frac{2}{3} b^3$$

 $(2.7.7) \qquad \delta = \kappa ba$ 

これらをモーメントー曲率関係式に代入すると、次式を得る。

(2.7.8) 
$$Q = \frac{bE}{3a}\delta = \frac{bE}{3a}q \text{ or } c = \frac{bE}{12a}$$

ここで, E は通常の問題(平面応力)では材料のヤング係数であるが, 平面ひずみ問題では次のようになる。

(2.7.9) 
$$E = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \frac{4\mu(3B + \mu)}{3B + 4\mu}$$

ここで、*λ*、*µ*はラメの定数、*B*は体積弾性係数である。

次に,一般的な四辺形要素について考える。四辺形要素では,長方形要素で行ったように簡単 には*a*,*b*を定義できない。そこで,これに対応する平均的な量を定義することにする。

長方形要素では、次の関係がある。 (2.7.10)  $\{b_x\} = \{-b \ b \ b \ -b\}^{\mathsf{T}}$ (2.7.11)  $\{b_{y}\} = \{-a \ a \ a \ -a\}^{T}$ すなわち. (2.7.12)  $\{b_x\}^{\mathsf{T}}\{b_y\}=(2b)^2$ (2.7.13)  $\{b_y\}^{\mathrm{T}}\{b_y\}=(2a)^2$ (2.7.14)  $\{b_{y}\}^{T}\{b_{x}\}=\{b_{x}\}^{T}\{b_{y}\}=0$ この関係をそのまま利用する。すなわち, (2.7.15)  $c_x = \frac{bE}{12a} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\{b_x\}^T \{b_x\}}{\{b_y\}^T \{b_y\}}}$ (2.7.16)  $c_y = \frac{aE}{12b} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\{b_y\}^T \{b_y\}}{\{b_y\}^T \{b_y\}}}$ 

(注) 異方性がある場合にはそれぞれの方向に関して考慮すればよい。

砂時計変形に関しては体積変化は生じないので、水の存在を考える必要は無い。前の節で示し たように、STADAS では非排水状態でも土の挙動は骨格の挙動と水の挙動を別に分けて考えてい るので、水の挙動を考える必要はないが、式(1.4.21)を使うのであれば見かけの体積弾性係数を非 排水状態に対して使う必要がある。

### 2.8 三角形要素

次のような要素を考える。



図2.8.1 三角形要素への移行を考える例題

(2.8.1) 
$$\{b_x\}^{\mathsf{T}} = \frac{\{-2b \ 2b \ 2b \ -2b\}^{\mathsf{T}}}{2}$$
  
(2.8.2)  $\{b_y\}^{\mathsf{T}} = \frac{\{-2a \ -\alpha \ 2a \ \alpha\}^{\mathsf{T}}}{2}$ 

従って,

(2.8.3) 
$$c_x = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{4b^2}{(\alpha^2 + 4a^2)}}{2}$$

 $\alpha=0$ のとき、

 $c_x = \frac{E}{12}\sqrt{\frac{2b}{a}}$ (2.8.4)

このことは、三角形要素についても砂時計剛性があるように感じられる。しかし、次の考察によ りそのことは正しくないことが分かる。

今, *y*<sub>3</sub>=*y*<sub>4</sub>, *x*<sub>3</sub>=*x*<sub>4</sub>となる三角形要素を考える。簡単な演算により次の式が得られる。

 $(2.8.5) \qquad \{h\}^{\mathrm{T}}\{x_n\} = x_1 - x_2$ (2.8.6)  $\{h\}^{\mathrm{T}}\{y_n\} = y_1 - y_2$ 従って、形状関数は次のようになる。  $\{\gamma\} = \begin{cases} 1\\-1\\1\\-1 \\ \\ 1\\-1 \\ \end{cases} - \frac{1}{2A} \left( (x_1 - x_2) \begin{cases} y_2 - y_3\\y_3 - y_1\\y_3 - y_2\\y_1 - y_2 \\ \\ y_2 - y_3 \\ \\ y_3 - y_2\\y_1 - y_2 \\ \\ y_1 - y_2 \\ \\ y_1 - y_2 \\ \\ y_1 - y_2 \\ \\ x_1 - x_3 \\ \\ x_1 - x_2 \\ \\ x_1 - x_3 \\ \\ y_1 - y_2 \\ \\$ (2.8.7) ここで,

 $2A = x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 - y_1x_2 - y_2x_3$ (2.8.8)であることに注意すると,

$$(2.8.9) \qquad \{\gamma\} = \begin{cases} 0\\0\\0\\0\\0 \end{cases}$$

となる。すなわち、三角形要素に関しては、砂時計モード変形に関する一般化ひずみは生じない ことが分かる。

要素形状が四角形から三角形に近づいてきても、先に見たように係数 cx, cy の値は余り変化し ない。しかし、形状関数の値は次第に0に近づいてくる。すなわち、砂時計モードによる節点外力 が生じ難くなっていく。このことは、次第に砂時計変形が全体形の挙動に与える影響に対して効 かなくなってきていることを表している。

なお、当然のことであるが、その定義からして三角形要素では砂時計変形は生じない。

### References

Flanagan, D.P. and Belytschko, T.A. 1981. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. J. Num. Methods in Engn. Vol. 17, pp. 679-706.

Yoshida, N. 1989. Large deformation analysis of liquefaction-inuced large ground displacement by reduced integral method, Proc. 3rd symp. On Comp. Mechanics, Japan Union for Scientists and Engineers, pp. 391-396.

### 3 1次元のモデルに用いられる非線形構成則

# 3.1 基本

STADAS では、多くの非線形の構成則を用いることが出来る。ここでは、それらをいくつかの グループに分け説明する。これらの非線形の構成則は、固体要素の応力--ひずみ関係として用い られる場合とばね要素などのように一般化応力--般化ひずみ関係として用いられる場合がある が、パラメータの物理的な意味が異なるだけで、式としては同じである。したがって、ここでは、 場合によって応力--ひずみ関係として表したり、一般化応力--般化ひずみ関係として表したり しているが、これらに特に意識しているわけではない。どちらも同じものを扱っていると考えて よい。

ここで示す1次元解析用の構成則は、いずれも原則として二つの異なる種類の曲線(直線)から 構成される。図3.1.1にその例を示す。図で、骨格曲線は、処女載荷時の曲線、履歴曲線は処女載 荷、または履歴曲線から除荷、再載荷した後の曲線である。履歴曲線から骨格曲線に戻ることも ある。

履歴曲線を作るには、Masing 則がよく使われる。これは、骨格曲線を、

 $(3.1.1) \qquad \tau = f(\gamma)$ 

と表したとき、点、 $(\gamma_R, \tau_R)$ から除荷したときの履歴曲線を

(3.1.2) 
$$\frac{\tau - \tau_{R}}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_{R}}{2}\right)$$

と表すものである。また、履歴曲線が以前の除荷点を越えたら、以前の骨格または履歴曲線上を 動くという法則もあわせて Masing 則といわれることもあり、このマニュアルでもそのような意味 で用いている。第1編 6.12節に実用的な解説があるので参照されたい。



図3.1.1 骨格曲線と履歴曲線

STADAS で用いている1次元モデルの構成則は次の3つのグループに分けられる。

1) 骨格曲線が数式で与えられていて、履歴曲線に Masing 則を使う。

2) 骨格曲線(割線定数比)と等価減衰比が与えられたモデル

3) 部分線形モデル

以下では、それぞれについて基本的な式を紹介する。

#### 3.2 曲線型の履歴曲線

STADAS では,双曲線モデル<sup>1)</sup>, Ramberg-Osgood モデル<sup>2)</sup>,および Davidenkov モデルの3つの構成則が可能である。これらの骨格曲線は、次式で表される。

(3.2.1) 
$$\delta = \frac{P}{K} \left( 1 + \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^{r-1} \right)$$
 Ramberg-Osgood モデル  
(3.2.2)  $P = \frac{K\delta}{1 + \frac{\delta}{\delta_y}}$  双曲線モデル  
(3.2.3)  $p = K\delta \left( 1 - \left( \frac{\left( \frac{\delta}{\delta_y} \right)^{2B}}{1 + \left( \frac{\delta}{\delta_y} \right)^{2B}} \right)^A \right)$  Davidenkov モデル

これらのモデルでは、骨格曲線より、除荷、再載荷した、履歴曲線は、骨格曲線に Masing 則を 適用して作成する。



# 3.3 履歴特性を改良した応カーひずみ関係(吉田モデル)

# 3.3.1 基本的な考え方

土の非線形特性は、割線剛性  $G_{eq}$  および等価減衰比 h のひずみ依存性として表されることが多い。図3.3.1にその求め方を示す。これについて最も著名なのは Hardin と Drnevich の研究<sup>3)</sup>であり、それぞれ次のように表される。

(3.3.1) 
$$G_{eq} = \frac{G_{max}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}}$$
  
(3.3.2) 
$$h = h_{max} \left( 1 - \frac{G_{eq}}{G_{max}} \right)$$

ここで、等価減衰比hは図3.3.1により定義される。



図3.3.1 割線せん断剛性と等価減衰比の定義

類似の研究はその後も多く行われ、この式が(少なくとも第1近似としては)成立していること が示されている。しかし、3.2項で示したモデルではこの関係を満たすことは出来ない。これは、 Masing 則をそのまま使ったのではこのような非線形挙動を表すことが出来ないこと、すなわち、 実際の材料では Masing 則が成立していないためである。これを改良するために、吉田らは、次の ような方針で応力---ひずみ関係がつくれることを示した<sup>4)</sup>。

このモデル化手法の基本的な考えは次のとおりである。

1) 骨格曲線は、ひずみと応力の関係が離散化された点で与えられていれば、それらを結ぶ適当な 曲線で骨格曲線を表現することが出来る。

2)履歴曲線は、仮想の骨格曲線に Masing 則を適用して求める<sup>5)</sup>。仮想の骨格曲線は、除荷点を通る、Masing 則を適用して得られる等価減衰比が除荷点のひずみの関数として与えられた等価減衰比と等しくなるの二つの条件を満足するように決める。このためには二つのパラメータが必要で、線形を除く全てのモデルをこのような骨格曲線に使うことが出来る。

#### 3.3.2 骨格曲線

骨格曲線としては,前節で示したようなすべてのモデルを使うことが出来る。剛性と減衰が別 に定義できるというモデルと特徴を生かす,次のモデルが標準的に用いられる。

(1) Hardin-Drnevich モデル

Hardin と Drnevich の提案したように,双曲線モデルを用いることもできる(この場合,Hardin と Drnevich の提案式は完全に満たされている)が,プログラムでは Duncan と Chang の提案を取り入れ,骨格曲線の柔軟性を広げる。

- (3.3.3)  $\eta = \frac{\xi}{1 + R_f \xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{R_f}{(1 + R_f \xi)^2}$
- ここで、R<sub>f</sub>は強度を調整するパラメータである。

### (2) 表形式

骨格曲線を表形式で指定する場合には、それを完全に満たす応力-ひずみ関係をつくることが できる。

(3.3.4) 
$$\eta = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} (\xi - \xi_{i-1}) + \eta_{i-1}$$

### 3.3.3 履歴曲線の作成法

提案されたモデル化手法は広い内容を含んでいる。特に,骨格曲線と履歴曲線を別々に定義で きるため,従来履歴挙動には使えなかった骨格曲線も使えることは,モデルの精度をよりあげる ことができる。

骨格曲線については、後に示すこととし、履歴曲線について先に考察する。吉田らの考えに基づけば、履歴曲線は二つ以上のパラメータを持つモデルを利用することができる。計算の簡単化 を考え、履歴曲線の計算に用いる仮想の骨格曲線として双曲線モデルを用いることにする。

仮想の骨格曲線を次のように表したとする。

$$(3.3.5) T = \frac{a\Gamma}{b+\Gamma}$$

ここで,  $T = \tau / \tau_{max}$ ,  $\Gamma = \gamma / \gamma_r$ は, 無次元化された応力とひずみである。なお, 無次元化に用いた分母,  $\tau_{max}$ ,  $\gamma_r$ は, 骨格曲線を定義するための量である。式(3.3.5)に Masing 則を適用すると, 等価減衰比 は次式となる。

(3.3.6) 
$$D = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2(1+X)}{X^2} \right] (X - \ln(X+1) - 1)$$

ここで, *X=I7b* である。したがって, 減衰比が与えられれば *b* の値が求められ, 除荷点を通るという条件を使えば *a* を求めることができる。なお,式(3.3.6)はひずみが小さいところでは丸目の誤差のため正しい計算ができない。そこで, ひずみが小さい間は,

(3.3.7) 
$$\ln(X+1) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \frac{X^3}{5}$$
の関係を利用し、次式で計算することにする。

(3.3.8) 
$$D = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{10} - \frac{2x^4}{5} \right]$$

#### 3.3.4 大小のひずみに対する補間

表形式で与えられた応力-ひずみ関係では, 表の最小値より小さかったり,最大値を超える ひずみが計算上実現されることがある。SHAKE や FLUSH では割線剛性が一定という仮定で計 算を行っているが,図に示すように,特に最大 値を超えるひずみに対してはこの仮定は明らか におかしい。そこで,次のような方針で外挿補 間する。

### (1) 小さいひずみに対する補間

せん断応力に関しては,原点と最初の点を線 形補間するという考えも可能であるが,すると, 接線剛性が *G<sub>max</sub>*にならない可能性もある。応力



とひずみの無次元量η、ξを原点を通り、勾配が1の双曲線は次式で表される。

(3.3.9) 
$$\eta = \frac{a\xi}{a+\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a^2}{(a+\xi)^2}$$

ここで,αは双曲線が最初の点(ξ<sub>1</sub>,η)を通という条件から求められ,次式となる。

(3.3.10) 
$$a = \frac{\xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}$$

ただし、 $\xi_1 = \eta_1$ の時には双曲線ではなく、直線となる。

次に、減衰を考える。例えば安田・山口の提案式では減衰を与える最小ひずみは0.01%である。 これに対応するひずみはしばしば数%となり、最小ひずみにするには大きすぎる。それで、補間 することを考える。動的変形特性を見ると対数軸補間が良さそうに見えるが、実軸で見るとひず みの小さい領域で急激に増加するという傾向となる。それで、線形補間する。

 $(3.3.11) \quad h - h_{min} = \frac{h_1 \gamma}{\gamma_1}$ 

ここで、h<sub>min</sub>は最小ひずみである。

#### (2) 大きいひずみに対する補間

表形式の入力では、一番大きいひずみより大きいところでデータがない。外挿法として次の4 つが考えられる。いずれもデータがない部分を仮定するので、精度が高いとはいえないが、SHAKE や FLUSH の方法に比べれば自然に見える。動的変形特性とせん断強度の間の橋渡しをするための モデルとすれば、④がよい。

# ①双曲線モデル:接線が連続

最後の点での接線が一致するという条件を付ける。

(3.3.12) 
$$\eta = \frac{A\xi}{B+\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{AB}{(B+\xi)^2} = \frac{(A-\eta)^2}{AB}$$

未知数 A, Bは、二つの条件を使うと次式のように求められる。

(3.3.13) 
$$B = \frac{\eta_n}{\xi_n k_n} - \xi_n, \quad A = \frac{\eta_n (B + \xi_n)}{\xi_n} = \frac{\eta_n^2}{\xi_n^2 k_n}, \quad k_n = \frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\xi_n - x_{n-1}}$$

#### ②せん断応力でが一定(完全塑性)

$$(3.3.14) \quad \eta = \eta_n, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

③G が一定(SHAKE タイプ)

(3.3.15) 
$$\eta = \frac{\eta_n}{\xi_n} (\xi - \xi_n) + \eta_n, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta_n}{\xi_n}$$

#### ④双曲線モデル(せん断強度予測)

これまでの三つの方法は、せん断強度に対する考察をしていない。もちろん完全塑性を仮定す るとせん断強度はあるが、明らかに低すぎる。応力-ひずみ関係を双曲線モデルに仮定し、その 値を基準ひずみから求めることは良くあることである。無次元化した状態では、漸近線の値が1 になることであり、最後の点を通るという条件を用いれば、次のようになる。

(3.3.16)  $\eta = \frac{\xi}{A+\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A}{(A+\xi)^2} = \frac{(1-\eta)^2}{A}$ 

ここで,最後の点を通る条件からAの値が求まる。

(3.3.17) 
$$A = \frac{\xi_n (1 - \eta_n)}{\eta_n}$$

次に、減衰を考える。Hardin-Drnevich モデルでは減衰は次のように表される。

(3.3.18) 
$$h = h_{max} \left(1 - \frac{G}{G_{max}}\right) = h_{max} \left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)$$
  
これより、最後の点を通ることにして、仮想の最大減衰を求めると次のようになる。  
(3.3.19)  $h_{max} = \frac{h_n}{1 - \eta_n / \xi_n}$ 

#### 3.3.5 大ひずみを考慮したモデル<sup>6)</sup>

動的変形特性試験で得られる動的変形特性は一定応力振幅の載荷を行い、10サイクル目の履歴 曲線から計算される。しかし、ひずみが大きくなると図3.3.2に示されるように履歴曲線は収束し なくなるし、その形状も小さいひずみで見られる紡錘型から逆S字型に近くなり、等価減衰比も ひずみとともに小さくなる。この現象は、過剰間隙水圧の発生によるものであることは明らかで あるので、この現象を表現するためには有効応力解析によるべきであろう。しかし、これを全応 力解析で表現したいときもある。このモデルはそのためのモデルである。モデルは基本的には吉 田モデルで作成するが、この現象を考慮するため、新しい法則を付け加える。



図3.3.2(b)に見られるように、この領域にはいると応力-ひずみ関係は中央部にスリップ領域を 持つようになる。そこで、動的変形特性で減衰が最大ひずみを越える領域では図3.3.3に示すよう に応力-ひずみ関係を中央のスリップ部と両端の剛性回復部に分離する。剛性回復部は減衰が最 大となったときの履歴曲線とし、スリップ部の高さは大ひずみ領域における減衰が一致するよう に決める。



図3.3.3 大ひずみ時の履歴曲線の分離

この処理だけでは、一定応力振幅の載荷で履歴曲線は定常化し、実験に見られるような劣化現 象は再現できない。そこで、図3.3.4に示すように、図で unload と示された点から除荷が起こった とき、状態点が骨格曲線か、骨格曲線からの最初の除荷曲線を移動中には、図のAやBに対応す る点 A'や B'が移動する(すなわち、第1除荷曲線が移動)という法則を付け加える。



図3.3.4 劣化挙動の考慮法

第一除荷曲線の移動量<sub>γm</sub>は暫定的に次式で与える。

(3.3.20) 
$$\gamma_{\rm m} = \frac{a+\Gamma}{1+\Gamma} \cdot \max(0, \gamma_{\rm c} - \gamma_{\rm d}), \qquad \Gamma = \sum \max(0, \gamma_{\rm c} - \gamma_{\rm d})$$

ここで,*a*は曲線の形状を決めるパラメータ,Γは履歴の蓄積量である。また,<sub>*P*</sub>は状態点が骨格 曲線を動いたひずみの変化量か,第一除荷曲線を動いたひずみの変化量の半分,<sub>*Pa*</sub>は減衰が最大 となったときのひずみである。図3.3.5に小さいひずみと大きいひずみに対する解析例を示す。



# 3.4 折れ線型応カーひずみ関係

STADAS で扱うモデルは、骨格曲線が bi-linear や tri-linear で表される。以下のモデルの使用が可能であり、その法則を以下に示す。なお、勾配が0の第2勾配、第3勾配を持つモデルは扱えない。

(1) Tri-linear 弾性モデル

骨格曲線が Tri-linear で表され、ヒステリシスを描かないモデルである。



(2) Bi-linear モデル 骨格曲線が Bi-linear で、Masing 則に従うモデル。

(3) Tri-linear モデル

骨格曲線が Tri-linear で, Masing 則に従うモデル。



(4) Bi-linear スリップモデル 骨格曲線は、Bi-linear 型である。スリップは第2剛性で生じる。

(5) Tri-linear スリップモデル

骨格曲線は Tri-linear 型である。除荷剛性は初期剛性,また,スリップのとき剛性は0である。



(6) 原点指向モデル

モデルの履歴法則は次のようなものである。

- i) 骨格曲線は Tri-linear である。
- ii) 骨格曲線からの除荷点は、原点を向かう直線上を動く。
- iii) 除荷曲線上で折り返したときは、同じ直線上を戻る。
- iv) 除荷曲線が骨格曲線と交わった後は骨格曲線上を動く。
- (7) 原点・最大点指向モデル
  - モデルの履歴法則は次のようなものである。
- i) 骨格曲線は Tri-linear である。
- ii) 骨格曲線からの除荷は原点に向う直線上を動く。原点を通過した後は、反対側の最大点に向か う直線上を動く。
- iii) 除荷曲線上で折り返した場合は同じ曲線上を戻る。
- iv) 除荷骨格曲線と交わった後は骨格曲線上を動く。



(8) 最大点指向モデル

モデルの履歴法則は次のようなものである。

- i) 骨格曲線は Tri-linear である。
- ii) 骨格曲線からの除荷は、反対側の最大点に向かう直線上を動く。
- iii) 除荷曲線上で折り返した場合は、同じ曲線上を戻る。
- iv) 除荷曲線が骨格曲線と交わった後は骨格曲線上を動く。

(9) Degrading tri-linear モデル (深田<sup>7)</sup>)

モデルの履歴法則は次のようなものである。

- i) 骨格曲線は Tri-linear である。
- ii) 最大変位が dy を越えない間は Bi-linear モデルと同じである。

iii) 正負どちらかで最大変位が dy を越えた後, 骨格曲線から除荷する場合, 剛性低下率 aが,

 $\alpha = \frac{P_1 - P_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\delta_y}{P_y}$   $P_1 = \max(P_{max}, P_y)$   $P_2 = \min(P_{min}, P_y)$   $d_1 = \max(d_{max}, d_y)$   $d_2 = \min(d_{min}, -d_y)$ 

で表される直線上を動く。折り返し点より2P。復元力が変化した位置で除荷曲線は反対側の最大点を向く直線となる。

iv) 除荷曲線より折り返す場合は,除荷点を越えるか,または,骨格曲線に交わるまでは bi-linear である。



- (10) Degrading tri-linear モデル(野村<sup>8)</sup>)モデルの履歴法則は次のようなものである。
- i) 骨格曲線は Tri-linear である。
- ii) 骨格曲線第2線分よりの除荷は、初期剛性で除荷する。除荷曲線は荷重0軸を横切った後、反対 側の最大点(または第1折れ点との大きい方)に向かう直線となる。
- iii) 第2折れ点経験後は、除荷剛性の剛性率aが

$$\alpha_{+} = \left(\frac{\delta_{y}}{\delta_{\max}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{-} = \left(\frac{\delta_{y}}{-\delta_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

で表される以外は、上記と同じである。

- iv) 除荷曲線上よりの逆載荷については, 剛性は前回の除荷時剛性と同じであり, そのほかは上と 同じである。
- (11) Degrading tri-linear モデル (武藤<sup>9)</sup>)

モデルの履歴法則は次のようなものである。

- i) 骨格曲線は Tri-linear である。
- ii) 最大変位が dy を越えるまでは原点指向モデルと同じ法則に従う。
- iii) 第2折れ点を越えた後の除荷剛性は

$$\alpha = \frac{P_y}{\delta_y} \bigg/ \frac{P_c}{\delta_c}$$

で、そのほかは、Degrading tri-linear (野村) と同じである。



(12) Degrading tri-linear モデル (武田<sup>10)</sup>)

モデルの履歴法則は次のようなものである。

i) 骨格曲線は Tri-linear である。

ii) 降伏変位を越えた後の除荷剛性は、剛性低下率を次のように表す。

$$\alpha = \left(\frac{\delta_y}{\delta_{\max}}\right)^r$$

ここで,正負の除荷に対しては,正負側の最大変位を使う。また,原論文では r=0.4である。 iii)除荷後,復元力0に至ると,反対側の最大除荷点を向かう。

# 参考文献

- 1) Kondner, R. L. (1963): Hyperbolic Stress-strain Response; Cohesive Soils, Proc. ASCE, SM1, pp. 115-143 なお、日本では、国生剛治、桜井彰雄(1979): MODIFIED HARDIN-DRNEVICH モデルについて、土木学会第33回年次学術講演会講演概要集、第Ⅲ部門, pp. 1181-1184に基づき、Hardin=Drnevichモデルと呼ぶことも多い。
- Jenning, P. C. (1964): Periodic response of a general yielding structure, Proc. ASCE, Vol. 80, No. EM2, pp.133-166
- Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. (1972): Shear modulus and damping in soils: design equations and curves, Proc. of the American Society of civil engineers, Vol. 98, No. SM7, pp. 667-692
- 4) 吉田望, 辻野修一, 石原研而(1990): 地盤の1次元非線形解析に用いる土のせん断応カー せん断ひずみ関係のモデル化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(中国), pp. 1639-1640
- 5) Ishihara, K., Yoshida, N. and Tsujino, S. (1985): Modelling of stress-strain relations of soils in cycloc loading, Proc. 5th Int. Conf. for Numerical Method in Geomechanics, Nagoya, pp.373-380
- <sup>6</sup>) Yoshida, N., Kiku, H. and Suetomi, I. (1998): Earthquake response analysis under very severe earthquake, Proc. 2nd International Symposium on the Effect of Surface Geology on Seismic Motion, Yokosuka, Japan, Vol. 2, pp. 757-764
- 深田泰夫(1969):鉄筋コンクリート造建物の復元力特性に関する研究(その1) Degrading stiffness tri-linear modelの設定と応答計算,日本建築学会関東支部学術発表会梗概集,第40回, pp.57-62
- <sup>8</sup>) 野村設郎,佐藤和英(1976):地震応答に及ぼす鉄筋コンクリート造復元力特性とそのモデル化の影響(その1),日本建築学会学術講演梗概集,pp.1273-1274
- 9) 武藤清(1977): 耐震設計シリーズ/応用編 構造物の動的設計, 丸善, pp.173-174
- Takeda, T., Sozen, M. A., and Nielsen, N. N. (1970): Reinforced concrete response to simulated earthquakes, J. of Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 96, No. ST12, pp. 2557-2573

### 4 ばね要素

ばね要素の用いられる構成則については、3節で説明したので、ここでは、それ以外の事項を示 す。

### 4.1 ばね要素の作用方向

1次元要素とは、2点間の相対変位(速度)に比例した力を生じるばねである。ところで、2つの 節点が離れている時を考えると、一般的に、ばねが軸方向に作用する場合と、軸直角方向に作用 する場合(せん断ばね)に分ける事ができる。しかし、これらの違いは、作用方向にのみ着目す れば同じ扱いができるようになる。すなわち、解析では、ばねの作用する方向の方向余弦のみを 扱う事で全ての解析ができる事になる。以下では、方向余弦という時には、節点2が節点1に対し て要素座標系で変位の正の方向に動いた方向の、各座標軸方向への正射影をいう事にする。

2次元解析では下図に示すように、x 軸に対して $\theta$ の角度にあるとき、このばねが軸ばねとすれば、方向余弦ベクトル $\{\ell_x \ \ell_y\}^T$ は

(4.1.1)  $\{\ell_x \quad \ell_y\}^T = \{\cos\theta \quad \sin\theta\}^T$ 

と表される。この時引っ張りが正である。方向余弦としてごの逆符号をとれば圧縮が正となる。, 一方せん断ばねとすれば,

(4.1.2)  $\{\ell_x \quad \ell_y\}^T = \{\sin\theta \quad -\cos\theta\}^T$ 

となる。このとき、節点2が左へ動くときが正となる。右へ動くときを正とするのであれば、符号 を逆にする。



回転ばねについては、2次元解析なのでz方向のみを考える。計算方法は通常のばねと同じだが、 自由度番号の入れ方が異なる事と、自由度の数が異なる。

#### 4.2 要素の構成則

ばね定数(粘性係数)をkとすると,要素の一般化応力(ばね力)Fと一般化ひずみ(相対変位)uの関係は次のようになる。

(4.2.1) F=ku

#### 4.3 座標変換マトリックス(Bマトリックス)

節点変位と、一般化ひずみの関係を求める。一般化ひずみは節点変位により次のように表される。

(4.3.1)  $u = u_2 - u_1 = \{-1 \ 1\} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$ 

方向余弦ベクトルを{T}と表す。

(4.3.2) {*T*} = {{1} one dimensional { $\ell_x \ \ell_y$ } two dimensiona { $\ell_x \ \ell_z \ \ell_z$ } three dimensiona すなわち、3次元では、次のようである。 (4.3.3)  $u_1 = {T}{u_1} = {T}{u_{x1} \ u_{y1}}, u_2 = {T}{u_2} = {T}{u_{y2} \ u_{y2}}$ また、式(4.3.3)を一つにして、次のように書く。 (4.3.4)  ${u_1 \ u_2} = {T}{u^n} = {T}{0} [{T} \ {0} \ {T}]{u_1}$ すなわち、Bマトリックスは、次のように表される。 (4.3.5)  $[B] = {-1 \ 1}[T] = {-{T} \ {T}}$ 

### 4.4 剛性マトリックス

 ${T}は、方向余弦ベクトルであるので、次の性質がある。$  $(4.4.1) <math>{T}{T}^{T} = 1$ したがって、 (4.4.2)  ${B}{B}^{T} = 2$ 

また、{B}マトリックスの定義から、次の式が成立する。

 $(4.4.3) u = \{B\}\{u_n\}$ 

 $(4.4.4) \qquad \{F_n\} = \{B\}^{\mathrm{T}} F$ 

- これより,系の座標軸系における節点力一節点変位関係は次のようになる。 (4.4.5)  $\{F_x\}=\{B\}^{\mathsf{T}}k\{B\}\{u_x\}$
- すなわち,要素剛性マトリックス[k]は,次式となる。 (4.4.6)  $[k] = \{B\}^{T} k\{B\}$

### 4.5 構成則

ばね要素で用いられる構成則は、3章で示しているので、それを参照されたい。

# 4.6 自由地盤との結合

ばね要素およびダッシュポット要素は、1端が自由地盤と結合されることがある。ここで、自由 地盤とはその挙動は対象部分に影響を与えるが、対象部分の挙動は自由地盤の挙動に影響を与え ない地盤である。

自由地盤の大きさを対象部分に比べて十分大きくとることにすれば、このようなケースでも何 の問題もなく解くことが出来る。しかし、あまりに大きくしすぎると数値計算上の誤差を発生し やすくなる。一方、小さすぎると自由地盤の挙動が影響を受けてしまう。

STADAS では、このようなケースに備え、1端が自由地盤に結合されている扱いが可能なケース も用意している。今、簡単のために剛性関係を次のように表したとする。

(4.6.1) 
$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

ここで、1端が自由地盤と結合されているとする。すると、このばねに応力が作用したとき、2端 には力が発生するが、1端には力が生じない。この関係を書くと、次のようになる。

(4.6.2) 
$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

従って、剛性マトリックスは非対称となる。また、当然であるが、不釣合力の計算の際、1端では ばねによる応力を考慮しない必要がある。

# 5 はり要素

# 5.1 基本理論

はり要素は、微小変形理論に従うものとする。 ①断面形状は変化しない。 ②平面保持+せん断変形 ③中間荷重はない。 全体座標系との関係は、次のように表される。

- (5.1.1)  $\{F\} = [T]\{F_g\}$
- $(5.1.2) \qquad \{u\} = [T]\{u_n\}$
- (5.1.3)  ${K_g} = [T]^{\mathsf{T}} [K][T]$

ここで、 $\{F_g\}$ ,  $\{u_n\}$ ,  $[K_g]$ は全体座標系で表した節点力、変位、および剛性マトリックス、 $\{F\}$ ,  $\{u\}$ , [K]は局所座標系における節点力、変位、および剛性マトリックス、[T]は座標変換マトリックスである。



# 5.2 2次元解析

2次元解析では、前節の各量は次のように表される(図5.1.1参照)。

$$(5.2.1) \qquad \{F\} = \begin{cases} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{cases}, \quad \{u\} = \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{cases}, \quad \{F_g\} = \begin{cases} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x1} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{bmatrix}, \quad \{u_n\} = \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

u:軸方向変位

- v: 軸直角方向変位
- $\theta$ :節点回転角

*x*, *y*:*x*, *y*方向変位

添え字1,2は節点に関する量

(5.2.2) 
$$\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_e \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ T_e \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5.2.3) \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix}$$

ここで,

N:軸力(引っ張りが正) Q:せん断力 M:曲げモーメント E:ヤング係数 G:せん断定数 A:断面積  $A_s:有効せん断断面積$ I:断面二次モーメント  $\ell:材長$  $\phi = \frac{12EI}{GA_s \ell^2}$ 

# 5.3 3次元解析

参考として3次元解析のケースも示す。簡単化のため、一方の節点の成分のみに着目すると各量 は次のように表される。

$$\{F\} = \begin{cases} N_1 \\ Q_{s1} \\ Q_{s2} \\ T \\ M_{s1} \\ M_{s2} \end{cases}, \quad \{F\} = \begin{cases} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} T \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_1 \end{bmatrix}, \quad [T_1] = \text{full matrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI}{\ell(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_y)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI}{\ell(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \end{bmatrix}$$

3次元の場合には、方向余弦ベクトルによる補正以外に、β角による補正も必要である。ここで、 β角は、次のように定義される。したがって、2次元解析ではβ=0である。

# 5.4 非線形の考慮

はり要素では、通常のFEM要素と異なり、一般化応力(軸力、せん断応力、曲げモーメント) は独立していないので、非線形を考慮するには少し考慮が必要である。STADASでは、幾つかの オプションを用意している。

モーメントに関して完全弾塑性挙動を仮定するのであれば、塑性化の発生するのは両材端のみ であり、両材端に発生する塑性ヒンジを考慮することで考慮することが可能である。この様な理 論には、単純塑性ヒンジ、流れ則を考慮した塑性ヒンジがある(例えば文献1)。しかし、完全塑 性挙動は多くの場合歓迎されないし、式も必ずしも簡単とは考えられない。また、有限要素法の 考えに基づくのであれば、そこまでの厳密さを要求する必要もないかもしれない。そこで、ここ では、もう少し簡単な扱い方を示す。

### 5.4.1 曲げ変形とせん断変形の分離

前節では、はり要素に関する剛性マトリックスを示した。そこでは、軸力と残りの成分が独立 に評価できることは剛性マトリックスのそれぞれに対する相互作用項がないことから独立して考 えられることは明らかである。ただし、降伏条件に関しては曲げと軸力の相互作用はあるが、こ れについては後に示す。

そこで、曲げとせん断に関する項を考える。剛性関係は次のように書けた。

$$(5.4.1) \quad \begin{cases} Q_{1} \\ M_{1} \\ Q_{2} \\ M_{2} \end{cases} = [K] \begin{cases} v_{1} \\ \theta_{1} \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = [K] \begin{cases} v_{1} \\ \theta_{1} \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} K \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} K \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & -\frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ \frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Q:せん断力

- M:曲げモーメント
- *E*:ヤング係数
- G: せん断定数
- A:断面積
- As: 有効せん断断面積
- I:断面二次モーメント

ℓ:材長

$$\phi = \frac{12EI}{1}$$

- $\rho = \overline{GA_s\ell^2}$
- v:軸直角方向変位
- θ:節点相対回転角

ここで,要素剛性マトリックス[K]を次の二つの成分に分ける。

$$(5.4.2) \quad [K] = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} + \frac{12EI}{\ell^2(1+\phi)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \end{bmatrix}$$

ここで、右辺第一項は図5.4.1(a)に示した等モーメント成分による変形、第二項は(b)に示した逆モ ーメント成分による変形を表している。第二項はせん断変形による成分ということも出来る。そ のことを分かりやすくするために、第二項の係数に上で示した¢の定義式を代入すると次式となる。

$$M_{e}$$
(a) 等モーメント  
(b) 逆モーメント  
図5.4.1 モーメントとせん断変形の分離  
(5.4.3) [K] = EI  

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} + \frac{GA_{g}\phi}{1+\phi} \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \end{bmatrix}$$
  
すなわち、各一般化応力成分は次のように書くことが出来る。  

$$M_{e} = EI\kappa = EI \frac{\theta_{1} - \theta_{2}}{\ell}$$

(5.4.4) 
$$Q = GA_s \cdot \frac{\phi}{1+\phi} \left\{ \frac{u_1 - u_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right\}$$
$$M_s = Q\ell$$

ここで、 $\kappa$ は平均曲率である。また、せん断応力 Q に関する項では、第一項は軸直角方向への変位、第二項は要素全体の回転量を表している。これにより、モーメントによる変形とせん断変形を分離することが出来た。なお、せん断変形を考慮しない場合( $A_s=\infty$ )には $\phi=0$ となるので、上式からは計算できない。この場合には、元に戻って、次式を使う必要がある。

(5.4.5)  $GA_{s} \cdot \frac{\phi}{1+\phi} = \frac{12EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \quad \text{Fight,} \quad Q = \frac{12EI}{\ell^{2}} \left\{ \frac{u_{1} - u_{2}}{\ell} + \frac{\theta_{1} + \theta_{2}}{2} \right\}$ 

さらに、せん断に関する扱いに注意が必要である。式(5.4.5)では、図5.4.1(b)に示すように曲げ 変形も含んだ形である。つまり、式(5.4.5)の *GA*。をせん断に関する剛性と考えて非線形の程度に応 じて接線剛性を変えるとすれば、部材全体としての軸直角方向に対する挙動をイメージしている ことになる。このような考え方はもちろん一つの捉え方であろうが、もう一つの考え方として、 純せん断変形に対してのみ非線形を考えるという事も考えられる。

純せん断成分に対しては、せん断応力ーせん断ひずみ関係は次のように与えられる。

(5.4.6) 
$$Q = GA_s \cdot \frac{u_1 - u_2}{a}$$

STADAS では、これに対して非線形挙動を与える。すると、モーメントに対しても軸直角方向の 変形も考慮する必要がある。

#### 5.4.2 部材の挙動を1点で代表させる方法

まず,曲げによる非線形は部材全体にわたって均等に発生すると考える。または,部材の剛性 が材中央の挙動で代表されると考える。部材の平均曲率 k は次式で表される。

(5.4.7)  $\kappa = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell}$ 

ここで,非線形挙動が発生した時を考える。簡単のために,図5.4.2のように部分線形挙動の途中で非線形挙動が起こったとする。ここで,A点が増分前の値,*M*<sub>t</sub>は次回増分時の外力である。 すると,B点が外力から来たモーメント,C点が真の位置で,*Mu*が不釣合力となる。


図5.4.2 不釣合力発生時の状況



実計算で,増分弾性を仮定し,両材端で *M<sub>A</sub>*, *M<sub>B</sub>*のモーメントが得られたとする。すると,部 材中央におけるモーメント *M<sub>C</sub>*は次のようになる。

(5.4.8)  $M_C = \frac{M_A + M_B}{2} = EI\kappa = M_u + M_R$ 

すなわち,このモーメントは,平均曲率と増分計算時の曲げ剛性の積で得られるものと同じである。また非線形により不釣合力が発生した場合は,図5.4.2を参照すると,不釣合モーメント *M*<sub>u</sub> と残留モーメント *M*<sub>R</sub>の和で表される。

このうち,不釣合モーメント M<sub>u</sub>は再配分される必要がある。これに際して,両材端のモーメントも残留値と不釣合力に分ける必要がある。すなわち,各節点で不釣合モーメント M<sub>u</sub>を引いたものを残留値とする。

# (5.4.9) $M_{AR} = M_A - M_u$

$$M_{BR} = M_B - M_u$$

そして, *M<sub>u</sub>*を両節点に不釣合力として加えるわけである。この状況は図5.4.3に示されている。 この方法は, 次のような長所と短所を持っている。

- ①中間荷重を考えていないから、モーメントの最大値は当然部材端部で発生する。これに対して 平均曲率(材中央の曲率)を非線形性を表す代表値としているのであるから、端部の値で見る と若干の誤差が発生する。
- ②逆モーメントが作用しても、平均曲率は0である。つまり、非線形の効果は現れない。従って、 フレームにおけるはりや柱を一つの要素としてモデル化することは、非線形挙動を評価する上 で、非常に誤差が大きくなるので、実質的に用いることが出来ない。部材の長さは、この誤差 が挙動に影響ない程度に短くする必要がある。
- ③図5.4.3で見るように、不釣合力は自己釣合系である。つまり、せん断応力には影響を与えない。 従って、もし、せん断変形に関する非線形を考慮するのであれば、モーメントとは独立に行う

ことが可能である。

一方, STADAS では,部材中央のモーメントー曲率関係は出力されない。出力は両材端で行われる。従って,得られた値から両材端の値を求める必要がある。モーメントに関しては既に示した。曲率に関しては,曲率の変化が線形であるとして計算すれば求めることが出来る。

従って,非線形挙動を代表させるモーメント曲率関係を求めたいのであれば,次のような処理 をする必要がある。

(5.4.10)  $M_c = (M_2 - M_1)/2$ ,  $\kappa_c = (\kappa_2 - \kappa_1)/2$ ここで、1端のモーメントは系とすれば負の方向を正としているので、上式は平均値を求めている ことに注意されたい。

建築構造物では、上部構造を一本のはり要素にモデル化する事がある。この場合には、二つの 端部の内、下方の方がモーメントの値は大きくなるのが普通である。この場合には、非線形挙動 を代表させる断面を部材中央に設定するのではなく、危険断面に設定することで、降伏モーメン トを正しく評価することは可能になる。すなわち、二つの部材端の内、一方の挙動で部材の非線 形性を代表させるのである。この場合には、曲率の求め方は次項で示すものを使うことになるが、 その他の方法はこれまでの扱いと同じである。

#### 5.4.3 仮想曲率を用い両端の非線形を考慮する方法

前項で述べた方法は、一断面の挙動で部材の非線形性を代表させた。このため、非線形を考慮 に際し式が扱いやすくなっていた。しかし、両部材端のどちらが危険断面になるか分からないと いうケースは一般的であろう。また、平均曲率を用いる方法では、逆モーメントが作用するとき には材長を短くとらないといけないという実用上の欠点もある。

これらの欠点を解消するには,両部材端で非線形挙動を考慮すればよい。しかし,この場合に は、曲率は平均曲率の様には単純には求まらない。その解決として、事項に示す塑性ヒンジ法に よる方法もあるが、ここではもう少し簡単な方法を考える。

前述の図5.4.4と同じ状況を考える。すなわち、Aが増分前の状態で、線形増分を仮定した増分 計算ではB点が解として得られているとする。

前項の方法では,非線形解析に適用すべき曲率 κ<sub>1</sub>として平均曲率を式(5.4.7)で求めたわけである。 しかし,両材端で独立に非線形を考慮するとなると,このような外的な変形から必要な曲率を求 めることは出来ない。そこで,次のように考える。

A 点における接線剛性に増分外力を与えると、状態点は B に移行する。このとき、モーメント 増分Δ*M* に対応する曲率増分はΔ*κ*である。つまり外的に与えられたモーメント増分から曲率増分 を求めることが出来るわけである。この曲率が物理的に何を表しているのかは明瞭ではないが、 弾塑性変形が可能な材端部付近の有限長を代表する塑性ヒンジの曲率と考えてよいと考えられる。



図5.4.4 不釣合力発生の状況

この考えを両材端に適用することで、両端の非線形を考慮することが出来る。このときの残留 モーメントと不釣合力の関係を模式的に図5.4.5(a)に示す。ここでは、前項と異なり、左右の不釣 合モーメントが異なるので、不釣合力の配分には注意が必要である。すなわち図5.4.5に示すよう に両端の不釣り合い力を等モーメントと逆モーメント成分に分割する。等モーメント成分につい ては前項と同様そのまま作用させる。しかし、逆モーメント成分ではそれだけでは自己釣合系に はならないので、対応するせん断応力 *Q*<sub>u</sub> も作用させる必要がある。



これまでに示したのは、不釣合力の考慮方法であり、剛性マトリックスの作成方法については 述べていない。単純化するために、両端で求められた接線剛性の平均を部材の剛性として用いる ことにする。

## 5.4.4 せん断に関する非線形

せん断に関する非線形の扱いは、他の非線形と変わることはない。しかし、せん断応力に対す る不釣合力は部材に偶力を発生させるので、自己釣合系とするためにこれに釣り合うモーメント も作用させる必要がある。モーメントは1端と2端で持てばよいので、STADAS では両方で同じ値 を不釣合力として持つようにしている。

#### 5.4.5 曲げと軸力の相互作用

次項で述べる塑性ヒンジ法では、曲げと軸力の相互作用は自然に考慮されている。しかし、園 で述べるが、降伏局面と硬化則を実用に使うのと同じ要領で定義することは困難そうである。そ こで、ここではもう少し簡単な方法を検討する。

簡単のために、Tri-linear型のモーメントー曲率関係を考える。ここで、図5.4.6に示すように、

第二折れ点が終局状態,第一折れ点は図では降伏状態に対応しているとしている。ただし,第一 折れ点は条件の与え方によってはひび割れ状態に対応させる等の設定も可能である。これらは入 カデータでコントロールする事になる。



図5.4.6 軸力変動に伴う骨格曲線の移動

今,軸力が N<sub>a</sub>の状態から Nb の状態に移行したとする。軸力 N<sub>a</sub>の本では折れ点の座標は B, C である。ここで,第二線分と第三線分の勾配は初期剛性に対する比で与えられており,軸力の大 きさによって変わらないものとする。すると,新しい軸力下では第一折れ点の位置 D は初期剛性 と第一折れ点は初期剛性とモーメントより決まる。線分 DE は BC と平行であり,E 点のモーメン トは終局モーメントの値から決めることが出来る。すなわち,軸力変動下における骨格曲線を決 めることが出来る。

なお、軸力の値によっては第一折れ点が定義できないが、その場合には、tri-linear モデルの第 三勾配を第二勾配とする bi-linear モデルを用いることにする。

次に、除荷、再載荷時の挙動を考える。簡単のため図5.4.7に示すように、軸力が N<sub>a</sub>の下で0→A →Bとひずみが変化し、その後軸力が Nb に変化すると同時に曲率増分∆*k*が発生した時を考える。

例えば、最大点志向モデルのような特定のモデルを用いるのであれば、軸力変動を考慮することは余り難しくない。すなわち、B 点から新しい骨格曲線によって定義される最大点を向かう直線式を作ればよい。しかし、STADAS では多様なモデルを用いることが出来、そのそれぞれに対して別の法則を考えることは大変な作業となる。また、例で示した最大点志向モデルでも、終局モーメント付近の状態から軸力が増加すると志向点のモーメントが現在のモーメントより小さくなり、勾配が負になる等の問題も発生する可能性がある。

これらの困難を避けるために、STADAS では、次のような履歴法則を用いる。すなわち、新しい軸力 *N<sub>b</sub>*の下で、これまでと同じ曲率履歴をたどったとするわけである。すると、新しい軸力 Nb の下では状態 B に相当する状態は D である。これに対して曲率変動を与えれば、新しい状態 点 E がえられる。従って、この増分により状態点は B から E に移行するわけである。

この履歴法則を用いると、これまでの除荷点を記憶しておく必要があり、メモリーサイズが多 く必要となるが、代わりに安定して履歴が終えるという特徴がある。



図5.4.7 軸力変動時の履歴曲線の追跡

# 5.4.5.1 塑性ヒンジ法による解析

最大モーメントが端部にしか発生しないということを考えると、この点で塑性ヒンジが発生す ると考える解析が可能である。ただし、塑性ヒンジは、完全弾塑性下の条件で適用するのであれ ば、物理的な整合性はあるが、ひずみ硬化を考慮するとすれば、塑性域は材端のみならず、材中 央部にも及ぶので、物理的な整合性があるとはいえない。しかし、この場合でも、単なる仮定と して塑性化は材端部にしか発生しないと仮定することで、計算を続けることは出きる。

塑性ヒンジを使う理論には、塑性流れ則を考慮した弾塑性論として厳密な塑性ヒンジ理論と、 流れ則を考慮しない単純塑性ヒンジ理論がある。前者は、軸力の存在により曲げに伴って中立軸 が重心軸よりずれることによる重心軸における軸方向の伸縮を考慮したものであり、繰返し履歴 を扱う際には重要な挙動を示すことがある。

実務では、軸力変動による影響を考慮する、モーメントー曲率関係の非線形を Tri-linear にモデル化するなど、モーメントー曲率関係は単純なモデル化も行われる。すると、弾塑性論に基づく降伏局面の変化は相当に複雑なものとなる。従って、ここでは、単純塑性理論を用いることにする。



材端に塑性ヒンジが発生したとすると、図5.4.8(a)に示したように、塑性ヒンジ部では曲率とは ヒンジの回転角である。そこで、部材を図5.4.8(b)に示すように材端部と中央部の三つに分ける。 図では材端部は有限長の長さで書かれているが、実際には材端部には長さはない。

各三つの部分の釣合式はそれぞれ次のようになる。ここで、ヒンジ部ではせん断変形は発生しないとする。なお、各節点については添え字A, B, 1, 2をつけて位置が分かるようにする。また、ここでは、軸力の効果は考えないので、式の展開からは除くことにする。

左のヒンジ $M_A = K_A(\theta_A - \theta_1)$ 

中央部 
$$\begin{bmatrix} Q_A\\ M_A\\ Q_B\\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A\\ \theta_1\\ \theta_2\\ \theta_2\\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 & -C_1 & C_3\\ C_3 & C_2 & -C_3 & C_4\\ -C_1 & -C_3 & C_1 & -C_3\\ C_3 & C_4 & -C_3 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A\\ \theta_1\\ \theta_2\\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

右のヒンジ $M_B = K_B(\theta_2 - \theta_B)$ 

これより,節点1,2の変数である6と6を消去すれば剛性関係が得られる。 計算のため書き下すと次のようになる。

$$\begin{split} \theta_{1} &= -\frac{M_{A}}{K_{A}} + \theta_{A} \\ Q_{A} &= C_{1}y_{A} + C_{3}\theta_{1} - C_{1}y_{B} + C_{3}\theta_{2} \\ M_{A} &= C_{3}y_{A} + C_{2}\theta_{1} - C_{3}y_{B} + C_{4}\theta_{2} \\ Q_{B} &= -C_{1}y_{A} - C_{3}\theta_{1} + C_{1}y_{B} - C_{3}\theta_{2} \\ M_{B} &= C_{3}y_{A} + C_{4}\theta_{1} - C_{3}y_{B} + C_{2}\theta_{2} \\ \theta_{2} &= \frac{M_{B}}{K_{B}} + \theta_{B} \end{split}$$

ここで、 θ」と θ2を中央の式に代入し、整理すると次式を得る。

$$Q_{A} + \frac{C_{3}}{K_{A}}M_{A} - \frac{C_{3}}{K_{B}}M_{B} = C_{1}y_{A} + C_{3}\theta_{A} - C_{1}y_{B} + C_{3}\theta_{B}$$

$$(1 + \frac{C_{2}}{K_{A}})M_{A} - \frac{C_{4}}{K_{B}}M_{B} = C_{3}y_{A} + C_{2}\theta_{A} - C_{3}y_{B} + C_{4}\theta_{B}$$

$$Q_{B} - \frac{C_{3}}{K_{A}}M_{A} + \frac{C_{3}}{K_{B}}M_{B} = -C_{1}y_{A} - C_{3}\theta_{A} + C_{1}y_{B} - C_{3}\theta_{B}$$

$$\frac{C_{4}}{K_{A}}M_{A} + (1 - \frac{C_{2}}{K_{B}})M_{B} = C_{3}y_{A} + C_{4}\theta_{A} - C_{3}y_{B} + C_{2}\theta_{B}$$

このうち、せん断応力を含まない二つの項から M<sub>A</sub>, M<sub>B</sub>を求めることが出来る。

$$\begin{cases} 1 - \frac{C_2}{K_B} + \frac{C_2}{K_A} + \frac{C_4^2 - C_2^2}{K_A K_B} \end{cases} M_A = \begin{cases} 1 + \frac{C_4 - C_2}{K_B} \end{cases} C_3 y_A \\ + \begin{cases} C_2 - \frac{C_2^2}{K_B} + \frac{C_4^2}{K_B} \end{cases} \theta_A - \begin{cases} 1 - \frac{C_4 - C_2}{K_B} \end{cases} C_3 y_B + C_4 \theta_B \\ \begin{cases} 1 - \frac{C_2}{K_B} + \frac{C_2}{K_A} + \frac{C_4^2 - C_2^2}{K_A K_B} \end{cases} M_B = \begin{cases} 1 + \frac{C_2 - C_4}{K_A} \end{cases} C_3 y_A \\ + C_4 \theta_A - \begin{cases} 1 + \frac{C_2}{K_A} - \frac{C_4}{K_A} \end{cases} C_3 y_B + \begin{cases} C_2 - \frac{C_4^2}{K_A} + \frac{C_2^2}{K_A} \end{cases} \theta_B \end{cases}$$

次に,これをせん断応力を含む項に代入することによって,せん断応力も変形の関数として求 めることが出来る。(式は省略)

ここで、塑性ヒンジの回転は弾性変形時には発生しないので、剛性 *K*<sub>A</sub>, *K*<sub>B</sub>は弾性変形時には剛 性が無限大である。すなわち、このモデルでは、弾性変形は材中央部で吸収し、塑性ヒンジでは 塑性変形のみが発生する。従って、得られた式のチェックも簡単で、弾性時には *K*<sub>A</sub>, *K*<sub>B</sub>を無限大 とおくことで、弾性の式に帰結することが分かる。

塑性ヒンジに要求されるモーメントー曲率関係は、与えられた式から弾性変形分を除いたものである。しかし、無限大を扱うモデルは扱いにくいことから、STADASの現バージョンではこの方法は採用していない。

# 5.4.5.2 剛域の考慮

下図のように両端に剛域を持つモデルを考える。これを一つの系と考えると、剛性関係は次のように書くことが出来る。

$$\begin{bmatrix} I & J & K & L \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{2} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{2} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{2} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{2} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{0} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} & \downarrow I_{1} \\ \hline \downarrow I_{1} & I_{1} \\ \hline I_{1} & I_{1$$

これを書き下すと,次のようである。

$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -l \\ 0 & 1 \\ \end{bmatrix}$
$ \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$ \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \end{bmatrix}$
$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ \end{bmatrix}$
$ \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 1 0 1
$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -l \\ 0 & 1 \\ \end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -l_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -l_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 &$	$ \begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc$
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	0 1
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	]
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	]
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	
$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	
$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & $	
$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$\phi$ )
$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 &$	$\frac{EI}{\phi}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0$	
$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 $	
$\ell$ $\ell$ $\ell$ $\ell$	
$0 - \frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} - \frac{12EI\ell_{1}}{\ell^{3}(1+\phi)} - \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} = 0 - \frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} - \frac{12EI\ell_{2}}{\ell^{3}(1+\phi)} - \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} - \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} - \frac{12EI\ell_{2}}{\ell^{2}(1+\phi)} - \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} = 0$	$(\phi)$
$6EI \qquad 6EI\ell_1 \qquad (2-\phi)EI \qquad 6EI \qquad 6EI\ell_2 \qquad (4+\phi).$	EI
$\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\ell^2 (1+\phi)} & \frac{1}{\ell^2 (1+\phi)} + \frac{1}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{1}{\ell^2 (1+\phi)} + \frac{1}{\ell(1+\phi)} + \frac{1}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix}$	∮)
$\left  \begin{array}{ccc} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \end{array} \right $	
$12EI$ $12EI\ell_1$ $6EI$ $12EI\ell_2$ $6EI$	
$0 \qquad \frac{1}{\ell^3 (1+\phi)} \qquad \frac{1}{\ell^3 (1+\phi)} + \frac{1}{\ell^2 (1+\phi)} \qquad 0 \qquad -\frac{1}{\ell^3 (1+\phi)} \qquad \frac{1}{\ell^3 (1+\phi)} + \frac{1}{\ell^2 (1+\phi)} $	• <u>)</u>
$0 = \frac{12EI\ell_1}{\ell_1^3(1+\ell)} + \frac{6EI}{\ell_2^2(1+\ell)} = \frac{6EI\ell_1}{\ell_2^2(1+\ell)} + \frac{(4+\phi)EI}{\ell_1^2(1+\ell)} = 0 = -\frac{12EI\ell_1}{\ell_2^3(1+\ell)} - \frac{6EI}{\ell_2^2(1+\ell)} = \frac{6EI\ell_2}{\ell_2^2(1+\ell)} + \frac{(2-\phi)E}{\ell_1^2(1+\ell)} = \frac{6EI\ell_2}{\ell_2^2(1+\ell)} $	$\frac{3I}{2}$
$= \begin{bmatrix} \iota (1+\varphi) & \iota (1+\varphi) & \iota (1+\varphi) & \iota (1+\varphi) \\ \vdots & \iota^{-} (1+\varphi) & \iota^{-} (1+\varphi) & \iota^{-} (1+\varphi) & \iota^{-} (1+\varphi) \\ \end{bmatrix}$	/
$\left  -\frac{EA}{\ell} \right  = 0$ $0$ $\left  \frac{EA}{\ell} \right  = 0$ $0$	
$12EI \qquad 12EI\ell_1 \qquad 6EI \qquad 12EI \qquad 12EI\ell_2 \qquad 6EI$	1
$0 \qquad -\frac{1}{\ell^3(1+\phi)} \qquad -\frac{1}{\ell^3(1+\phi)} - \frac{1}{\ell^2(1+\phi)} \qquad 0 \qquad \frac{1}{\ell^3(1+\phi)} - \frac{1}{\ell^2(1+\phi)} - \frac{1}{\ell^2(1+$	
$0 - \frac{12EI\ell_2}{2} + \frac{6EI}{2} + \frac{6EI\ell_1}{2} + \frac{(2-\phi)EI}{2} = 0 - \frac{12EI\ell_2}{2} - \frac{6EI}{2} + \frac{(4+\phi)E}{2} +$	$\overline{\phi}$

# 5.4.5.3 幅のあるはり要素

$$\begin{cases} u_{1} \\ v_{1} \\ \theta_{1} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2d} & 0 & -\frac{1}{2d} & 0 \end{bmatrix} \begin{cases} u_{I} \\ v_{I} \\ u_{L} \\ v_{L} \end{cases}, \quad \begin{cases} u_{2} \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2d} & 0 & -\frac{1}{2d} & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{J} \\ v_{J} \\ u_{K} \\ v_{K} \end{pmatrix}$$

$$(5.4.11) \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix}$$



# 参考文献

1) Yoshida, N. and Nonaka, T. (2001): Hysteretic behavior of a bar under repeated axial loading: an extended history, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASTM, Vol. 68, No. 3, pp. 425-431

# 6 ダッシュポット

STADAS で用いているダッシュポットは、両端の相対速度に比例するような反力を生じる要素 である。この要素はその定義としての使われ方より、地盤の半無限性を考慮するのに使われるの が普通である。このようなダッシュポットが半無限に広がる地盤への逸散減衰に相当する、解析 範囲から解析範囲外へ伝播する波動をうまく吸収するということは、最初 Lysmer らにより指摘さ れた<sup>1)</sup>。その後、境界に直交して入射、反射する波も同じダッシュポットを使うことで考慮できる ことを Joyner が示した<sup>2)</sup>。このようなダッシュポット要素はその後さらに拡張して用いられるよ うになり、例えば解析範囲と側方の自由地盤の間の波動の伝播にも使われるようになった。ダッ シュポットの理論に関しては、1章に示しているので、参照されたい。



ダッシュポットに関する基礎式については、第1章に示しているので、ここでは示さない。ただし、次の事項を指摘しておく。すなわち、ダッシュポットの粘性係数は、Lysmer らのいう標準境界を考えるとすれば、境界に平行した相対速度に対して作用する場合が*ρV<sub>s</sub>*、境界に直交した相対速度に対して作用する場合が*ρV<sub>p</sub>*である。したがって、右図のように基盤と側方自由地盤の両方にダッシュポットをつける場合に、ダッシュポットの係数を作用方向で分けるのではなく、境界に平行か直交しているかで係数を決めることになる。

ダッシュポットの粘性係数は,解析領域の外側の地盤の剛性に依存する。そこで,STADAS で は、一定の粘性係数を用いる解析以外に、要素剛性に対し、二つのオプションを設けている。一 つは、ダッシュポットの剛性の時間的な変化を入力として採用する方法である。もう一つは、ダ ッシュポットの時間的な剛性の変化をある特定の要素の剛性の時間的な変化と等しくするもので ある。自由地盤と解析範囲とつなぐダッシュポットに対しては有効なオプションとなろう。

# 参考文献

- Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.95, No.EM4, 1969, pp.859-877
- 2) Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.65, No.5, pp.1337-1357, October 1975

# 7 固体要素

固体要素の有限要素法への定式化については,既に1章で説明した。この節では,固体要素の構 成則を示す。

# 7.1 弾性マトリックスに対する注意

この節で説明するのは、弾性マトリックスについてであるが、これは単に弾性の構成則のこと を指しているのではなく、一般の構成則についても必要なことである。それは、構成則では一般 に弾性成分と塑性成分が分離され、弾性成分に関してはこの節で示すものが使われるからである。

せん断弾性係数を G,体積弾性係数を B とすると、応力-ひずみ関係は次のように表される。

 $(7.1.1) \qquad \{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$ 

ここで, *σ*, *ε*はそれぞれ応力とひずみ, [*D*]は弾性マトリックス(非線形解析の場合には,増分弾 性マトリックス)である。これらの成分は,解析法や構成則により異なっている。なお,応力, ひずみとも圧縮力を正とするよう定義していることは1章で述べたとおりである。

#### (1) 3次元解析

3次元解析は最も一般的な場合であり、諸量は次のようになる。

$$(7.1.2) \quad \{\sigma\}^{T} = \{\sigma_{x} \quad \sigma_{y} \quad \sigma_{z} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}\}$$

$$(7.1.3) \quad \{\varepsilon\}^{T} = \{\varepsilon_{x} \quad \varepsilon_{y} \quad \varepsilon_{z} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}\}$$

$$(7.1.4) \quad [D] = \begin{bmatrix} B + \frac{4}{3}G \quad B - \frac{2}{3}G \quad B - \frac{2}{3}G \quad 0 \quad 0 & 0 \\ B - \frac{2}{3}G \quad B + \frac{4}{3}G \quad B - \frac{2}{3}G \quad 0 \quad 0 & 0 \\ B - \frac{2}{3}G \quad B - \frac{2}{3}G \quad B + \frac{4}{3}G \quad 0 \quad 0 & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad 0 & 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad G \quad 0 \end{bmatrix}$$

#### (2) 2次元平面ひずみ解析

平面ひずみ問題では、 $\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=\varepsilon_{z}=\tau_{zy}=\tau_{zx}=0$ が成立する。これらを式(7.1.1)に代入すると、次の関係が得られる。

(7.1.5) 
$$\{\sigma\}^{\mathrm{T}} = \{\sigma_{x} \ \sigma_{y} \ \tau_{xy} \ \sigma_{z}\}$$
  
(7.1.6)  $\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}} = \{\varepsilon_{x} \ \varepsilon_{y} \ \gamma_{xy}\}$   
(7.1.7)  $[D] = \begin{bmatrix} B + \frac{4}{3}G \ B - \frac{2}{3}G \ 0 \\ B - \frac{2}{3}G \ B + \frac{4}{3}G \ 0 \\ 0 \ 0 \ G \\ B - \frac{2}{3}G \ B - \frac{2}{3}G \ 0 \end{bmatrix}$ 

式から明らかなように、平面ひずみ解析では、σ<sub>z</sub>も0ではない。したがって、プログラムの入力 にはその値も必要である。しかしその値はユーザーにとっては必要ではないことも多いので、プ ログラムからの出力はない。STADAS で用いられている弾性要素ではこの式が使われている。

# (3) 2次元解析

前節で示した平面ひずみによる定式化は3次元の解析の2次元への適用法として正しいものでは あるが、2次元解析専用の構成則では、必ずしもこのような使い方がされているわけではない。次 の式が使われることも普通である。

(7.1.8) 
$$\{\sigma\}^{\mathsf{T}} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$$
  
(7.1.9) 
$$\{\varepsilon\}^{\mathsf{T}} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$$
  
(7.1.10) 
$$[D] = \begin{bmatrix} B+G \quad B-G \quad 0\\ B-G \quad B+G \quad 0\\ 0 \quad 0 \quad G \end{bmatrix}$$

STADAS ではこの解析方法も弾性要素として使えるようになっている。また、非線形の構成則 の一部でも用いられている。(2)、(3)項の二つの2次元解析に対する手法のうちどちらの方法が用 いられているかは、構成則によって異なる。これらはそれぞれの定式化で示されているので、そ れを参照されたい。なお、この項の方法を用いている場合は、拘束圧依存性を表現するための拘 束圧は( $\sigma_x$ + $\sigma_y$ )/2である。また、ポアソン比は次式で表され、等体積変形に対する値は1.0となり、 三次元の場合とは異なる。

$$(7.1.11) \quad v = \frac{B-G}{B+G}$$

## 7.2 飛田・吉田モデル

砂に関する構成則である。

# 7.2.1 基本量の定義

この構成則で用いる、応力とひずみに関係した量は、次のとおりである。  
(7.2.1) 応力 
$$\sigma_{ij}$$
 引張が正  
(7.2.2) ひずみ  $\varepsilon_{ij}$  テンソルひずみ  
(7.2.3) 静水圧  $p = -\frac{1}{3} tr(\sigma)$  (圧縮が正)  
(7.2.4) 体積ひずみ  $\varepsilon_v = -tr(\varepsilon)$  (圧縮が正)  
(7.2.5) 偏差応力  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} tr(\sigma) \delta_{ij} = \sigma_{ij} + p \delta_{ij}$   
(7.2.6) 偏差ひずみ  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} tr(\varepsilon) \delta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_v \delta_{ij}$   
(7.2.7) 相当応力  $\sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$   
(7.2.8) 相当ひずみ  $\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij} e_{ij}}$ 

# 7.2.2 単調載荷時の挙動

## (1)降伏条件

中間主応力の影響は無視する。

(7.2.9)  $f = \sigma_e - \alpha_{_M} p = 0$  = 0

(7.2.10) 
$$\alpha_{M} = \frac{\sigma_{e}}{p}$$

# (2) 偏差成分に関する塑性流れ則

せん断と体積変化を分離して考える。塑性偏差ひずみ増分 *de<sup>p</sup><sub>ij</sub>* は,降伏曲面の偏差成分の法線 方向と同じ向きを持つとする。

(7.2.11) 
$$\operatorname{d} e_{ij}^{p} = \mathrm{d} \lambda \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} \right)_{ij}^{*}$$

ここで、\*は偏差成分を表している。すなわち、

(7.2.12) 
$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)_{ij}^{*} = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)_{ij}\right\}$$

式(7.2.1)(7.2.3)を σ<sub>ii</sub> で微分し,式(7.2.5)の関係を使えば,次の式が得られる。

(7.2.13) 
$$\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij}, \quad \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ij}$$
  
したがって、fの微分は次のように表される。  
 $\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij} = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij} - \alpha_M \frac{1}{3} \delta_{ij}$   
(7.2.14)

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^* = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij}$$

ただし,  $\sigma_e=0$ のとき,これらは全て $\sqrt{3/2}$ 以後,表現の簡単化のために,次の記号を用いる。

$$N_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}$$

$$N_{ij}^{*} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*}$$

$$N_{ij}^{p} = \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}$$

$$N_{ij}^{s} = \left(\frac{\partial \sigma_{e}}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*} = \frac{2}{3\sigma_{e}}s_{ij}$$

これらの記号を使えば、式(7.2.14)は次のように書ける。

(7.2.16) 
$$N_{ij} = N_{ij}^{s} - \alpha_{M} N_{ij}^{p} \\ N_{ij}^{*} = N_{ij}^{s}$$

(3)ダイレタンシーの定式化

一般化応力-ダイレタンシー関係式を使う。すなわち、次のエネルギー消散式を用いる。 (7.2.17)  $s_{_{y}}de_{_{y}}^{p} - pd\varepsilon_{_{v}}^{p} = pMd\xi$ 

ここで、Mは材料に固有の定数、 $\xi$ は相当せん断応力 $\sigma_e$ に対応した一般化ひずみで、

 $(7.2.18) \quad s_{ii} de_{ii}^{p} = \sigma_{e} d\xi$ 

両辺を自乗し、式(7.2.7)の関係を用いれば、

$$\mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathrm{d}e_{ij}^{p} \mathrm{d}e_{ij}^{p}$$

さらに,式(7.2.11),(7.2.15)を代入して,

$$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\lambda \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$

式(7.2.8)と比べると分かるように、相当ひずみとの差は、①らは塑性ひずみ成分であること、②蓄

積量であることである。式(7.2.18)を用いれば、式(7.2.17)は、最終的に次のようになる。

(7.2.19)  $d\varepsilon_v^p = \tan v \cdot d\lambda$ 

(7.2.20) 
$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^* - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$
  
(7.2.21) 
$$\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}$$

# (4) 硬化則

降伏曲面は、応力 $\sigma_{ij}$ と $\alpha_M$ の関数である。 $\alpha_M$ は、一般化ひずみ $\xi$ の関数である。したがって、降伏を維持するための条件 df=0 は次のように書ける。

(7.2.22) 
$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{M}} \frac{\partial \alpha_{M}}{\partial \xi} d\xi = 0$$

ここで、∂f/∂a<sub>M</sub>=-pの関係を代入し、さらに、式(7.2.18)を用いれば、

(7.2.23) 
$$d\lambda = \frac{1}{H_p} N_{ij} d\sigma_{ij}$$
  
(7.2.24) 
$$H_p = p \frac{\partial \alpha_M}{\partial \xi} \sqrt{\frac{2}{3} N_{ij}^* N_{ij}^*}$$

つぎに、 *α*<sub>M</sub>を一般化ひずみξの関数として、 次のような双曲線に置く。

$$(7.2.25) \qquad \alpha_{_M} = \frac{\xi}{A + \xi / B}$$

式(7.2.25)の微分は次のようになる。

(7.2.26) 
$$\frac{\partial \alpha_{_M}}{\partial \xi} = \frac{A}{\left(A + \xi / B\right)^2}$$

#### (5) 接線剛性の計算

これまでで、単調載荷時に必要な式は計算できた。これより、接線剛性を求める。式(7.2.23)を 式(7.2.11)、(7.2.19)に代入し式(7.2.15)の関係を用いれば、偏差塑性ひずみ増分および塑性体積ひず み増分は次のように計算できる。

(7.2.27) 
$$de_{ij}^{p} = \frac{1}{H_{p}} N_{ij}^{*} N_{kl} d\sigma_{kl}$$
  
(7.2.28) 
$$d\varepsilon_{v}^{p} = \frac{1}{H_{p}} \tan v N_{kl} d\sigma_{kl}$$

したがって、塑性ひずみ増分は次のようになる。

(7.2.29) 
$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\varepsilon_{ij}^{p} + \frac{1}{3}d\varepsilon_{v}^{p}\delta_{ij} = \frac{1}{H_{p}}P_{ij}N_{kl}d\sigma_{kl}$$

ここで,

(7.2.30) 
$$P_{ij} = N_{ij}^* + \frac{1}{3} \tan v \delta_{ij}$$

式(7.2.29)により、応力増分が与えられたときの塑性ひずみ増分が計算できる。実際のひずみに は弾性ひずみもあるので、これを加えれば、全ひずみが求まる。弾性ひずみは次のようにして求 まる。

$$d\sigma_{ij} = L^{e}_{ijkl} d\varepsilon^{e}_{kl}$$
(7.2.31) 
$$d\varepsilon^{e}_{ij} = C^{e}_{ijkl} d\sigma_{ij}$$

$$L^{e}_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\delta_{ik}\delta_{jl}$$

式(7.2.29), (7.2.31)よりひずみが応力の関数として求まったが,通常必要なのはこの逆の関係, すなわち,応力増分をひずみ増分の関数として表すことである。これは,次のように行う。

式(7.2.31)より、次の式が得られる。 (7.2.32)  $d\sigma_{ii} = L^{e}_{iikl} \left( d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon^{p}_{kl} \right)$ 

式(7.2.32)に式(7.2.29)を代入すると、次式が得られる。

(7.2.33) 
$$d\sigma_{ij} = L^{e}_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{H_{p}} P_{kl} N_{pq} d\sigma_{pq} \right)$$

両辺に $N_{ij}$ を掛け、右辺の $N_{pq}$ d $\sigma_{pq}$ のpqをijに置き換えれば、次式を得る。

(7.2.34) 
$$N_{ij}d\sigma_{ij} = \frac{H_p N_{st} L_{skl}^{\epsilon} d\varepsilon_{kl}}{H_p + N_{re} L_{equil}^{\epsilon} P_{up}}$$

式(7.2.34)を式(7.2.33)の右辺に代入すれば、次式を得る。

$$l\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

(7.2.35) 
$$L_{ijkl} = L_{ijkl}^{e} - \frac{L_{ijkl}^{e} P_{pq} N_{st} L_{stkl}^{e}}{H_{p} + N_{pq} L_{pqmn}^{e} P_{mn}}$$

## 7.2.3 繰返し載荷時の挙動

繰返し載荷の場合、履歴曲線は処女載荷時と全く異なる考えを用いる。

①弾性領域はない。

②偏差ひずみ増分の向きは、共役応力点の法線方向と一致する。

③硬化関数 H<sub>p</sub>は、応力空間の距離に依存して決まるとする。

塑性ひずみ増分に関する式は、骨格曲線の場合(式(7.2.29))と全く同じである。

(7.2.36) 
$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{P} = \frac{1}{H_{P}} P_{ij} N_{kl} \mathrm{d}\sigma_{kl}$$

処女載荷時と同様,拘束圧 p で無次元化して考える。

(7.2.37) 
$$\alpha_{ij} = \frac{s_{ij}^*}{p}, \quad \eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}, \quad \eta_{ij}^c = \frac{s_{ij}^c}{p}$$

ここで、 $s_{ij}^*$ は除荷点の偏差応力、 $s_{ij}$ は現在の偏差応力、 $s_{ij}^c$ は共役応力である。これらの関係は、図のようになる。



除荷点と現在の応力点を通る線の延長は次式で表される。

 $(7.2.38) \qquad \ell_{ij} = \lambda (\eta_{ij} - \alpha_{ij}) + \alpha_{ij} \quad (\lambda > 1)$ 

これと,降伏曲面

$$f = \sqrt{\frac{3}{2}\eta_{ij}\eta_{ij}} - \alpha_{M} = 0$$

との交点が共役応力点である。この点では

(7.2.39)  $\lambda = \lambda^* = \frac{-a + \sqrt{a^2 - \rho^2 b}}{\rho^2}$ (注) 骨格曲線からの除荷の時,  $\lambda^* = -2a/\rho^2$ ここで,

(7.2.40) 
$$a = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})\alpha_{ij} < 0$$
$$b = \frac{2}{3}\alpha_{M}^{2} + \alpha_{ij}\alpha_{ij}$$
$$\rho^{2} = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})(\eta_{ij} - \alpha_{ij})$$

これより、共役応力比は次のようになる。

(7.2.41)  $\eta^{c} = \lambda^{*} (\eta_{ii} - \alpha_{ii}) + \alpha_{ii}$ 

共役点の座標が分かれば、法線方向が計算でき、次のようになる。

$$N_{ij}^{c} = N_{ij}^{c^*} - \frac{\alpha_{M}}{k} \delta_{ij}$$

除荷の判定は次のように行う。 ①骨格曲線からの除荷

(7.2.42)  $df = N_{ii} d\sigma_{ii} < 0$ 2履歴曲線からの除荷

$$\mathrm{d}f = N_{ii}^{c}\mathrm{d}\sigma_{ii} < 0$$

ここでは、応力増分で除荷の判定を行っているが、ひずみで行える方が好都合なこともある(プ ログラムでは応力増分で判定している)。式(7.2.34)は次の形をしている。

 $N_{ij} \mathbf{d}\sigma_{ij} = \frac{H_p N_{st} L^e_{stkl} \mathbf{d}\varepsilon_{kl}}{H_p + N_{pq} L^e_{pqmn} P_{mn}}$ (7.2.43)

ここで、H<sub>w</sub>>0は常に成立する。多くの場合、分母>0と考えられるので、右辺の符号は右辺分子の 符号と等しくなり、ひずみで除荷の判定が出来る。降伏が進んで来ると、H<sub>p</sub>は小さくなるので、 分母<0の可能性も生じる。したがって、まず分子により除荷の判定をし、分母の符号を検討する のが実用的には便利そうである。

硬化パラメータの値は次のように定義できるとする。

(7.2.44) 
$$H_p = H_R - (H_R - H_p^*) \left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^m$$

ここで,

 $H_p^*$ : 骨格曲線に置ける  $H_p$ 

H<sub>R</sub>: 仮想の硬化パラメータで, 繰返しにより蓄積された塑性ひずみ増分の関数 すなわち.

$$(7.2.45) \qquad d\lambda^p = \sqrt{\frac{2}{3}e_{ij}^p e_{ij}^p}$$

と置いたとき,

$$H_{R} = H_{Ro}e^{a\lambda^{p}} \quad (a > 0)$$

(注) 式(7.2.25)より 
$$\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{A}{(A+B\xi)^2}$$
 に $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{A}{(A+B\xi)^2} \rightarrow \xi = \frac{A\alpha}{1-B\alpha}$ を代入し、 $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{(1-B\alpha)^2}{A}$ これを式(7.2.25)に代入し、

(7.2.46) 
$$H_{p}^{*} = p \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^{*} N_{ij}^{*} = \frac{p(1 - B\alpha)^{2}}{A} \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^{*} N_{ij}^{*}$$

つぎに、ダイレタンシー係数をもとめる。応力-ダイレタンシー関係は次のように書ける。 (7.2.47)  $ds_{v} = \tan v d\lambda^{p}$ 

ここで,

(7.2.48) 
$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$
  
(7.2.49) 
$$d\lambda^p = \frac{1}{H_p} N_{ij}^c d\sigma_{ij}$$

変相線を次のように定義する。

 $(7.2.50) \quad \sigma_e - Mp = 0$ 

大きなダイレタンシーは変相線の外側で,破壊に近づくとき起きる。すなわち,

 $(7.2.51) \quad \alpha_{\scriptscriptstyle M} > M \quad \text{tr} \quad d\alpha_{\scriptscriptstyle c} < 0$ 

(7.2.52) 
$$\alpha_{c} = \frac{\alpha_{c}}{p}\Big|_{\sigma=\sigma_{c}}$$
 σ<sub>c</sub> は現在の応力点

いま,

(7.2.53) 
$$N_{ij}^{c} = \frac{2}{3\sigma_{e}}s_{ij} + \frac{1}{k}\delta_{ij}$$

と定義したとすれば,

$$(7.2.54) \quad \mathrm{d}\alpha_{c} = N_{ij}^{c}\mathrm{d}\sigma_{ij}$$

したがって、変相線内で載荷が生じているとき、

(7.2.55) 
$$\tan v = -\eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$

一方,変相線内で除荷が起こっているときおよび一般の場合,

(7.2.56) 
$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$

#### 7.2.4 佐藤による改良

元の飛田・吉田モデルでは、一定応力振幅の載荷を行うと、変相後早い時期に履歴曲線が定常 化する。これを改良し、さらに液状化強度曲線へのフィッティングを良くする目的で改良が行わ れた。

せん断弾性係数を次のように表す。

(7.2.57) 
$$G_{max} = G_0 \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_r}\right)^{G_N} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{B}\right)^{C_0 \left(\frac{\sigma'_r}{\sigma'_{r0}}\right)^2}$$

ここで,

G<sub>0</sub>:初期せん断弾性係数

 $\sigma'_r$ : せん断弾性係数を定義した圧力

G<sub>N</sub>: せん断弾性係数の指数部

 $\sigma'_{r_0}$ :要素の初期拘束圧

 $B: 硬化則を規定する係数, B = \sqrt{3} \sin \phi_T, \phi_T$ は破壊角

C0, z: 発生ひずみを規定するパラメータ

なお、 $\sigma'_m$ は時々刻々計算される有効応力、 $\alpha = \sigma_e / \sigma'_m$ は時々刻々計算される値、 $\sigma_e$ は相当応力である。

対応して体積弾性係数も次のようになる。

(7.2.58) 
$$K = AK_0 \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_r}\right)^{AK_N} \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{B}\right)^{C_0 \left(\frac{\sigma'_r}{\sigma'_r}\right)^2}$$

ここで,

 $AK_0$ : 初期体積弾性係数

 $AK_N$ :体積弾性係数の指数部

さらに,硬化関数 H<sub>P</sub>を次のように表す。

(7.2.59) 
$$H_{p} = \left\{ H_{R0} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{r}{r_{c}} \right)^{m} \right] \cdot \Delta^{\beta} \cdot \left( \frac{N_{i}}{N_{1}} \right)^{s} + H_{p}^{*} \left( \frac{r}{r_{c}} \right)^{m} \right\} \cdot \left( \frac{\sigma_{r0}'}{\sigma_{r}'} \right)^{q}$$

ここに

$$\Delta = \begin{cases} 1.0 & 0 \le \frac{\alpha}{M} \le 1.0 \\ \frac{B-\alpha}{B-M} & 1.0 < \frac{\alpha}{M} < \frac{B}{M} \\ 1.0 + (s_1 - 1.0) \cdot \frac{\alpha}{M} & 0 \le \frac{\alpha}{M} \le 1.0 \\ \frac{s_1}{d-1.0} \cdot (d - \frac{\alpha}{M}) & 1.0 < \frac{\alpha}{M} < d \\ 0.0 & d < \frac{\alpha}{M} \le \frac{B}{M} \end{cases}$$

 $N_1$ : 基準とする応力比  $R_1$ に対する繰返し回数

 $N_i$ :現在の応力比 $R_i$ に対する繰返し回数

であり、 $N_i \ge R_i$ の関係は液状化強度試験結果による $R_L \sim N_L$ 関係が両対数軸上でほぼ直線関係にあると考えられることから下式で近似している。

(7.2.60)  $\log R_i = a \log N_i + b$ したがって,硬化関数 $H_P$ を決めるために,パラメータ*m*, $H_{R0}$ , $\beta$ , $s_1$ ,d,q, $N_1$ ,a,bが必要である。

# 7.3 吉田のモデル化手法

地震応答解析などでは、1次元解析と2、3次元解析に用いられる構成則の間には大きな差がある。 1次元解析ではせん断応カーせん断ひずみ関係が関心の対象となり、応力、ひずみとも一つづつ の成分しかないことから、特に塑性論の考えを用いなくても応カーひずみ関係を構築することが でき、実際多くのモデルが作られている。この際の関心時は、いわゆる *G-y*、*D-y*関係である。1 次元の解析では、これらを対象として多くの構成則が使われる。

これに対して、2、3次元解析では、一般的に弾塑性理論に基づく構成則が用いられる。前項で 述べた飛田・吉田モデルもその一つであるが、これらの方法では、降伏曲面、塑性ポテンシャル および硬化則が決まれば全て同じ形式で定式化できる。しかし、地盤工学会で行われた一斉解析 など<sup>1)</sup>の経験から、単純にこれだけで作られた構成則では液状化現象が表現できず、硬化則に履歴 の影響を考慮するなど、相当に複雑なものとなっているのが現状である<sup>2)</sup>。また、降伏曲面、塑性 ポテンシャル、硬化関数のそれぞれに対して式が異なると、定式化の手順も異なってくるし、そ れぞれに別の名前が付くということになる。このように、一次元の構成則に比べ、二次元の構成 則は扱いが結構異なっている。従って、その使い方も簡単とはいえない。

一次元解析の延長として二次元解析を適用するには、せん断応力と相当応力の違いの問題を解 決する必要がある。すなわち、前者は正負の値をとるのに対し、後者は常に正であるので、単純 には一次元のモデルを二次元に拡張することは困難である<sup>2)</sup>。2次元解析でも、簡単なモデルも使 われる。たとえば、水平面内のせん断応力ーせん断ひずみ関係で塑性化を表現するようなモデル である<sup>3)4)</sup>。この仮定は荒いように見えるかもしれないが、地震動による変形は主として水平面内 のせん断変形であることを考えると、それほど問題も発生しないし、これまでの実績でも成功し てきている。しかし、地盤と構造物の相互作用など複雑な応力条件が発生するケースでは必ずし も適切ではないかもしれない。

多次元解析に用いることの出来る簡単なモデルとして Dancan-Chang のモデル<sup>5)</sup>がある。このモ デルは、後に示すように、せん断変形に対する2次元の構成則としていくつかの優れた点を持って いるが、適用範囲は小さい。ここでは、Dancan-Chang のモデルを拡張することによって、一次元 解析の延長として用いることが可能な、多次元解析に対するより使いやすい構成則を示す<sup>67)</sup>。

## 7.3.1 Duncan-Chang の方法とその反省

Duncan-Changの方法は、次のようにまとめることができる。 ①軸差応力と軸差ひずみの関係に双曲線モデルを用いている。 ②双曲線モデルの上限に対し、*R*(≤1)というパラメータを導入する。すなわち、

(7.3.1)  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 

ここで、添字*f*は材料の実際の強度を表し、添字*ult*はモデルの上限を表す。このパラメータの導入によりパラメータの数が一つ増えたのでフィッティングがより容易になるという利点がある。 なお、、*R<sub>f</sub>*が1より大きいと終局強度を超える強度を発揮することになるが、その場合には終局強度で応力---ひずみ関係を頭打ちにさせる。



③初期剛性に対して、拘束圧依存性を考慮している。

(7.3.2) 
$$E_i = KP_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n$$

ここでは、有効拘束圧ではなく、のに対する拘束圧依存性として捉えている。 ④実際の耐力を Mohr-Coulomb の破壊条件より求める。

(7.3.3) 
$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c\cos\phi + 2\sigma_3\sin\phi}{1 - \sin\phi}$$

ここで、 $\sigma_3$ が一定として降伏時の( $\sigma_1$ - $\sigma_3$ ) $_f$ を求めている。 ⑤接線剛性を応力比の関数として表した。

(7.3.4) 
$$E_i = (1 - R_f s)^2 E_i$$
  
ここで、 $s = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$ は応力比である。

以上の事から見た, Dancan-Chang の特徴は次のようにまとめることができる。 ①せん断変形のみに着目した2,3次元に適用可能なモデルで,双曲線モデルを基本としている。 ②*R*fの導入により,終局に至る前の応力-ひずみ関係の実験値との適合性を広げている。 ③接線剛性を応力の関数とすることによって,ひずみに伴う各種の複雑さを排除している。

以上に見たように, Dancan-Chang の方法では、いくつかの新しい試みがある。しかし、一般的な場合に用いるには、次のような欠点がある。

①単調載荷のみの定義で、繰返し載荷に対する式がない。

②三軸試験の結果を基にしているために、一般的な場合への考慮がない。例えば、初期剛性のσ3 依存性、終局強度を決めるときのσ3=constの仮定などがその例である。

③実は式(7.3.4)で示される接線剛性は、拘束圧を一定としたときの接線剛性であり、拘束圧が変化 する場合には、接線剛性ではない。ただし、三軸試験と同じ様に、の3=const という考えに従えば、 これは接線剛性である。この面からも、Dancan-Changの方法は三軸試験の結果をそのまま適用し ようとしたものであることが分かる。

#### 7.3.2 基本的な考え方

これまで見たように、地盤材料の非線形性は、せん断定数と等価減衰比のひずみ依存性として 表現される。ところで、多くの土の構成則では、履歴法則に Masing 則を用いるが、実験で得られ る材料の非線形性は Masing 則では表現できない<sup>8)</sup>。この欠点は3.3節で述べたモデルで改良できた。 さらに、これをもとにして多次元に拡張されてきた<sup>6)9)</sup>。このモデルは Duncan-Chang のモデル<sup>5)</sup>の 骨格曲線に自由度を持たせ、かつ履歴法則を付け加えたもので、実務的に用いやすい簡易なモデ ルとなっている。

土の挙動を、体積変化、せん断変形、およびダイレタンシーに分ける。このうちダイレタンシ

ーについては後に述べる。なお、本構成則は、与えられたひずみ増分に対する応答を求めるよう に定式化されている。また、ダイレタンシーとせん断変形、体積変化に対して独立した式を使う ことが出来るのが特徴である。すなわち、この方法は単なる構成則というより、構成則を作るた めの法則を決めるものである。

体積変化特性は、増分弾性挙動を仮定する。すなわち、有効拘束圧増分 $d\sigma'_m$ は次式で表される。 (7.3.5)  $d\sigma'_m = B(\sigma'_m)(d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vd})$ 

ここで、B は体積弾性係数で、有効拘束圧 $d\sigma'_m$ の関数であり、 $d\varepsilon_v$ 、 $d\varepsilon_v$ d はそれぞれ体積ひずみ、 ダイレタンシーに伴う体積ひずみ増分である。ダイレタンシーを考慮した場合でも、ひずみ増分 が与えられていれば、式(7.3.5)より拘束圧の変化を一意的に求めることが出来る。したがって、せ ん断変形の解析時には、拘束圧は既知である。

せん断変形に関しては、拘束圧依存性を考慮して、次の無次元量を用いる。

(7.3.6) 
$$\eta = \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}}, \qquad \xi = \frac{e \cdot G_{\max}}{\tau_{\max}}$$

ここで、 $G_{max}$ 、 $\tau_{max}$ はそれぞれせん断弾性定数とせん断強度で、有効拘束圧の関数であり、 $\sigma_e$ 、eは偏差ひずみと偏差応力である。したがって、 $\eta$ 、 $\zeta$ はせん断応力とせん断ひずみの無次元量となっている。Duncan-Changでは最小主応力一定の条件化で終局状態を決定したが、ここでは、下図に示すように現在のモールの円が中心が変わらないで大きくなったとしたときのモールの円の半径の比を応力比として設定したわけである。



せん断変形挙動を, 次式の様に表現する。

 $(7.3.7) \qquad \eta = \eta(\xi)$ 

式(7.3.7)に拘束圧が陽な形が入っていないので、*ξ*の関数であるη(*ξ*)には自由な数学モデルを使う ことが出来るのが本手法の特徴である。実験値が離散化された点で与えられている場合には、た とえば部分線形関数を用いれば、せん断定数のひずみ依存性は完全に満たすことが出来る。

偏差ひずみ増分 deii に対応する無次元量 d ξii は,式(2)の第2式との類似から次のように置く。

 $(7.3.8) \qquad d\xi_{ij} = de_{ij}G_{\max} / \tau_{\max}$ 

式(7.3.8)と式(7.3.7)を微分して得られる接線剛性  $g=d\eta/d\xi$ を用いれば、増分後の偏差応力  $s_{ij}$ は次式 により求めることが出来る。

(7.3.9)  $s_{ij} = (\eta_{ij,o} + gd\xi_{ij})\tau_{\max}$ 

ここで、 $\eta_{ij,o}$ は増分前の $\eta$ の値である。

繰返し載荷時には、3.3節で行ったように、仮想の骨格曲線を考え、これに Masing 則を適用する。仮想の骨格曲線は、①等価減衰比が実験値と一致する、②除荷点を通るの二つの条件を満たすことが最低限要求され、このためには二つ以上のパラメータを持つ数学モデルが必要である。 もっとも簡単なモデルとして、双曲線モデルを用いるとすれば、除荷以降の挙動は次式で表される。

(7.3.10) 
$$\eta - \eta_B = \frac{a(\xi - \xi_B)}{b + \frac{(\xi - \xi_B)}{2}}$$

ここで、 添字 B のついた量は、 除荷点 B における値を表している。

式(7.3.10)のパラメータ *a*, *b* は先に述べた二つの条件より決めることが出来る。履歴曲線,式(7.3.10)に対する仮想の骨格曲線は次式である。

$$(7.3.11) \quad \eta = \frac{a\xi}{b+\xi}$$

この骨格曲線が,除荷点 ( $\xi_B$   $\eta_B$ )を通るという条件は,式(7.3.10)の $\xi$ ,  $\eta \epsilon \xi_B$ ,  $\eta_B$  で置き換える ことによって求められる。

履歴曲線である式(7.3.10)のループより等価減衰比 h を求めると次式となる。

(7.3.12) 
$$h = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2(1+x)}{x^2} (x - \ln(x+1)) - 1 \right]$$

ここで,  $x=\xi/b$  である。したがって,除荷点の応力やひずみの関数としてhの値が与えられていれば,式(7.3.12)を解くことでbの値が求まり,次に式(7.3.11)よりaの値を求めることが出来る。

なお,式(7.3.12)の計算は,xの値が小さいときにはコンピュータの丸目の誤差のため正しく計算できない。この場合には、テイラー展開による近似化を行い、

(7.3.13) 
$$\ln(x+1) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$$

とおけば、式(7.3.12)は次のようになるので、これを用いる。

(7.3.14) 
$$h = \frac{2}{\pi} \left( \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{10} - \frac{2x^4}{5} \right)$$

ここで提案したモデルは、自由な数学モデルを使えること、離散した点で与えられたせん断定 数と等価減衰比のひずみ依存性を完全に満たすことが出来るという特徴があり、さらに、弾塑性 論に基づく定式化に比べ式も簡単になっている。

なお、二次元問題では各諸量は次のように表される。

# 7.3.3 繰返し載荷に対する扱い

応力比により校正される多次元の座表系を考える。処女載荷に対する降伏曲面はここで円形で あるとする。図のように、除荷するたびに新しい記憶曲面を確保していくとする。新しい記憶曲 面は、除荷点で以前の記憶曲面に接するように動くとする。この記憶曲面は図で点線で示した Mohr-Coulombの破壊円を限界の大きさとする(応力-ひずみ関係の定義によっては必ずしもそう ではない)。



図7.3.2 繰返しに対する後続降伏曲面の応力比空間での動き

除荷点の応力比に添字 R,除荷時の記憶曲面の中心にOの添字をつけることにすると,現在の 記憶曲面の中心(チルダをつけて示すことにする)は次のように表される。  $\tilde{n} = kn + (1-k)n$ 

(7.3.15) 
$$\eta_{ij} = k \eta_{ij,c} + (1 - k) \eta_{ij,R} \\ k = \frac{(\eta_{ij} - \eta_{ij,R})(\eta_{ij} - \eta_{ij,R})}{2(\eta_{ij} - \eta_{ij,R})(\eta_{ij,c} - \eta_{ij,R})}$$

したがって、最初の円から順番に追いかけていけば、現在の記憶曲面を確定することができる。 除荷の判定は次のようになる。今, *i* 番目の除荷範囲にいるとする。その時の除荷点に*R*, その 除荷円の中心を*c*の添字で表す。現在の応力点に対応する記憶曲面はこの2点を結ぶ直線上にある ので、記憶曲面の中心にチルダを付けると、

(7.3.16)  $\widetilde{\eta} = \eta_{R} + R(\eta_{c} - \eta_{R})$ 

一方,中心から前回の除荷点および現在の応力点への距離は等しいので,

(7.3.17)  $(\eta - \tilde{\eta})^2 = (\eta_R - \tilde{\eta})^2$ 

両式より $\tilde{\eta}$ を消去すると、Rに関し解くことが出来、

(7.3.18)  $(\eta - \tilde{\eta})^2 = 2R(\eta - \eta_R)(\eta_c - \eta_R)$ 

ここで, *R*>1であれば正の方向に過去の記憶曲面より飛び出した, また, *R*<0であれば過去の記憶曲面の負の方向に飛び出したことになる。

単調載荷時にはこの曲面における現在の降伏曲面の半径が応力比と対応していた。この延長に 従えば、繰返し載荷時でも、継続降伏曲面の半径を応力比としてとらえるのが自然である。しか し、この置き方は、静止土圧係数 K<sub>0</sub>の値に関わらず動的変形特性が同じになるという実験事実を 説明しない<sup>10)</sup>。その代わりとして除荷点から現在の応力点までの距離の半分を応力比として用い ることにする。

#### 7.3.4 各種モデル

各種モデルに対する式は、次のようになる。

#### ①双曲線モデル

(7.3.19) 
$$\sigma_{e} = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$
(7.3.20) 
$$\eta_{e} = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma}$$

(7.3.21) 
$$G' = \frac{\partial \eta_e}{\partial \Gamma} = (1 - \eta_e)^2$$

ただし、Dancan-Chang の $R_f$ に対応させる意味で、せん断強度を $1/R_f$ 倍することにすれば、

(7.3.22) 
$$\eta_e = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma / R_f}$$
  
(7.3.23) 
$$G' = \frac{\partial \eta_e}{\partial \Gamma} = \left(1 - \eta_e / R_f\right)^2$$

②R-0 モデル

(7.3.24) 
$$e = \frac{\sigma_e}{G_{\max}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}} \right)^{\beta - 1} \right)$$
  
(7.3.25) 
$$\Gamma = \eta_e \left( 1 + \alpha \eta_e^{\beta - 1} \right)$$

(7.3.26) 
$$G' = \frac{\partial \eta_e}{\partial \Gamma} = \frac{1}{1 + \alpha \beta \eta_e^{\beta - 1}}$$

#### ③表形式の入力

動的変形試験の結果を用いる場合には, *G-y*, *h-y*関係が表形式で入力されることになる。全応 力解析であれば,これをそのまま使えることは既に示したとおりである。しかし,有効応力解析 に使うには,少し検討が必要である。

まず,全応力解析に用いる際の使い方を整理する。最初の注意点は,拘束圧である。実験と解 析で同じ拘束圧を用いるのであれば,特に何の問題もなく,*G-y*,*h-y*関係から*r-y*,*h-y*関係が求ま ることは簡単に理解できる。すなわち,以下の関係を用いればよい。

(7.3.27)  $\tau = G\gamma$ 

これに対して、実験と解析で異なる拘束圧を用いる場合には、実験値を解析で用いる拘束圧に 変換する必要がある。この変換はたとえば次のようにして行うことが出来る<sup>8)</sup>。

$$(7.3.28)\frac{G}{G_{max}} = \left(\frac{G}{G_{max}}\right)_{a} \frac{1 + \gamma A \sigma_{0}^{\prime m-1} / B}{1 + \gamma A \sigma^{\prime m-1} / B}, \quad h = h_{0} \frac{1 - G / G_{max}}{1 - (G / G_{max})_{0}}$$

ここで、係数 A, B はそれぞれ、次の様に弾性定数とせん断強度を決める際の定数である。

(7.3.29)  $G_{max} = A\sigma_m^{\prime m}, \quad \tau_{max} = B\sigma_m^{\prime n}$ 

また,添え字0はある実験値に対応する量を表している。なお,実験値ではなく,実験式を用いる 場合には,その式が拘束圧依存をもとにして示されているものもある。そのような場合にはそれ を使えばよい。

次に有効応力解析では解析中に有効拘束圧が変化する。この場合でも上記の様な拘束圧の値を もうけても良いが、二つの面で必ずしも適当とはいえない。まず第一には、これまでに示した理 論がせん断弾性定数(基準ひずみ)とせん断強度で応力-ひずみ関係が無次元化出来ることを基 本としている。もう一つは、上記のような実験式などが、液状化の発生するような非常に低拘束 圧下まで拘束圧依存性を保証するものではないということである。そこで、STADAS では初期状 態で与えられた拘束圧のもとで応力-ひずみ関係を求め、これをそのときの基準ひずみとせん断 強度で無次元化したものが拘束圧に依存しないという考えを追加することにする。

#### 7.3.5 体積変化特性

## (1) 拘束圧のべきに依存するモデル

一般に用いられる体積変化特性は次の様に表される。

 $(7.3.30) \quad d\sigma'_m = K_0 \sigma'^m_m d\varepsilon_v$ 

べき n には0.5または1.0が使われることが多い。ここで、0.5はポアソン比一定を仮定し、せん断 弾性係数の拘束圧依存性とべきをあわせようというもの、1.0は拘束圧の対数と間隙比 e が直線関 係という圧密解析でよく用いられる式にあわせたものである。通常の拘束圧下であれば係数の選 び方次第でどちらを用いても解析結果はそれほど影響を受けない<sup>11)</sup>。

# (2) 圧密型のモデル

膨潤過程のみを扱うのであれば、前項のモデルはどちらでも構わない。しかし、STADAS で持っている他の機能を用いる場合には正規圧密状態に対する配慮も必要である。この場合には、正規圧密、過圧密の両方に対して拘束圧の対数と間隙比 e が直線関係で表されるという考えを用いる。体積ひずみと間隙比の関係は次式で表される。

(7.3.31) 
$$d\varepsilon_v = \frac{-de}{1+e}$$

これをを積分すると、次のようになる。

(7.3.32) 
$$\varepsilon_v = \ln\left(\frac{1+e_o}{1+e}\right), \quad \forall t \ge 0, \quad e = \frac{1+e_o}{e^{\varepsilon_v}} - 1$$

これで体積ひずみより間隙比 e が求まる。

正規圧密とすれば、

(7.3.33) 
$$\sigma'_m = e^{\ln\sigma'_{m0} - \frac{e-e_o}{\lambda}}$$
次に それ以外の場合には

(7.3.34)  $\sigma'_m = e^{\ln \sigma'_{mB} - \frac{e - e_B}{\kappa}}$ 

ここで、 添字 B は前の値の意味である。 つぎに、 接線剛性(体積弾性係数)は次式で求められる。

(7.3.35) 
$$B = \frac{d\sigma'_m}{d\varepsilon_m} = \frac{\sigma'_m}{\kappa} (1+e)$$
 ただし、 Kはんの事もある。





# (3) 吉田のモデル

上記二つのモデル化は土質力学のほとんどの構成則で用いられている。しかし、吉田はこれら のモデル化が液状化解析、すなわち非常に低拘束圧になることもあるケースに対しては問題があ ることを指摘した<sup>12)</sup>。すなわち、圧密モデルでは拘束圧が0になると体積ひずみは無限大になる。 このモデルは圧密解析のように拘束圧が増加する場合には適用できるかもしれないが、液状化解 析のように拘束圧が0になるような液状化解析では実状にあわない。

また,上記二つのモデルでは体積ひずみは拘束圧の変化に対して一意的に決まる。つまり,液 状化した状態から過剰間隙水圧が消散すると拘束圧の変化に応じて体積変化が一意的に決まるわ けである。しかし,実験結果<sup>13)</sup>によると,過剰間隙水圧消散後の体積変化は液状化以後に受けた 載荷量に依存する。 このような現象を説明するために、吉田らは次の式を提案した14)15)。

(7.3.36) 
$$\sigma_m = \frac{e^{\varepsilon_v/c} - 1}{e^{\varepsilon_{v0}/c} - 1} \sigma_{m0}$$

ここで、 $\epsilon_{v}$ は体積ひずみ、 $\sigma_{m0}$ は過剰間隙水圧消散後の拘束圧、 $\epsilon_{0}$ はこの時に生じた体積ひずみである。cは曲線の形状を決めるためのパラメータで、豊浦砂の実験結果<sup>14)</sup>とのフィットから次式が用いられた。

 $(7.3.37) \quad c = 0.0007 + 0.053\varepsilon_{vo}$ 

この式は、全ひずみに対する関数となっており、使いにくい。そこで、これを増分形に改める。

式(7.3.36)をよで微分し、その結果と式(7.3.36)からよを消去すると、次式を得る。

(7.3.38) 
$$d\sigma_m = \frac{1}{c} \left( \sigma_m + \frac{\sigma_{m0}}{e^{\varepsilon_{v0}/c} - 1} \right) d\varepsilon_v$$

ここで、式(7.3.38)の括弧内の第2項の値は小さく、 $\sigma_m$  が極端に0に近くない限り無視できる。 そこで、この項を無視すると、

(7.3.39) 
$$d\sigma_m = \frac{\sigma_m}{c} d\varepsilon_v$$

すなわち,体積弾性係数は拘束圧に比例しており,式(7.3.35)と同じである。また,式(7.3.36)は $\sigma_m \rightarrow 0$ のとき $\epsilon_r \rightarrow 0$ になるので, $\sigma_m \rightarrow 0$ の時体積ひずみが無限大になるという欠点を直していることになる。この時, *c* は圧縮指数 *C<sub>c</sub>*,初期間隙比  $e_0$ と次の関係がある。

(7.3.40)  $c = \frac{C_c}{(1+e_0)\ln 10} = \frac{\kappa}{1+e_0}$ 

これらを考慮すると、したがって、式(7.3.38)のcは次の様に表すのが便利である。

 $(7.3.41) \quad c = c_0 + c_1 \varepsilon_{vd}$ 

ここで、 $c_0$ は初期値で、式(7.3.40)から求まる値、 $\epsilon_{vd}$ はダイレタンシーにより生じた(非排水状態では仮想の)体積ひずみである。拘束圧が0から $\sigma_m$ までの体積変化量は $\epsilon_{v0}$ で規定されるので、 $c_1$ はダイレタンシーにより生じた体積ひずみにより、応力ーひずみ関係の曲率がどのように変化するかを表すパラメータとなっている。なお、式(7.3.36)では $\sigma_{m0}$ 、 $\epsilon_0$ は過剰間隙水圧消散後の値と定義されているが、増分式では、 $\sigma_{m0}$ は初期有効拘束圧、 $\epsilon_0$ は拘束圧が0から $\sigma_{m0}$ まで変化したときの体積ひずみと考える。

同様に、式(7.3.36)の ενο は次のように置く。

 $(7.3.42) \qquad \varepsilon_{v0} = \varepsilon_{v0i} + \varepsilon_{vd}$ 

ここで、 $\epsilon_{0i}$ は初期の体積ひずみ、すなわち、初期状態から拘束圧を0にしたときに発生する体積 ひずみであり、既往モデルでは要求されない新しいパラメータである。 $e-\ln \sigma_m$ 平面上で応力ーひ ずみ挙動を見たとき、 $c_0$ は初期拘束圧付近での膨潤曲線の勾配を表し、一方、 $\epsilon_{0i}$ は膨潤曲線が最 終的にどこで  $\ln \sigma_m$ 軸に平行になるかを表している。

ここで示したモデルは、式(7.3.36)に比べ、式(7.3.41)の *c*<sub>1</sub>、式(7.3.42)の*ɛ*<sub>v0i</sub>の二つのパラメータ がよけいに必要となる。このうち前者は式(7.3.37)に示したように、きれいな砂では0.053を使用す ることが出来る。後者は、既往のモデルでは有効拘束圧が0に近づくと間隙比が無限大になるとい うことを仮定していたので必要が無かった量であるが、この欠点を改良するためには必要となる。

#### 7.3.6 ダイレタンシーモデル

前項で示したように、このモデル化手法では、ひずみ増分からダイレタンシーによる体積ひず みが求まるのであれば、どのようなモデルを用いることも可能である。代表的なモデルには次の ようなものがある。 (1) お椀モデル

ダイレタンシー挙動を蓄積成分と可逆成分に分け、その和として数式表示する<sup>16)</sup>。しかし、原 モデルは軸差応力を考慮していない等、そのままでは多次元解析に用いることは困難である。そ こで、これを若干修正し、

(7.3.43) 
$$\varepsilon_{\rm vd} = Ae^{\rm B} + \frac{\int de}{C + \int de/D}$$

と表現する。ここで、A~D は調整用のパラメータである。また、第1項が可逆的な成分で、サイ クリックモビリティに相当する挙動を代表し、第二項が蓄積成分である。また、せん断応力比が 小さい載荷に対しては液状化が発生しないことを考慮するために、式の相当ひずみは、相当せん 断応力比がしきい値を越えたところから計算を始める量となっている。

ひずみ増分が無限大になると、第二項は*D*となる。すなわち、*D*は最大蓄積体積ひずみである。 非排水状態を考えると、本来この値は圧密成分による体積ひずみより大きくなれないはずである が、そうすると排水が起こったときの体積変化が説明できなくなる。そこで、実際には*D*の値は これより大きい値を必要とする。

なお,文献16)ではせん断変形に Ramberg-Osgood モデルを用いているが,吉田モデルのような 降伏の概念は用いられていない。従って,同じパラメータを用いても結果は全く異なったものと なる。

#### (2) 応カーダイレタンシー関係

三軸試験の整理としてもっとも広く用いられるダイレタンシーの式は,カムクレイモデルのエ ネルギー消散式から導かれる次のようなものである。

(7.3.44)  $\frac{d\varepsilon_{\rm vd}}{de^p} = \mu - \frac{q}{p}$ 

ここで, µは変相時の応力比, p, q は拘束圧と軸差応力, 添え字の p は塑性成分を表している。 しかしこの式は多次元応力場では使いにくい。そこで, これを一般化応力で表現した式<sup>17)</sup>

(7.3.45) 
$$d\varepsilon_{\rm vd} = \mu de^{\rho} - \frac{s_{\rm ij} de_{\rm ij}^{\rho}}{\sigma_{\rm m}}$$

を用いることにする。なお、この式を実験値と比較してみると、必ずしも実験値と一致している 訳ではない。特に、繰返し載荷に対しては、サイクリックモビリティ以降履歴曲線ら定常化する という欠点も持っている。そこで、実際の計算ではこれに適当な乗数を掛けることによって実験 との一致をはかっている。

式(7.3.45)では、塑性ひずみ増分が用いられている。一方、これまでの定式化では弾性成分と塑 性成分を分離しなかった。無次元化応力上では弾性剛性が1、接線剛性がgで表されている。従っ て、与えられたひずみ de に対する塑性成分は(1/g-1) de である。

# 7.4 拘束圧依存・弾性モデル

この構成則は、弾性のモデルであるが、各係数は拘束圧に依存しているモデルである。すなわち、

(7.4.1) 
$$G = G_o \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_o}\right)^n$$
  
(7.4.2) 
$$B = B_o \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_o}\right)^m$$

ここで、 $\sigma'_m$ は有効拘束圧、 $\sigma'_o$ は基準有効拘束圧、 $G_o$ 、 $B_o$ は基準拘束圧下におけるせん断弾性定数および体積弾性係数である。有効拘束圧が負(引っ張り力を受けているとき)には剛性は0となる。

# 7.5 流動を考慮したモデル

## 参考文献

- 1) 石原研而他(1989):地盤および土構造物の有効応力解析,「地盤と土構造物の地震時挙動」 に関するシンポジウム発表論文集,土質工学会,pp.50-136
- 2) 吉田望(1999):有効応力解析に用いられる構成則,液状化メカニズム・予測法と設計法に 関するシンポジウム発表論文集,地盤工学会, pp. pp. 78-88
- Finn, W. D. L., Yogendrakumar, M., Yoshida, N. and Yoshida, H. (1986): TARA-3, a program for nonlinear static and dynamic effective stress analysis, Soil Dynamic Group, University of British Columbia, Vancouver
- 4) 福武毅芳,大槻明(1993): ALISS による解析,地盤の液状化対策に関するシンポジウム, 土質工学会, pp. 125-134
- Duncan, J. M. and Chang, C. Y. (1970): Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, Jour. of SM, Vol. 96, No. SM5, pp. 1629-1653
- 6) 吉田望, 辻野修一(1993): 多次元解析に用いる簡易な構成則, 第28回土質工学研究発表会 平成5年度発表講演集, pp. 1221-1224
- Tsujino, S., Yoshida, N. and Yasuda, S. (1994): A simplified practical stress-strain model in multi-dimensional analysis, Proc., International Symposium on Pre-failure Deformation Characteristics of geomaterials, Sapporo, pp. 463-468
- 8) 吉田望, 辻野修一, 石原研而: 地盤の1次元非線形解析に用いる土のせん断応力--せん断ひ ずみ関係のモデル化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(中国), 1990, pp.1639-1640
- 9) 吉田望, 辻野修一, 中島智樹, 矢野康明:多次元解析に用いる簡易な構成則 その2 ダイレ タンシーの考慮, 土木学会48回年次学術講演会講演概要集, 第3部, pp.1218-1219, 1993
- Yoshida, N. (1996): Initial stress effect on response of level ground, Proc, 11th WCEE, Acapulco, Mexico, Paper No. 1023
- 11) 吉田望(1998):地震応答解析に用いる地盤物性をどう評価するか,建築基礎の設計施工に 関する研究資料4,液状化地盤における基礎設計の考え方,日本建築学会構造委員会基礎構造 運営委員会編,日本建築学会,pp.29-45
- 12) 吉田望, 規矩大義(1997): 液状化解析に用いる砂の体積変化特性モデルに関する検討, 第 32回地盤工学研究発表会講演集, pp. 889-890
- 13) Ishihara, K. (1996): Soil Behavior in earthquake geotechnics, Oxford Science Publications, p.309
- 14) 吉田望, 辻野修一, 稲童丸征巳: 液状化に伴う地盤沈下予測に関する基礎的研究, 第29回土 質工学研究発表会講演集, pp.859-860, 1994
- 15) Yoshida, N., et al (1994): Behavior of Sand After Liquefaction, Proc., 5th U.S.-Japan Workshop on Earthquake Resistant Design of Lifeline Facilities and Countermeasures Against Soil Liquefaction, Salt Lake City, pp.181-198
- 16) 福武毅芳,大槻明(1993): ALISS による解析,地盤の液状化対策に関するシンポジウム, 土質工学会,pp. 125-134
- Gutierrez, M. (1989). Behavior of sand during rotation of principal stress direction, D. Eng. Thesis, University of Tokyo.

#### 8 ジョイント要素

STADAS で用いているのは、Goodman タイプ<sup>11</sup>のジョイント要素である。Goodman はジョイン ト要素に関し、二つの定式化を示している<sup>1)2)</sup>。ここで示すことから明らかなように、そのうち後 者は FEM 解析、特に非線形解析には好ましくない。また、前者は要素剛性マトリックスの算出方 法しか示されていないが、非線形解析では、得られた要素の応力から等価接線剛性を算出する過 程も重要であり、ここではこれに関し、要素中心の値を代表値とするだけで可能な新しい定式化 を示す。さらに、STADAS では、Biot の式に基づく圧密解析や、液状化解析が可能であるので、 ジョイント要素もそれに適合するように修正されている。

#### 8.1 基礎式

ジョイント要素は、図8.1.1のようにモデル化される。ここで、ジョイント要素は y 方向には幅 がない要素であるが、図では幅を持って示されている。二次元解析では、ジョイント要素は4つの 節点で構成されるので8つの変形の自由度を持っている。その中の3つは、剛体変位(x, y 方向お よび回転)であるので、変形に関与する自由度は5である。図8.1.2に示す5つの変形はそのような 独立な変形モードの例であり、(a)(c)は法線方向の、(b)(d)は接線方向の変形である。(e)の変形に関 してはジョイント要素は元々剛性を持っていないので、以下では考えない。なお、以下の式の誘 導では、法線方向の変形モード(a)(c)と接線方向のモード(b)(d)とは形式的には同じ式となることか ら、以下では一方のモードについてのみ示すことにする。両者を区別することが必要な場合には、 それぞれ添字 n, s で両者を区別することにする。



図8.1.1 ジョイント要素の模式図と記号



ジョイント要素の上の辺の下の辺に対する相対変位をwとし、式(8.1.1)のように表わす。 (8.1.1)  $w = w^{top} - w^{bottom} = \{B\}\{u\}$ 

ここで、{B}は補間関数で、次式のような仮定する。

(8.1.2)  $\{B\} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L} - \frac{1}{2} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right\}$ 

図8.1.2の独立な変形モードはこれを次のように二つの関数の和として表わしたことに相当している。

$$(8.1.3) \qquad \{B\} = \left\{-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{L} \quad -\frac{x}{L} \quad +\frac{x}{L} \quad -\frac{x}{L}\right\} = \left\{B^{\circ}\right\} + \left\{B^{H}\right\}$$

要素の単位長さ当りの剛性をk,単位長さ当りの応力をsで表すと,

 $(8.1.4) \qquad \sigma = kw$ 

の関係がある。したがって、図8.1.2の(a)(b)の変形モードに対する等価節点力

(8.1.5)  $\{F^o\} = \{F_1^o \ F_2^o \ F_3^o \ F_4^o\}^r$ は1点ガウス積分を用いれば次のように計算出来る。

$$(8.1.6) \qquad \left\{F^{\circ}\right\} = \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{B^{\circ}\right\}^{\mathsf{T}} \sigma dx = \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{B^{\circ}\right\}^{\mathsf{T}} k\left\{B^{\circ}\right\} dx\left\{u\right\} = L\left\{B^{\circ}\right\}^{\mathsf{T}} k_{c}\left\{B^{\circ}\right\}\left\{u\right\} = \left[K^{\circ}\right]\left\{u\right\}$$

ここで、添字 c は要素中心における値を表している。また、  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 

ここでは,要素剛性マトリックスを計算するのに要素中心の値を代表値として用いていることに 着目されたい。

次に、図8.1.2のモード(c)(d)は、第1章で示した砂時計モードと同じものであるので、同じ考えを使ってその剛性を求めることができる。砂時計モードに対する基底ベクトルを $\{h\}=\{1 -1 \ 1 \ -1\}^{T}$ で表わすとすれば、補間関数が

(8.1.8) 
$$\left\{ B^{H} \right\} = \left\{ \frac{x}{L} - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L} - \frac{x}{L} \right\}$$

で表わされるので、相対変位は、次式で表わされ、

(8.1.9)  $w^{H} = \{B^{H}\}\{u\}$ 

砂時計変形に対する等価節点力{F<sup>H</sup>}は次式となる。

(8.1.10) 
$${F^{H}} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} {B^{H}}^{\mathsf{T}} k {B^{H}} dx {u} = \frac{k_{c}L}{12} {h} {h}^{\mathsf{T}} {u}$$

すなわち,要素剛性マトリックス[K<sup>H</sup>]は次のようになる。

(8.1.11) 
$$[K^{H}] = \frac{k_{c}L}{12} \{h\} \{h\}^{T}$$
 (3.6.11)

ジョイント要素の全体としての要素剛性マトリックスは式(8.1.4)と(8.1.6)の和として求められ, これは Goodman が最初に示したもの<sup>1)</sup>と結果的には同じものである。一方, Goodman の二つ目の 誘導<sup>2)</sup>では,ジョイント要素を代表させる一般化ひずみとして

(8.1.12) 
$$\begin{cases} \varepsilon_s \\ \varepsilon_n \\ \omega \end{cases} = \frac{1}{2L} \begin{cases} u_{s,3} + u_{s,4} - u_{s,1} - u_{s,2} \\ u_{s,3} + u_{s,4} - u_{s,1} - u_{s,2} \\ 2(u_{s,3} - u_{s,4} - u_{s,2} + u_{s,1}) \end{cases}$$

を考えているが、このうち最初の二つは図8.1.2の(a)(b)に対応し、最後は(c)に対応しているが、(d) の変形モードが考えられていない。また、モード(c)に対する剛性も上で示したものとは異なって いる。自由度の数から見てこの扱いでは任意の外力に対して得られた応力から外力と同じ等価節 点力を求めることができないことは明らかであり、この意味で二つ目の定式化は正しくない。



図8.1.3 非線形解析で砂時計剛性を考えるときの剛性の考え方

ここでは4つの変形モードを考えているので、少なくとも4つの応力成分が一つの要素内で必要 である。通常の有限要素解析のように2点以上のガウス積分をすれば、1点で二つの応力成分があ るのでこの条件を満たしている。しかし、そのためには要素中心以外の点の応力も必要となる。 通常の要素との整合を取るために、ここでは要素中心の状態変数のみで処理できる方法を示す。

図8.1.2の(a)(c)の変形モードに関しては、式(8.1.6)より、

(8.1.13)  $\{F^o\} = \{B^o\}\sigma_c$ 

次に、砂時計変形に関しては、一般化応力と一般化ひずみを  $Q \ge q$  で表わすことにすれば<sup>3)</sup>次式 が成立する。

(8.1.14) 
$$\{F^H\} = \{h\}Q, \quad q = \{h\}^T \{u\}, \quad Q = cq, \quad c = \frac{k_c L}{12}$$

ここで *h*, *k*<sub>c</sub> は図8.1.3に模式的に, 増分時の見掛けの剛性 *k*<sub>sec</sub> である。式(8.1.13)と(8.1.14)より, 等価節点力が要素中心の状態量のみで表わされることがわかる。

#### 8.2 2相系材料への適用

Biot の式に適用するために有効応力の概念を導入する。法線方向応力について、有効応力を次のように定義する。

 $(8.2.1) \qquad \sigma'_n = \sigma_n - p$ 

ここで, *p*は間隙水圧である。これまでと同じく間隙水圧について1次低い補間を考える。すなわち,間隙水圧は要素内で一定とする。すると,水に関する釣合式は自動的に満たされることになる。

式(8.2.1)を式(8.1.4)(8.1.10)に代入すれば、全体の釣合式は次のようになる。

 $(8.2.2) \qquad \{F_n\} = \{F_n^o\} + \{F_n^H\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B\}^{\mathsf{T}} \sigma_n dx = ([K_n^o] + [K_n^\kappa])\{u_n\} - \{K_p\}p = [K_n]\{u_n\} - \{K_p\}p$ 

ここで,

(8.2.3) 
$$[K_p] = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B^o\}^{\mathrm{T}} dx = \{B^o\}^{\mathrm{T}} L$$

間隙水圧マトリックスである。

水がジョイント要素の辺の部分のみから流入,流出するとすれば単位時間に要素に流入する水 量Wは次の様にして求めることができる。

(8.2.4) 
$$W = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \dot{w}_n dx = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \dot{U}_{n,top} - \dot{U}_{n,bottom} \right) dx$$

ここで、Uは水の変位である。一方、この間のジョイント要素の容積の変化は $\{K_p\}^{T}$  $\{u_n\}$ で表わされるので、連続の式は最終的に次のように書くことができる。

(8.2.5)  $\{K_p\}^{\mathrm{T}}\{\dot{u}_n\} = -\int_{topside} \left[N_{top}\right] dx \{\dot{U}_{top}\} + \int_{bottomside} \left[N_{bottom}\right] dx \{\dot{U}_{bottom}\}$ 

ここで,[*N*]は隣接要素の水に関する補間関数である。通常の有限要素解析では補間関数としてその要素自身のものを使うが,ジョイント要素では要素内では水圧の勾配がないため隣接要素のそれを用いざるを得ないのが要素としての欠点である。

式(8.2.2) (8.2.5)は u-U-p 形式の定式化である。水圧 p の項は式(8.2.2)にしか表われないので u-U 形式の定式化はできない。u-p 形式については、第1章の方法と同じように定式化できる。

要素内に単位時間に流入する水量は次式で求められる。

(8.2.6) 
$$W = L\left(\kappa_{top} \frac{h - h_{top}}{\ell_{top}} + \kappa_{bottom} \frac{h - h_{bottom}}{\ell_{bottom}}\right)$$

ここで, k は透水係数である。また, h は水頭で,

(8.2.7) 
$$h = \frac{p}{\rho_f g} - \frac{\{X\}^{\mathrm{T}}}{g} (\{b\} - \{\ddot{u}\})$$

ここで、{b}は重力ベクトルである。一方、ジョイント要素の体積変化は式(8.2.5)の左辺で表わされ、連続の式は次のようになる。

(8.2.8)  $\{K_{p}\}^{\mathsf{T}}\{\dot{u}_{n}\} = W = \alpha \left(p - \rho_{f}\{X\}^{\mathsf{T}}(\{b\} - \{\ddot{u}\})\right) - \sum \alpha_{i} \left(p_{i} - \rho_{f}\{X_{i}\}^{\mathsf{T}}(\{b\} - \{\ddot{u}_{i}\})\right)$  $\subset \subset \mathfrak{C},$ 

(8.2.9) 
$$\alpha_i = \frac{L\kappa_i}{\rho_i g\ell_i}, \quad \alpha = \sum \alpha_i$$

であり、添字 i は top または bottom であり、総和は上下辺を指す。水頭に与える運動エネルギーの項  $\rho_r$ {ii}を無視するとすれば(8.2.6)式は次のようになる。

(8.2.10)  $\{K_p\}^{\mathsf{T}}\{\dot{u}_n\} = W = \alpha \left(p - \rho_f \{X\}^{\mathsf{T}}\{b\}\right) - \sum \alpha_i \left(p_i - \rho_f \{X_i\}^{\mathsf{T}}\{b\}\right)$ 

式(8.2.2)と(8.2.8), または(8.2.2)と(8.2.10)の組み合わせが u-p 形式の定式化である。このままで は係数マトリックスは非対称であるので、1章と同様の処理をする。まず、時間増分 dt について 速度と加速度の増分を次のように表わし、

(8.2.11) 
$$\frac{\partial u}{\partial t} dt = du, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt = d\dot{u}$$

これを式(8.2.2)と(8.2.10)に代入し,

(8.2.12)  $[K_n] \{ du_n \} - \{ K_p \} p = \{ dF_n \} - \{ K_p \} p_{t-dt}$ 

$$(8.2.13) \quad \left[K_{p}\right]^{\mathrm{T}} \{du_{n}\} = \alpha \mathrm{d}t \left(p - \rho_{f} \{X\}^{\mathrm{T}} \{b\}\right) - \sum \alpha_{i} \mathrm{d}t \left(p_{i} - \rho_{f} \{X_{i}\}^{\mathrm{T}} \{b\}\right)$$

ここで、*p<sub>t-dt</sub>*は増分計算開始時の間隙水圧の値である。

これまではジョイントの上下の辺のみから水の流入,流出を考えたが,横の部分からの成分も 考えるときには,式(8.2.9)の計算の際, k/ℓの項に適当に大きい値を入れておけばよい。

#### 9 固有値解析

# 9.1 標準固有値問題への変換

多自由度系の非減衰自由振動に対する運動方程式は、質量マトリックスを[*M*]、剛性マトリックスを[*K*]、変位ベクトルを{*u*}、ドットを時間に関する微分を表すとすれば、次式で表せる。

 $(9.1.1) \qquad [M]{\ddot{u}} + [K]{u} = \{0\}$ 

ここで,変位{u}を次のように仮定する。

 $(9.1.2) \qquad \{u\} = \{X\}e^{i\omega t}$ 

式(9.1.2)を式(9.1.1)に代入し、e<sup>iot</sup> ≠0を利用すれば、次式を得る。

(9.1.3)  $(-\omega^2[M] + [K]){X} = {0}$ 

したがって、 {0}でない解が成立する条件は係数行列式が次の条件を満たすことである。

(9.1.4)  $\left| -\lambda[M] + [K] \right| = 0$ 

ここで,

 $(9.1.5) \qquad \lambda = \omega^2$ 

式(9.1.4)が自由振動に関する固有値問題である。

一般に、式(9.1.4)はN次(Nは構造自由度数)の多項式であり、[M]と[K]の性質から、N個の正の値が得られる。すなわち、振動モードの数はNである。しかし、STADASでは集中質量を採用しているので、[M]は対角行列であり、質量や慣性モーメントが0と入力された場合には、式(9.1.4)の多項式の1に関する次数は減少する。このことは、集中質量を用いている手法にのみ現れる現象ではなく、コンシステントマスを用いた場合でも同じことである。質量または慣性モーメントが0の自由度が no 個あるとすれば、式(9.1.4)は1に関して n=N-no 次の多項式となり、独立な振動モードの数は n 個となる。n を動的自由度と呼ぶ。以下では、まず、n=N のばあいについて式(9.1.4)を標準固有値問題に変換し、次に、n<N の場合の修正について述べる。

STADAS では集中質量を用いているので, [*M*]は対角行列であり, 次のように置くことができる。 (9.1.6)  $[M] = [\eta][\eta]$ 

ここで,

 $(9.1.7) \qquad \left[\eta\right] = \left[\sqrt{m_{ij}}\right]$ 

*m<sub>i</sub>*::*i*番目の自由度に対する質量(慣性モーメント)

である。式(9.1.6)を式(9.1.3)に代入し、左から[ $\eta$ ]<sup>-1</sup> ( $m_i$ >0なので、逆行列は存在する)を掛けると、次式を得る。

$$\left(-\lambda[\eta]+[\eta]^{-1}[K]\right)(X) = \{0\}$$

したがって,

(9.1.8) 
$$(-\lambda[I] + [\eta]^{-1}[K][\eta]^{-1})([\eta]{X}) = \{0\}$$
  
 $[I] = [\eta]^{-1}[\eta] : 単位行列$ 

式(9.1.8)がすべては0でない解を持つ条件として、標準固有値問題

(9.1.9)  $[[A] - \lambda[I]] = 0$  $[A] = [\eta]^{-1} [K][\eta] = [K_{\mu}\sqrt{m_{\mu}m_{\mu}}]$ 

が得られる。

次に、自由度の縮合(静的自由度から動的自由度への変換)を行なう。これは、これまでに述べてきた固有値を求める条件が、質量マトリックスの逆行列が存在するという事であったので、 質量マトリックスのランクが低い場合には適用出来ないからである。式(9.1.1)を自由度番号を付け 変え、質量マトリックスの成分が0の部分と0でない部分とに次のように分けたとする。

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{aa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_{a} \\ \ddot{u}_{b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{aa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{ab} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{a} \\ u_{b} \end{bmatrix} = \{0\}$$

すなわち,

 $(9.1.10) \quad [M_{aa}] \{ \ddot{u}_a \} + [K_{aa}] \{ u_a \} + [K_{ab}] \{ u_b \} = \{ 0 \}$ 

 $(9.1.11) \quad [K_{ba}]\{u_a\} + [K_{bb}]\{u_b\} = \{0\}$ 

式(9.1.11)を、 {u<sub>b</sub>}について解くと次式を得る。

 $(9.1.12) \quad \{u_b\} = -[K_{bb}]^{-1}[K_{ba}]\{u_a\}$ 

これを式(9.1.10)に代入すると次の式になる。

 $(9.1.13) \quad [M_{aa}]\{\ddot{u}_{a}\} + ([K_{aa}] - [K_{ab}][K_{bb}]^{-1}[K_{ba}])\{u_{b}\} = \{0\}$ 

式(9.1.13)では質量マトリックスの逆数は存在するので、前に述べたのと同様、固有値、固有ベクトルを求めることが出来る。{*u*<sub>a</sub>}に対する固有ベクトルが求まれば、対応する{*u*<sub>b</sub>}に対する固有ベクトルは式(9.1.12)より求めることができる。

#### 9.2 モード比例減衰

減衰マトリックスの求め方には、大きく分け、3つの方法がある。一つは実際の減衰係数を計測 し、係数として直接求める方法、もう一つは Rayleigh 減衰を用いて質量マトリックスと剛性マト リックスから求める方法、そしてこの節で述べる方法である。当然のことであるが、最初の方法 が最も正確である。しかし、実際には材料の持っている減衰係数を直接求めることは困難であり、 この方法が実務で用いられることはない。しかし、このことは実材料の減衰が求められていない と言うことを言うわけではなく、それらが間接的に求められているわけである。通常用いられる 方法は、起振機などを用いて、または自由振動により系に強制的な振動を与え、その応答特性か ら系の減衰特性を評価する方法である。そのような結果から得られた特性を減衰マトリックスに 具現化する手法が、この節で述べられる手法である。Rayleigh 減衰はそれらを簡易的に評価する ために用いられる。

この節で述べる方法は、建築構造物の解析では比較的多く用いられてきたが、従来あまり地盤 の解析では用いられて来なかった。その理由の一つは誘導の過程から明らかになるが、この節の 手法を用いると減衰マトリックスは一般にフルマトリックス(成分が全て0でないマトリックス) となることである。建築構造物の場合と異なり、地盤の解析では一般に自由度の数が多く、剛性 マトリックスや質量マトリックスはバンドマトリックスや対角マトリックスとして記憶領域の節 約を図り、また、計算時間の短縮を図っているのに対し、フルマトリックスが現れると、このよ うな処置が出来なくなり、記憶容量、計算時間とも大幅な増加となる。

もう一つの、そして多分最大の理由は、減衰に対する考え方にある。建築構造物では、対象構 造物は柱やはりといった構造部材に分割され、地盤との接続部分、すなわち基礎は固定として地 震応答解析が行われることが多かった。上部構造の減衰は実験により正確に計算出来る。ところ で、構造材料としての鉄やコンクリートの減衰、それ自身はあまり大きなものではないが、実際 の構造物では非構造部材もあり、それらは質量効果のみならず、減衰にも影響する。次に基礎固 定のモデル化をすると、いわゆる地下逸散減衰は考慮出来ない。したがって、これら二つの効果 を考慮しないと建物の振動を過大に評価する事になる。これを補正するために、これら効果を内 部減衰という形で評価してきたのが既存の考え方である。例えば、基礎固定と、SR モデルのよう な相互作用ばねをつけた場合の個材の内部減衰を変えることがよく行われるところであるが、こ れもこのような考えが基本にある。また、弾性解析で履歴減衰を適当に評価するにもこのような 考え方を準用することが出来る。

これに対して、地盤の解析では、このような恐れはあまりない。地盤材料では、建築構造物の 非構造部材に相当するような部材はなく、また、基盤の固定条件が問題であるなら、入射波入力 を行う解析も可能である。したがって、減衰マトリックスはここの材料の実際の減衰を基にして 作成すればよい。多くの実験結果によれば、地震による載荷速度程度ではそのような減衰力はそ れほど系全体の応答挙動に影響を与えないことが分かっている(このことは減衰がないことを意 味しているのではないことに注意されたい。地震による載荷速度,継続時間を考慮して系をモデ ル化すればという意味である)。したがって地盤の解析では非線形挙動を逐次積分して行く手法 を用いている多くの解析では,地盤材料固有の減衰は考慮せず,ただ,数値計算の安定性をあげ るために,高次の振動モードに対して減衰力が大きくなる剛性マトリックス比例減衰を導入し, 応答結果に支配的な低次のモードに対してはほとんど減衰を考慮しないという方法が多く用いら れてきている。弾性,等価線形のモデル化では内部減衰をモデル化するのにも用いられる。

このような意味では、ここで示すような減衰は、地盤の解析では必要がないと考えてもよい。 しかし、STADAS では多くの機能があり、モデル化によってはこのような減衰が用いられる事が 好ましい場合もある。

運動方程式を次のように表す。

 $(9.2.1) \qquad [M]{\ddot{u}} + [C]{\dot{u}} + [K]{u} = \{F\}$ 

ここで、{*F*}は外力ベクトルである。ここでは、この方程式が完全に非連成化される、すなわち固 有値解析が可能であると仮定し減衰マトリックスを求める。これは大きな仮定であり、実際の材 料ではこのような事が成立しているという保証はない。また、このような仮定を用いない手法も あるが、ここでは検討しない。

固有値解析の結果を用い、変位ベクトルを固有ベクトルの重ね合わせとして次のように表す。 (9.2.2)  $\{u\} = [\xi] \{q\}$ 

ここで,

また,  $\{q\}$ はモード変位である。これらを式(9.2.1)に代入し, さらに左から[ $\varsigma$ ]<sup>T</sup>を掛けると, 次式 を得る。

(9.2.3)  $[\xi]^{\mathsf{T}}[M][\xi]\{\ddot{q}\} + [\xi]^{\mathsf{T}}[C][\xi]\{\dot{q}\} + [\xi]^{\mathsf{T}}[K][\xi]\{q\} = [\xi]^{\mathsf{T}}\{F\}$ 固有関数のの直交性より,  $[\xi]^{\mathsf{T}}[M][\xi], [\xi]^{\mathsf{T}}[K][\xi] は対角マトリックスである。すなわち,$ 

 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_j \end{bmatrix}$  $\boldsymbol{m}_j = \{ \boldsymbol{X}_j \}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \{ \boldsymbol{X}_j \} \text{ : generalized mass}$  $\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_j \end{bmatrix}$ 

(9.2.4)  $k_i = \{X_i\}^T [K] \{X_i\}$ : generalized stiffness

したがって,運動方程式(9.2.1)が非連成化する条件は,式(9.2.3)の第2項の係数が対角マトリックスであることである。すなわち,次式が成立することである。

 $(9.2.5) \qquad \left[\xi\right]^{\mathrm{T}} \left[C\right] \left[\xi\right] = \left[c_{j}\right]$ 

式(9.2.5)が成立すれば、式(9.2.3)は各モードごとの独立な微分方程式となり、次式となる。

 $(9.2.6) \qquad m_j \ddot{q}_j + c_j \dot{q}_j + k_j q_j = \left( \left[ \xi \right]^{\mathrm{T}} \left\{ F \right\} \right)_j \quad \left( j = 1 \to n \right)$ 

式(9.2.6)を $m_j$ で除し、 $\omega_j = \sqrt{m_j / k_j}$  (j 次の円振動数)の関係を用いると次式を得る。 (9.2.7)  $\ddot{q}_i + 2h_i \omega_j \dot{q}_i + \omega_i^2 q_j = f_j$ 

ここで,

$$(9.2.8) h_j = \frac{c_j}{2\omega_j m_j}$$

は各次モードに対する減衰定数である。すなわち,式(9.2.5)の関係を用いれば各次モードに対する 減衰定数から減衰係数マトリックスを求めることが出来る。式(9.2.5)より,

$$[C] = \left( \left[ \xi \right]^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \left[ c_j \right] \left[ \xi \right]^{-1} = \left( \left[ \xi \right]^{-1} \right)^{1} \left[ 2h_j \omega_j m_j \right] \left[ \xi \right]^{-1} = \left( \left[ \xi \right]^{-1} \right)^{1} \left[ m_j \right] \left[ 2h_j \omega_j \right] \left[ \xi \right]^{-1}$$

式(9.2.4)より

$$\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_j \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\boldsymbol{m}_j \end{bmatrix}$$
  
$$\therefore \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\boldsymbol{m}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix}$$
$$([\xi]^{^{+}})^{^{T}} = [M]^{^{T}}[\xi][1/m_{j}] (::[M] \text{ is diagonal})$$
これを上式に代入し、次式を得る。
$$(9.2.9) \quad [C] = [M][\xi][2h_{j}\omega_{j}][1/m_{j}][\xi]^{^{T}}[M]$$
これが減衰マトリックスを求める式である。
$$\text{つぎに, 式}(9.2.1)の外力ベクトルは次のように表せる。$$

$$(9.2.10) \quad \{F\} = -[M]\{E\}\ddot{u}_{g}$$

$$f_{i} = \frac{-\{X_{j}\}[M]\{E\}}{m_{j}}\ddot{u}_{g} = -\beta_{i}\ddot{u}_{g}$$

$$\beta_{i} = \frac{\{X_{j}\}^{^{T}}[M]\{E\}}{\{X_{j}\}^{^{T}}[M]\{X_{j}\}} : 刺激係数$$

#### 9.3 ひずみエネルギー比例減衰

ここでは、モード比例減衰の大きさを各部材の減衰より求める方法の一つである、ひずみエネ ルギー比例減衰の求め方を示す。各モード変形により個材に蓄えられるエネルギーは次式で表わ される。

(9.3.1) 
$$E_{j,k} = \frac{1}{2} \{X_k\}^{\mathrm{T}} [k_j] \{X_k\}$$

個材の減衰エネルギーは

 $(9.3.2) D_{j,k} = 4\pi h_j E_{j,k}$ 

と表わされるので、個材の集合としての系の減衰エネルギーは次式となる。

(9.3.3) 
$$D_k = 4\pi \sum_{j=1}^m h_j E_{j,k}$$

一方、系の全体としての減衰エネルギーは次式となる。

(9.3.4) 
$$D_k = 4\pi h_k \sum_{j=1}^m E_{j,k}$$

両式の減衰エネルギーは等しいので、右辺を比較すると、モード減衰として次の式を得る。

(9.3.5) 
$$h_{k} = \frac{\sum_{j=1}^{m} h_{j} \{X_{k}\}^{\mathrm{T}} [k_{j}] \{X_{k}\}}{\{X_{k}\}^{\mathrm{T}} [K] \{X_{k}\}}$$

171ページまで英語化完了

# STADAS

A computer program of ground and soil–structure interaction problem (2D Version)

> Manual (Version 4.02)

> > May 2002

Nozomu YOSHIDA

#### Introduction

Many compute codes have been developed to analyze the behavior of ground and soil-structure system. They were usually designed to focus on single phenomena, such as consolidation analysis, earthquake response analysis, static analysis, etc. In the actual ground, situation is more complicated because they may be appear repeatedly or coupled. For example, the stress state of a earth dam during and after construction is to be treated as layer construction problem or static problem. When water is stored in the dam, the water level changes, which result is the change of effective stress; because of the nonlinear nature of the stress–strain relationships, resultant stress state is no the same with the one obtained by layer construction analysis using present water level. The water table may change due to rainfall, which may affect the stress state. The dam may subject earthquake, in which case earthquake response analysis is required. Consolidation analysis may be suitable to compute excess pore water dissipation after the earthquake. There may be improvement to rise the height or to excavate, which also changed the circumstances.

When analyzing these complicated phenomena, several codes have been sequentially or repeatedly used because each code usually has one function. A few computer codes have functions to analyze variety of phenomena. These codes cannot, however, solve the actual ground situation systematically same as a code with single function because various functions are just gathered. Therefore, the code is to be used repeatedly instead of using various codes with single function sequentially.

STADAS is a multi-purpose computer code for the static, consolidation, and dynamic analysis based on the effective stress concepts. It is designed to analysis complicated ground situations systematically following the time. It has variety of element type, such as spring, beam, dashpot, solid, joint, etc. and nonlinear behavior of these elements can be treated. It is also designed so that addition of a new constitutive model is very easy; the subprogram that computes initial or tangent stiffness and stress for gives strain can be installed. Therefore, STADAS can be used for almost all phenomena related to the behavior of ground as well as soil-structure system and structure itself.

STADAS is designed to analyze 1-dimensional and multi-dimensional behavior. Present version, unfortunately, can analyze only two-dimensional problem including SH-wave traveling, but structure of the code is designed to deal with other dimension as can be seen in the input manual, part I of this book.

# Contents

	Introc Conte	luction ii ents ii
Part I	: Data i	nput
1	Fundar	nentals ······1
	1.1	Coordinate system 1
	1.2	Elements, stress, and strain 1
	1.3	Method for preparing input data 44
	1.4	Input/Output through files
	1.5	Output
	1.6	Treatment of pore water
2	Fundar	nental input data ······10
	2.1	Title 10
	2.2	Fundamental constants ······ 10
	2.3	Model constants 12
3	Fundar	nentals ······13
	3.1	Element property number 13
	3.2	Spring element 14
	3.3	Dashpot element ····· 20
	3.4	Beam·····21
	3.5	Solid element ······ 26
	3.6	Joint element ······· 36
	3.7	Rotational spring
	3.8	Solid element for SH-wave analysis 37
4	Structu	ral data 38
	4.1	Nodal data······ 38
	4.2	Element data ······ 40
	4.3	Element thickness 44
	4.4	Boundary condition for pore water 44
5	Type o	f analysis ······45
	5.1	End of the job 46
	5.2	Activate element and change boundary condition
	5.3	Layer construction and switch-on-gravity analysis 51
	5.4	Excavation analysis 56
	5.5	Static analysis
	5.6	Earthquake response analysis
	5.7	Dynamic response analysis by node excitation 68
	5.8	Change of water table 72
	5.9	Consolidation analysis 75
	5.10	Eigen value problem

	5.11	Release fixed constraint	81
	5.12	Change title	82
	5.13	Print current state	82
	5.14	Export current response value	82
	5.15	Import response value ······	82
	5.16	Convergency condition	83
	5.17	Change parameter ·····	84
	5.18	Clear unbalanced force	85
	5.19	DEBUG ·····	86
6	Comm	ents for preparing input data	87
	6.1	Simultaneous equation	87
	6.2	Coefficient matrix	87
	6.3	Thickness of element	88
	6.4	Total and effective stress analysis	88
	6.5	Hourglass mode deformation	88
	6.6	Unit number from which model is read	89
	6.7	Atmospheric pressure	89
	6.8	Boundary condition of water	89
	6.9	Unit weight ·····	90
	6.10	Rayleigh damping	91
	6.11	Curved skeleton curves	91
	6.12	Masing's rule ·····	91
	6.13	Piesewise linear stress-strain models	92
	6.14	Output of displacement	92
	6.15	Initial stress at switch-on-gravity analysis	93
	6.16	Saturation condition	93
	6.17	Connection between free field	94
	6.18	Stiffness for the initial stress method	94
	6.19	Nonlinear analysis	95
	6.20	Joint element	96
	6.21	Stiffness of spring	96
	6.22	Finite displacement of spring	96
	6.23	Generalized stress of beam element ·····	97
7	Error N	Aassage ·····	99
8	Supple	mentary codes	101
	8.1	PCUP·····	··· 101
	8.2	PC-Node	101
	8.3	PC-Elem	102
	8.4	STADAStoPOSTEQ	103
9	Versio	n	105

# Part II: Theory

1	Gover	ning equations for 2-phase material1
	1.1	Fundamental equations and notations 1
	1.2	Equilibrium equation
	1.3	Continuity condition (mass conservation equation) 4
	1.4	Various governing equation of 2-phase material 5
	1.5	Formulation into Finite Element Method ······ 8
	1.6	Boundary condition 16
	1.7	Numerical integration with respect to time23
c	Uoura	loss deformation mode
2	2 1	Fundamental equations
	2.1	Fundamental equations 27
	2.2	Element stimless matrix 28
	2.5	Hourgrass deformation mode     28       Orthogonality against rigid body motion     20
	2.4	Orthogonality against rigid body motion 29
	2.3	Anti have la seconda defermation matrice
	2.0	Anti-nourglass mode deformation matrix 31
	2.7	Coefficient of anti-hourglass mode deformation matrix
	2.8	I rigonometric element 33
3	Consti	tutive models for one-dimensional analysis
	3.1	Introduction 36
	3.2	Mathematical models 36
	3.3	Constitutive models
	3.4	Piecewise linear models 42
4	Spring	47
	4.1	Positive direction of spring element
	4 2	Constitutive equation
	43	Coordinate transformation matrix (B matrix)
	4 4	Element stiffness matrix
	4 5	Constitutive model
5	Beam	50
0	5 1	Introduction
	5.2	2-dimensioal analysis
	53	Three dimensional analysis
	5.4	Nonlinear behavior
6	Dashp	ot 64
7	Solid	element
	7.1	Elastic matrix 65
	7.2	Arbitrary model for total stress analysis
	7.3	Tobita-Yoshida model······66
	7.4	Practical simplified model by Yoshida et al
	7.5	Confining pressure dependent elastic model

	7.6	Model considering flow of ground
8	Joint e	lement 82
	8.1	Basic concept 82
	8.2	Application for two-phase problem
9	Eigen	value problem and modal damping
	9.1	Conversion into standard eigen value problem
	9.2	Modal damping ······ 88
	9.3	Strain energy proportional damping90

Part 1 Data Input

#### 1 Fundamentals

In this chapter, fundamental knowridges how to use STADAS, etc. are described.

#### 1.1 Coordinate system

It is noted that y-axis is taken as vertical axis for 2- and 3-dimensional analysis in STADAS. The positive direction is shown in Figure 1.1.1.



Figure 1.1.1. Positive direction

1.2 Elements, stress, and strain

#### (1) Solid element

STADAS prepares 4-point isoparametric element for 2-dimensional analysis, and 4-point isoparametric element especially designed for SH wave propagation problem for solid element. Because STADAS focuses on the behavior of the ground, compression is taken positive in expressing stresses and strains, which is different to the ordinary structural analysis computer codes. The positive direction of stresses and positive deformation modes of strains are schematically shown in Figure 1.2.1. It is also noted that engineering strain is employed. The amount of shear strain in the engineering strain is twice as large as the one in the tenser strain (See Equations (1.2.1) and (1.2.2)).



Figure 1.2.1. Positive direaction of stresses and strains

(1.2.1) 
$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$
 Tenser strain  
(1.2.2)  $\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$  Engineering strain

SH-wave element is a special element specially designed for the analysis of SH-wave propagation.

When 2-dimensional ground is defined in the x-y plane, the propagation of SH wave causes displacement in the x-direction. If dilatancy occurs, then displacements appear in both x- and y-directions as well as in z-direction, therefore the behavior is to be analyzed in 3-dimensional. However, if simple shear deformation is considered, then displacement appears only in z-direction, hence can be analyzed in 2-dimensional. Stress components are  $\tau_{zx}$  and  $\tau_{zy}$  whose positive direction is shown in Figure 1.2.2.



Figure 1.2.2. Strain and deformation under SH-wave analysis

#### (2) 1-dimensional element

An element that is defined by two nodes and one stiffness, such as spring and dashpot, is called one-dimensional element in this manual. In the ordinary situation, direction cosine is taken from node 1 (first node at the definition of element nodes) to node 2 (last node at the definition of element nodes) as shown in Figure 1.2.3; the direction cosine  $\{T\}$  is defined as Equation (1.2.3).

(1.2.3)  $\{T\} = \{\cos\theta \quad \sin\theta\}^{\mathrm{T}}$ 

Tensile force and displacement that separates two nodes are positive in this case.

The user can define another direction as direction cosine. For example, direction perpendicular to the previous direction can be used so as to consider shearing deformation. The two nodes may be defined to have the same coordinates, then stresses and strains are positive when the direction of displacement coincide with the defined direction.



Figure 1.2.3. Directions cosine and positive directions of generalized stress and strain

#### (3) Beam

Positive direction of the generalized stress (Bending moment, M, Shear force, Q, and Axial force, N) of a beam element is shown in Figure 1.2.4. Corresponding generalized strain has the same positive direction, too.



Figure 1.2.4. Generalized stress and strain and their positve direction for beam element

# (4) Joint element

The positive directions of stress and strain of a joint element have the same feature with solid element, which is shown in Figure 1.2.5.



Figure 1.2.5. Stress and strain for Joint element and their positive direction

#### 1.3 Method for preparing input data

A method how to construct the input data for STADAS is described in this section. The flow of the sequence of input is shown in Figure 1.3.1.



Figure 1.3.1. Flow for running STADAS

First, data explaining the overall feature of the model is required. Following the input of title, which is printed at the top of the print output, fundamental quantities such as dimensions, flag numbers on coefficient matrix, treatment of stress, hourglass mode, etc. are required. They are used commonly in the following analysis. The explanation about them is given in chapter 2. Moreover, detailed explanation or commentary is shown in chapter 6.

Next, the model to be analysed must be specified. This indicates element property (element type and constitutive equation), nodal data, element data, and boundary condition against water. In front of them, numbers of these data are required. These data can be read from the files whose name is specified by the user as well as from the standard input device with other data. STADAS recognize what kind of problem is going to be solved, and count the necessary array size to be used in the analysis.

STADAS uses dynamic allocation system for preparing the storage area necessary in the analysis. In other words, STADAS prepares one large size array and divides them into various small arrays such as displacement, stress, coordinate, etc., which is the best method to use memory effectively and does not limit the size of the problem such as number of nodes and elements if a computer has sufficient size. Once STADAS decides the size of each variable, then it becomes impossible to solve the problem that requires more size than prepared.

Following these common and fundamental data, types of analysis and data necessary for the analysis is to be specified. Since STADAS is coded to be used in the analysis of ground and soil–structure interaction problem, sequence of input is designed suitable for various situations.

In the analysis of ground, it is rare to have a case that requires only one analysis. At least, the user should conduct the analysis to obtain initial stress state (because material property depends on effective stress) before analyzing the problem in question. In many cases, different external source is to be applied and geometrical configuration may change. For example, let consider the construction of a dam. First, we should make dike (layer construction analysis) and we store water (change water level, hence effective stress). If earthquake strikes, then we need earthquake response analysis. If settlement after the earthquake is required, consolidation analysis will be more rational than to conduct earthquake response analysis at the end of dissipation of excess pore water pressure because the phenomenon is nearly static behavior. There may be excavation, external load application. STADAS can solve these phenomena step by step choosing the method of analysis one-by-one.

Because of these flexible features, nodes and elements specified by the user indicate that these nodes and/or elements have possibility to be used in the analysis. Nodes and elements which are not specified cannot be used in the analysis, but the user can specify whether the nodes and elements are used in the analysis or not through input data, which is described by the term "activate" and "inactivate" in this manual.

Two methods are available to activate an element: flag on "ADDELM" and "CONSTRUCT" which corresponds to activate elements simply and to make layer construction analysis, respectively. The first flag is to be used when initial state of the element (stress and state) is known and the latter flag is used when switch-on-gravity analysis is conducted from stress free state. On the other hand, a flag "EXCAVATE" is used to inactivate an element.

Specification of activate or inactivate nodes is not necessary because it is automatically determined from the element. The user may need to change support condition, in which case a flag "ADDELM" or "FREESUP" can be used.

Activate element	Change boundary condition for soil skeleton and water: activate element			
	and specify initial stress and strains, specify or modify boundary condition			
	of soil skeleton and water. Specify virtual mass.			
Layer construction and	Activate elements and conduct static analysis applying the gravity load.			
switch-on-gravity				
analysis:				
Excavation analysis:	inactivate element			
Static analysis:	monotonic or repeated, nodal force or nodal displacement is treated as load.			
	In the effective stress analysis, either drained or undrained condition is			
	analyzed.			
Earthquake response	analyze the behavior under earthquake			
analysis:				
Dynamic analysis:	Deals with node excitation problem.			
Consolidation analysis:	Dissipate excess pore water and/or can treat liquefaction of sea bed.			
Eigen value problem:	Computers natural period, eigen vector, and compute damping matrix from			
	specified nodal damping or from the modal damping derived by the			
	computers, which will be used in the future dynamic analysis.			
Change water table:	Analyze the behavior when water table changes.			

The following analysis is available at present. Details will be described in chapter 5.

Release fixed constraint:	Make specified fixity condition free and apply force acted on the node.		
Parameter	Change the value of parameter for constitutive model.		

#### 1.4 Input/Output through files

STADAS is eritten by computer language FORTRAN.

STADAS uses standard input for standard output device for ordinary usage. A standard input device is a card image input; theerefor, maximum number of character in a line is limited to 80, and it may be called "card". The standard output device is a device defoned by FORTRAN.

STADAS also uses other files, such as working area, storage of input data, and output of time history etc. File names of these files are specified by the user.

The treatment of file name is as follows. If file name for input data is left blank, then the program assumes a standard input device is specified, in which case corresponding data is set in the same sequence of other input data from the standard input device. It is noted maximum characters in a line are 80 in this case. It is also noted that, if filenames other than the standard input device is specified and there are redundant data after the required input, they do not affect the calculation. However, if a standard input device is specified, number of lines (or cards) should be exactly what the program requires.

If a file other then the standard input device is specified, then the program will usually close after reading a sequence of data. Therefore, if the user specifies the same file name at the other place, the program read the data from the beginning of the file. If the user does not want it and want to read following the previous input, the user must specify not to close the unit. This can be done by adding a symbol \* at the end of file name.

There are two different types of files for output. The first is a file to output current state to be used for next calculation. The latter is a file for, for example, time history output. If file name is left blank at first time they required, the program gives file name "fort.20" and "fort.21" for them, respectively. If, after the second input, file name is left blank, it indicates the same file name that previously specified. If file names other than previously defined is specified, then the program close the previous file and open new file. Here it is noted that if the same file name that exists or that is used at previous calculating and closed once, then the content will be replaced.

#### 1.5 Output

STADAS make two types of output. The first is to print the result of analysis and/or peak response values in the standard output device, and the second one is a file for time history etc., whose name is specified by the user.

The format of output in the standard output device can be recognized by the examples in Part III of this manual. The standard output device is also used as output for the same time response values. This is not output as standard output, but the user can specify it through the input.

If the user wants time histories of specified node or element, then the user must specify node numbers and element numbers. Usually, the user specifies number of nodes and number of element whose response values are required to be output, and specify node numbers and element numbers. If first input is zero, then there is no output. If negative value is specified, then response values of all nodes and/or elements are output.

If the user specifies a node, all the response value related to the node is output. In the case of static analysis and consolidation analysis, nodal displacements are output. In the case of dynamic response analysis, velocities and accelerations are output as well. On the other hand, if the user specifies an element, all the state variable at the element is output. They are stresses and strains for solid element, and generalized stresses and generalized strains for other types of element. Note that hourglass mode force for 4-point isoparametric element is not output.

These response values are written in the file with unformatted double precision variable. Therefore,

a computer code will be necessary to retrieve the necessary data from the file. The address is printed in the standard output. The following is an example to retrieve the data.

```
С
      Program to retrieve the result of the analysis
     IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A - H, O - Z)
     DIMENSION ND(100), ADATA(100), BDATA(1000)
     CHARACTER*30 FIN, FOUT
С
      Number of array should be changed depending on the data
     READ(5, 500) NDATA, FIN, FOUT
     OPEN (UNIT=10, FILE=FIN, FORM='UNFORMATTED', STATUS='OLD')
     OPEN (UNIT=11, FILE=FOUT, FORM='FORMATTED', STATUS='NEW')
     READ(5, 510) (ND(J), J=1, NDATA)
     NN = 1
     DO 10 I = 1, NDATA
     NN = MAX0(NN, ND(I))
   10 CONTINUE
  20 READ(10, END=100) (BDATA(J), J=1, NN)
     DO 30 I = 1, NDATA
     ADATA(I) = BDATA(ND(I))
  30 CONTINÚE
     WRITE(11, 600) (ADATA(J), J=1, NDATA)
     GO TO 20
  100 CLOSE (UNIT=10)
     CLOSE (UNIT=11)
     STOP
  500 FORMAT(I5, 5X, 2A30)
 510 FORMAT(16I5)
 600 FORMAT(1P10E12.5)
     FND
```

Here, first READ statement requires number of data to be retrieved and file name into which result is stored, and output file name. The next READ statement requires address numbers.

#### 1.6 Treatment of pore water

In the two-phase problem, pore water pressure is divided into hydrostatic pressure and excess pore water pressure. As shown in Part II of this manual, the difference is to consider gravity load (of body force) or not.

The program sometimes deals with hydrostatic pressure and sometimes excess pore water pressure, hence output pressure is either of them. The user must recognize them from the output of the program.

Excess pore water pressure is used in the following:

- Earthquake response analysis and dynamic analysis
- Consolidation analysis
- Static analysis (excess pore water pressure is zero in the drained condition)

On the other hand, hydrostatic pressure is used in the case of drained condition and excess pore pressure is used in the case of undrained condition.

- Layer construction and switch-on-gravity analysis
- Excavation analysis
- Change of water table

#### 1.7 A Brief introduction of FORTRAN

FORTRAN by which STADAS is written is one of the popular computer language for the scientific purpose. The user need some knowridge at minimum when using STADAS.

#### 1.7.1 Execution of STADAS

A program may be prepared to run FORTRAN codes easily, but it will not be discussed here because it is not a common feature. In general, the user need to open a window to run FORTRAN. If, for example, Windows will be used, execute c:/command.com (or c:\Windows\command.com), then the following window appears. In the followings, explanation is limited to Microsoft Windows system; fundamental usage is same for other OS.



where "D:\" may be different because it depends on OS system and setting, et al. The F:\ is a directly for work. If one want to change it to "D:\FORTRAN" type in the following line and hit return.

cd D:\FORTRAN

then the following line appears

D:\FORTRAN>

The following input is now possible.

If one want to run STADAS, command line is as follows:

STADAS < File\_I > File\_O

where File\_I is a file name corresponding to the standard input device and File\_O is a file name for standard output device. It is noted that the executable file STADAS.exe should exist the same file. If it is stored in other place, a path setting can be possible. Let a program is stored at D:\PROGRAM, then

SET PATH=D:\PROGRAM;"%PATH%"

will make a new path to it. If one add this line in the AUTOEXEC.bat, one need not run path treatment command every time when he switch-on the computer.

#### 1.8 FORMAT

#### 2 Fundamental input data

Structure of the program, and basic rule to use the program is already explained in chapter 1. The explanation of input is described in chapters 2 to 5. In chapter 2, data related to the fundamental information is described. Element property is described in chapter 3, structural property is described in chapter 4, and commands for various analyses are explained in chapter 5

Here it is noted that the parts shown in italic character do not work by current version of STADAS.

For the ease of the usage, the explanation of each variable in chapters 2 to 5 is made simple. If detailed explanation is supposed to be necessary, it is written in chapter 6. So as to take correspondence between these variables and chapter 6, variables whose detailed explanation and/or note is written in chapter 5 are shown with superscript. For example, if variable A is written like  $A^{[6.17]}$ , detailed explanation about variable (or term) A is given in section 6.17.

Most of the input data are read from the standard input device, and some of them are read from other unit whose name is specified by the user. Detailed explanation about input files is described in section 1.4.

#### 2.1 Title

# TITLE(A80) $1 \sim 80$ TITLETitle of the problem, which is printed at the head of each standard output.

#### 2.2 Fundamental constants

NSOL, NCMAT, NEFFE	E, IHGS, GACC, GAMAW, ATM, BUWAT, FIN (I4, 3I2, 4F10.0, A20)				
1~ 4 NSOL <sup>[6.1]</sup>	Flag number indicating the method to solve simultaneous equation.				
	= 1: Symmetrical band matrix by sweep out				
	= 2: Unsymmetrical band matrix by sweep out with partial pivoting.				
5~ 6 NCMAT <sup>[6.2]</sup>	Flag number indication the method to build coefficient matrix.				
	= 1: Symmetric matrix				
	= 2: Unsymmetric matrix (Sweep out and partial pivoting)				
	= 3: Unsymmetric matrix by sweep out method.				
	Note that NSOL and NCMAT must be in consistent.				
7~ 8 NEFFE <sup>[6.4]</sup>	Treatment of stress				
	= 0: Total stress analysis in which water does not have freedom.				
	= 1: Effective stress				
9~ 10 IHGS <sup>[6.5]</sup>	Hourglass mode stiffness consideration				
	= 0: Anti-hourglass mode matrix is not employed				
	= 1: Anti-hourglass mode matrix is considered.				
11~ 20 GACC	Acceleration of gravity. Standard value = 9.80665 m/s				
21~ 30 GAMAW	Unit weight of water. Standard value = $1 \text{ gf/cm}^3 = 1 \text{ tf/m}^3 = 9.8 \text{ kN/m}^3$				
$31 \sim 40 \text{ ATM}^{6.7]}$	Atmospheric pressure. Standard value = 760 mmHg = $101325$ Pa = $1.03323$				
	$kgf/cm^2 = 10.3323tf/m^2 = 101.325 kN/m^2$				
41~ 50 BUWAT	Bulk modulus of water. Standard value = $2.2222 \text{ x} 106 \text{ kN/m}^2 = 2.2676 \text{ tf/m}^2$ (at				
	20°C). It is possible to specify in material type input. If not speficied in material				
	type input, value used here will be used.				
$51 \sim 70 \text{ FIN}^{[6.6]}$	File name to read input data in sections 4.1 and 4.2 (node and element				
	information). If FIN is left blank, it indicates the standard input device or card				

input.

#### 2.3 Model constants

#### NDPT, NELM, NMAT, NWIDTH, NBC0 (1015)

$1\sim$ 5 NDPT Nu	umber of node
-------------------	---------------

- $6 \sim 10$  NELM Number of element
- 11~ 15 NMAT Number of element property. Here the term "element property" indicates a couple of element type and a constitutive model in this manual. Even if the same constitutive model is used with different values of parameters, they are counted as set of element property in STADAS.
- 16~ 20 NWIDTH Number of cards to specify elements which have thickness other than unit length in two-dimensional analysis. If elements with the same thickness are in the sequential order, only one card is used to specify thickness.<sup>[6.3]</sup>
- $21 \sim 25$  NBC0<sup>[6.8]</sup> Total number of side at which boundary condition of pore water is specified. In the case of total stress analysis, NBCO = 0.

Here NBCO does not count the boundary whose boundary value is 0. A relevant explanation is given in section 6.8, which is very important.

Boundary conditions are specified in section 4.4. In this input, boundaries with zero boundary value are also specified, but NBCO is the number of boundaries with non-zero value. Value of NBCO larger than actual number of boundary does not cause any problem except that the program uses larger size.

#### 3 Element properties

Element property, i.e., element type and material property, is explained in this chapter.

NMAT pairs of element property input are required. Element property number is to be in the order from 1 to NMAT.

#### 3.1 Element property number

# IMAT, IELM, ICONST(315) $1 \sim 5$ IMATElement property number in ascending order. $6 \sim 10$ IELMFlag number indicating element type (1 to 7)= 1: Spring= 2: Dashpot= 3: Beam= 4: Solid element= 5: Joint element (joint element)= 6: Rocking element= 7: Solid element for SH wave analysis<sup>[1.2]</sup>

11~ 15 ICONST Flag number for constitutive model

ICONST	Spring	Dashpot	Beam	Solid	Joint	Rocking	SH wave
1	Elastic	Constant	Elastic	Elastic	Elastic	Elastic	Elastic
2	Curve	Element	P. linear	Yoshida		Curve	
3	P. linear	Time	M-N interaction	Tobita-Yoshida		P. linear	
4	Yoshida			Yoshida		Yoshida	
5	Large strain			Confining stress dependent elastic			
6	Element depend			Simple 2-D			
7				Volumetric strain			
8							

3.2 Spring element (Element type = 1)

UWEI, AK, ALPHA, BETA, IFDSP		ETA, IFDSP	(4F10.0, I5)		
1~ 10	UWEI	Weight per unit length			
11~ 20	AK <sup>[6.21]</sup>	Spring constant per unit length			
21~ 30	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy			
		proportional damping ratio	(when negative)		
31~ 40	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness prop	portional damping, $\beta$ .		
41~ 45	IFDSP <sup>[6.22]</sup>	Flag number for finite or large deformation theory for spring and beam element.			
		= 0: Small deformation, = 1	: large deformation		

3.2.1 Elastic: Constitutive model number = 1

#### 3.2.2 Curved skeleton: Constitutive model number = 2

The skeleton curve is expressed by mathematical equation and the Masing rule is used for hysteresis rule.

UWEI, AK, ALPHA, BETA, IFDSP		(4F10.0, I5) First card		
1~ 10 UWEI	Weight per unit length			
$11 \sim 20 \text{ AK}^{[6.21]}$	Spring constant per unit length			
21~ 30 ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy			
proportional damping ratio (when negative)				
$31 \sim 40 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .			
41~ 45 IFDSP <sup>[6.22]</sup>	Flag on consideration of la	rge deformation		
= 0: small deformation, $= 1$ : finite deformation				

ITP, NREV, PAR1, PAR2, PAR3 (215, 3F10.0) Second card

 $1 \sim 5ITP$  Flag number showing the type of constitutive model<sup>[6.11]</sup>

= 1: Ramperg-Osgood mode

= 2: hyperbolic model



= 3: Davidenkov model

- $5\sim 10 \text{ NREV}^{[6.12]}$  Maximum storage size to memorize unloaded point. NREV  $\leq 100$ . Usually value of 20 to 40 is sufficient.
- 11~ 20 PAR1 Value of parameter (See table below)
- 21~ 30 PAR2 Value of parameter (See table below)
- 31~ 40 PAR3 Value of parameter (See table below)

	ITP	PAR1	PAR2	PAR3
Ramberg-Osgood model	1	α	β	$P_y$
Hyperbolic model	2	$\delta_y$	-	-
Davidenkov model	3	$\delta_{v}$	A	В

# 3.2.3 Piecewise linear skeleton: constitutive model number 3

Tri-linear skeleton curve with various hysteresis rules is treated in this subsection.

UWEI, AK, ALPHA	, BETA, IFDSP (4F10.0, I5) (First card)
1~ 10 UWEI	Unit eright per unit length
$11 \sim 20 \text{ AK}^{[6.21]}$	Spring constant per unit length
21~ 30 ALPHA <sup>[</sup>	<sup>6.10]</sup> Mass proportional damping for Rayleigh damping, or strain proportional
	damping.
$31 \sim 40 \text{ BETA}^{[6.1]}$	<sup>10]</sup> Stiffness proportional damping for Rayleigh damping
41~ 45 IFDSP <sup>[6.]</sup>	<sup>22]</sup> Flag on finite displacement
	= 0: Not considered (small strain), = 1: Large displacement (rotation)
ITP, G2, G3, T1, T2,	PWR (I5, 5X, 5F10.0) (Second card)
1~ 5 ITP	Flag number showing constitutive model
	= 1: Tri–linear elastic
	= 2: Bi–linearelastic
	= 3: Tri–linear model
	= 4: Bi–linear slip model
	= 5: Tri–linear slip model
	= 6: Origin orientated model
	= 7: Origin-to peak orientated model
	= 8: Peak orientated model
	= 9: Degrading tri-linear (Fukada) model
	=10: Degrading tri-linear (Nomura) model
	=11: Degrading tri-linear (Muto) model
	=12: Degrading tri-linear (Takeda) model
11~ 20 G2	Ratio of second stiffness to initial stiffness. $G2 > 0$ . $1>G2>0$
21~ 30 G3	Ratio of third stiffness to initial stiffness. $G3 > 0$ . $G2>G3>0$
31~ 40 T1	Force at first kink.
41~ 50 T2	Force at second kink.
51~ 60 PWR	Requires only for Takeda model. Power of $\delta_r / \delta_{max}$ . If 0, replaced to 0.4.
	Force
	Gy
	T2 1 03×0max
	G <sub>2</sub> ×G <sub>max</sub>
	T1

#### 3.2.4 Piesewise linear model: constitutive model number 4

Arbitrary strain dependent shear modulus and damping ratio can be specified as it is. STADAS completely satisfies it.

UWEI, AK	, ALPHA, BE	ETA, I	FDSP		(4F10.0, I5)	(First car	·d)
1~ 10	UWEI	Unit	eright per	unit length			
11~ 20	AK <sup>[6.13]</sup>	Sprir	ng constan	t per unit lei	ngth		
21~ 30	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Mass	s proporti	onal damp	ing for Ra	yleigh dan	nping, or strain proportional
		damp	oing.				
31~ 40	BETA <sup>[6.10]</sup>	Stiffi	ness propo	rtional dam	ping for Ray	leigh damp	ing
41~ 45	IFDSP <sup>[6.22]</sup>	Flag	on finite d	lisplacement	t		
		= 0: 1	Not consic	lered (small	strain), =	1: Large dis	splacement (rotation)
ITP, NREV	, PAR1, PAR	2, PA	.R3 (215	5, 3F10.0)	(Second car	d)	
1~ 5	ITP	Туре	s of const	itutive mode	$el^{[6.11]}$		
		= 1:1	Hyperboli	c model	P = -	$\frac{K\delta}{M}$ . Ma	sing rule
			51		1	$+\frac{K\delta}{R}$	0
						$P_y$	
			- 1	- ·		$P\left(\begin{array}{c} P \end{array}\right)$	$\beta^{\beta-1}$
		= 2:	Ramberg-	Osgood mod	del $\delta = -\frac{1}{k}$	$\frac{1}{C} \left  1 + \alpha \right  \frac{1}{P_v}$	, Masing rule
			_				
		= 3:	Duncan-C	hang model	+ hysteresis	VS	
					P = -	$\frac{KO}{KS}$ ,	$h = h_{max} \left( 1 - \frac{K_{sec}}{V} \right)$
						$1 + R_f \frac{RO}{P}$	
						ry VS	$\begin{pmatrix} V \end{pmatrix}$
		= 4: ]	Hardin-Dr	nevich mod	el $P = -$	$\frac{KO}{K\delta}$ , h=	$= h_{max} \left[ 1 - \frac{K_{sec}}{K} \right]$
					1	$+\frac{n\sigma}{P}$	$(\mathbf{K})$
		= 5.	Yoshida m	nodel	K /	$K - \delta$	and $h - \delta$ relationship is
		0.	aposified	whore K	is scent mo	dulus and h	is aquivalant domning ratio
5~ 10	$NREV^{[6.12]}$	Num	ber of ma	vinum unlo	ad point for	memory (1	ess than 100. Usually between
<i>J</i> ~ 10	INICEV	20 ar	d 40		au point ior	includy. (1	ess than 100. Osuany between
$11_{2}, 20$	DAR1	20 al	neter to de	etermûn ske	leton curve	See table b	elow)
$21 \sim 30$	PAR2	Para	meter to de	eterm9n ske	leton curve (	See table b	elow)
21 - 30 $31 \sim 40$	PAR3	Para	meter to de	eterm9n ske	leton curve (	See table b	elow)
51 40	1 / 112	i ui ui	ITP	PAR1	PAR2	PAR3	
			1	P			
			2	P	~	ß	
			۷	1 y	u	$\rho$	4

When ITYP=5, the following input will also be required.

3

4

5

(STRN(I), I=1, N) (8F10.0)

Displacement (Desceanding order)

 $P_y$ 

 $P_y$ 

N

 $R_f$ 

 $h_{max}$ 

 $h_{max}$ 

\_

\_

(GG0(I), I=1, N)
------------------

Ratio of secont modulus to initial modulus

(DAMP(I), I=1, N) (8F10.0)

Damping constants (damping ratio)

#### 3.2.5 Model considering large strain behavior:Nonlinear: constitutive model number 5

Stress-str	rain n	nodel d	consider	ing lar	pe strain	behavior
20022-20	ann n	louer	constact	ing iai	ge suam	ochavior.

UWEI, AK, ALPHA,	BETA	4F10.0) F	irst data							
1~ 10 UWEI	Unit weig	ght								
$11 \sim 20 \text{ AK}^{[6.13]}$	Shear mo	dulus								
21~ 30 ALPHA <sup>[6.]</sup>	. <sup>10]</sup> Mass pr	oportional	damping	for	Rayleigh	damping,	or	strain	proportion	al
	damping.									
$31 \sim 40 \text{ BETA}^{[6.10]}$	] Stiffness	proportion	al damping	g for	Ravleigh d	lamping				

### NN, NREV, XMX, DMX, P1, P2, P3, P4 (215, 6F10.0) Second data

	, ,	
1~ 5	NN	Number of data (Maximum 20)
5~ 10	NREV <sup>[6.12]</sup>	Maximum storage size to memorize unloaded point. NREV $\leq 100$ . Usually
		value of 20 to 40 is sufficient.
11~ 20	XMX	Strain from which degradation begins. If zero, strain at maximum damping will
		be used.
21~ 30	DMX	Damping ratio at XMX. It is recommended to set zero because the program find
		relavant value.
31~ 40	P1	Parameter controlling degradation
41~ 50	P2	
51~ 60	P3	Parameter controlling degradation
61~ 70	P4	Parameter controlling degradation
(STRN(I), I	I=1, N)	(8F10.0)
		Strain from ascending order in real number (not in %)
(GG0(I), I=	=1, N)	(8F10.0)
		Secant modulus ratio
(DAMP(I),	I=1, N)	(8F10.0)
		Damping ratio in %

#### 3.2.6 Nonlinear: constitutive model number 6

Stiffness of this element depends on other elements. It is computed as

 $K = AK + AK1 \times d_1 + AK2 \times d_2$ 

where K is current stiffness. Variables  $d_1$  and  $d_2$  are ratio of current stiffness to the stiffness just before the dynamic response analysis in two elements. In other words, three springs are expressed in one element. The first one is elastic spring. The second and the third one are nonlinear springs whose current spring constant depends on stiffness ratio of other elements.

Element numbers to which spring constant depends can be specified through the input of the element data. Generally, four data is required in addition to the material number and element nodes at the input of element data as written at the beginning of section 3.2. In addition to these data, two data will be required in this element, which are element numbers to which stiffness depends. Therefore, 6 data will be required

in total. This input cannot be done in one line.

UWEI, AK, AK1, AK2,	NE1, NE2, ALPHA, BETA (4F10.0, 2I5, 2F10.0)
$1 \sim 10 \text{ UWEI}^{[6.9]}$	Unit eright per unit length
11~ 20 AK	Spring constant per unit length
21~ 30 AK1	Spring constant per unit length in the first spring
31~ 40 AK2	Spring constant per unit length in the second spring
41~ 45 NE1	Element number on which stiffness of the first spring depends.
46~ 50 NE2	Element number on which stiffness of the second spring depends.
51~ 60 ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Mass proportional damping for Rayleigh damping, or strain proportional
	damping.
$61 \sim 70 \text{ BFTA}^{[6.10]}$	Stiffness proportional damping for Rayleigh damping

(1 70	<b>DDTT</b> $\bullet$ [6 10]	G .: CC		1 .	c	D 1 · 1	1 .
$61 \sim 1/0$	BEIA	Stiffness	proportional	damping	tor	Ravleigh	damping

 $61 \sim 70$  BETA<sup>10101</sup> Stiffness proportional damping for Rayleigh damping It is noted that NE1 and NE2 are in generally specified element by element. However, if set for all element using the same material, it can be specified here.

#### 3.3 Dashpot element

#### 3.3.1 Constant property: Constitutive model number 1

VIS(F10.0) $1 \sim 10$  VISViscous coefficient per unit area. Viscous coefficient multiplied by the area<br/>input in section 4.2 (element data) is used as viscous coefficient of an element.<br/>When using the viscouse boundary for base, for example, one can specify only<br/>one material type in which  $\rho V_s$  is specified for VIS and area (length in 2d<br/>analysis)  $\ell$  is specified for ALEN in section4.2.

#### 3.3.2 Element whose property depend on other element: Constitutive model number 2

In addition to the data in the followings two kind of data is required at the input in section 2.6. The one is the data specified at the beginning of this section, FRFLD, ALEN, and ADIR. The other is an element number to which property of the dashpot element uses. Here it is noted that element number is an integer but input is a real number, which will be converted to integer in the program.

KELM (15)	
<i>l~ 5KELM</i>	Number of elements. Viscous coefficient is computed as weighted average of
	these elements.

(NE(J), WVS(J), WVP(J), J=1, KELM) (Data to be specified with element property in section 3.1<sup>[4.2.2]</sup>)

NE(J)	Element number
WVS(J)	Weight for shear wave velocity
WVP(J)	Weight for p-wave velocity
	$\mu = VIS \cdot AREA \cdot \sum_{J=1}^{KELM} \rho_{NE(J)} \Big[ WVS(J) \cdot V_{s,NE(J)} + WVP(J) \cdot V_{p,NE(J)} \Big]$

	3.3.3 Property specified as time history: constitu	itive model number 3
--	--	----------------------

#### KDAT, KFILE (215)

 $l \sim 5KDAT$  Number of data in a file.

*6~10KFILE* Unit number in which data is written.

Note that the value of KDAT and KFILE is to be unique in one job. Moreover, it is assumed that the data is written with format (8F10.0).

# 3.4 Beam

UWEI, E, C	G, ALPHA, B	ETA, A, AI, AS (8F10.0)
1~ 10	UWEI	Unit weight
11~ 20	E	Young's modulus
21~ 30	G	Shear modulus
31~ 40	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
		proportional damping ratio (when negative)
41~ 50	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~ 60	А	Cross sectional area
61~ 70	AI	Second moment of inertia
71~ 80	AS	Effective area against shear deformation. $AS = 0$ indicates no shear
		deformation, i.e., $AS = \infty$ .

#### 3.4.2 Piecewise linear nonlinear: Constitutive model number 2

Four cards are required in this section

#### (1) Fundamental

UWEI, E, G, ALPHA, BETA, A, AI, AS (8F10.0)			
1~ 10 UWEI	Unit weight		
11~ 20 E	Young's modulus		
21~ 30 G	Shear modulus		
$31 \sim 40 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy		
	proportional damping ratio (when negative)		
$41 \sim 50 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .		
51~ 60 A	Cross sectional area		
61~ 70 AI	Second moment of inertia		
71~ 80 AS	Effective area against shear deformation. $AS = 0$ indicates no shear		
	deformation, i.e., $AS = \infty$ .		

# (2) Definition of nonlinear property

MMT, JM, JQ, JM	(415)
1~ 5 MMT	Flag to consider nonlinear behavior
	= 0: Nonlinear behavior is represented at the center of the beam
	= 1: Nonlinear behavior is represented at the first node of the beam
	= 2: Nonlinear behavior is represented at the second node of the beam
	= 3: Nonlinear behavior is considered at both ends separately.
6~ 10 JM	Flag on moment–curvature relationships <sup>[6.13]</sup>
11~ 15 JQ	Flag number on shear force–shear deformation relationships <sup>[6.13]</sup>
16~ 20 JN	Flag number on shear force–shear deformation relationships <sup>[6.13]</sup>
	= 0: Elastic.
	= 1: tri–linear elastic model
	= 2: Bi–linear model
	= 3: Tri–linear model
	= 4: Bi–linear slip model
	= 5: Tri–linear slip model
	= 6: Origin orientated model
	= 7: Origin-peak orientated model
	= 8: Peak orientated model
	= 9: Degrading tri-linear (Fukada) model
	=10: Degrading tri–linear (Nomura) model
	=11: Degrading tri–linear (Muto) model
	=12: Degrading tri–linear (Takeda) model

# (3) Nonlinear property for bending

Input in this section is required only when JM>0

GM2, GM3, TM1, TM2, PWR (5F10.0)

- 1~ 10 GM2 Ratio of second gradient to initial gradient. 1.>GM2>0
- 11~ 20 GM3 Ratio of third gradient to initial gradient. GM2>GM3>0
- 21~ 30 TM1 Load at first kink.

41~ 50 PWR

- $31 \sim 40$  TM2 Load at second kink.
  - Requires only for Takeda model. Power for  $\delta_r / \delta_{max}$ . When 0, it is replaced into 0.4



(4) Nonliear property for shear

Input in this section is required only when JQ>0.

#### GQ2, GQ3, TQ1, TQ2, PWR (5F10.0)

1~ 10	GQ2	Ratio of second gradient to initial gradient. 1>GQ2>0
11~ 20	GQ3	Ratio of third gradient to initial gradient. GQ2>GQ3>0
21~ 30	TQ1	Load at first kink.
31~ 40	TQ2	Load at second kink.
41~ 50	PWR	Requires only for Takeda model. Power for $\delta_r / \delta_{max}$ . When 0, it is replaced into
		0.4

#### (5) Nonlinear property for axial force

Input in this section is required only when JN>0.

GN2, GN3, TN1, TN2, PW	/R (5F10.0)
1~ 10 GN2 R	atio of second gradient to initial gradient. 1>GN2>0
11~ 20 GN3 R	atio of third gradient to initial gradient. GN2>GN3>0
21~ 30 TN1 L	oad at first kink.
31~ 40 TN2 L	oad at second kink.
41~ 50 PWR R	tequires only for Takeda model. Power for $\delta_r / \delta_{max}$ . When 0, it is replaced into
0	.4

#### 3.4.3 Piecewise linear model with M-N interaction: Constituve model 3

Four cards will be required in this section.

#### (1) Fundamental

UWEI, E, G, ALPHA, BETA, A, AI, AS (8F10.0)

1~ 10	UWEI	Unit weight
11~ 20	E	Young's modulus
21~ 30	G	Shear modulus
31~ 40	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
		proportional damping ratio (when negative)
41~ 50	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~ 60	А	Cross sectional area
61~ 70	AI	Second moment of inertia
71~ 80	AS	Effective area against shear deformation. $AS = 0$ indicates no shear
		deformation, i.e., $AS = \infty$ .

(2) Moment-curvature relationship

NYL1, NYL2, MMT, JM	A, NULD, JQ, GM1, GM2, PWR (615, 3F10.0)
1~ 5 NYL1	Number of data for first yield.
6~ 10 NYL2	Number of data for second yield.
11~ 15 MMT	Flag to consider nonlinear behavior
	= 0: Nonlinear behavior is represented at the center of the beam
	= 1: Nonlinear behavior is represented at the first node of the beam
	= 2: Nonlinear behavior is represented at the second node of the beam
	= 3: Nonlinear behavior is considered at both ends separately.
16~ 20 JM	Flag on moment–curvature relationships <sup>[6.13]</sup>
	= 0: Elastic. Not allowed for moment.
	= 1: tri–linear elastic model
	= 2: Bi–linear model
	= 3: Tri–linear model
	= 4: Bi–linear slip model
	= 5: Tri–linear slip model
	= 6: Origin orientated model
	= 7: Origin-peak orientated model
	= 8: Peak orientated model
	= 9: Degrading tri–linear (Fukada) model
	=10: Degrading tri–linear (Nomura) model
	=11: Degrading tri–linear (Muto) model
	=12: Degrading tri–linear (Takeda) model
21~ 25 NULD	Number of maximum unload point to memorize (recommended 30)
26~ 30 JQ	Flag number on shear force-shear deformation relationships [6.13] See JM
31~ 40 GM2	Ratio of second gradient to initial gradient. 1.>GM2>0
41~ 50 GM3	Ratio of third gradient to initial gradient. GM2>GM3>0
51~ 60 PWR	Requires only for Takeda model. Power for $\delta_r / \delta_{max}$ . When 0, it is replaced into
	0.4



#### (3) Interior or first yield surface

(Ni, Mi), i=1, NYL1	(8F10.0)
Ni	Axial force at i-th point
Mi	Bending moment at i-th point

Note that Ni should be ordered from large to small value (i.e., from tensile to compressive). It is recomended to set Mi=0 for i=1 and i=NYL1, but nonzero value is possible, in which case yield surface is platau. Symmetry against bending moment is assumed.

#### (4) Exterior or second yield surface

(Ni, Mi), i=1, NYL2	(8F10.0)
Ni	Axial force at i-th point
Mi	Bending moment at i-th point

Note that Ni should be ordered from large to small value (i.e., from tensile to compressive). It is recomended to set Mi=0 for i=1 and i=NYL1, but nonzero value is possible, in which case yield surface is platau. Symmetry against bending moment is assumed. Elastic-perfectly plastic behavior is automatically assued for axial force.

#### (5) Nonliear property for shear

Input in this section is required only when JQ>0.

GQ2, GQ3,	TQ1, TQ2, F	WR (5F10.0)
1~ 10	GQ2	Ratio of second gradient to initial gradient. 1>GQ2>0
11~ 20	GQ3	Ratio of third gradient to initial gradient. GQ2>GQ3>0
21~ 30	TQ1	Load at first kink.
31~ 40	TQ2	Load at second kink.
41~ 50	PWR	Requires only for Takeda model. Power for $\delta_r / \delta_{max}$ . When 0, it is replaced into
		0.4

# 3.5 Solid element

#### 3.5.1 Elastic: constitutive model number 1

There are two lines in this input

UWEI, GG	, AK, ALPHA	A, BETA, AKX, AKY (8F10.0)
1~ 10	UWEI <sup>[6.9]</sup>	Wet unit weight
11~ 20	GG	Shear modulus
21~ 30	AK	Bulk modulus
31~ 40	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
		proportional damping ratio (when negative)
41~ 50	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~ 60	AKX	Permeability in x-direction
61~ 70	AKY	Permeability in y-direction
71~ 80	AN	Porosity
BUWATE		(F10.0)
1~ 10	BUWATE	Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be

used.
### 3.5.2 Tobita – Yoshida model: constitutive model number 2

Element stiffness matrix is unsymmetrical in this model, therefore flag for unsymmetric matrix should be chosed in section 2.2. Three cards are required in this section.

UWEI, G0, AK0,	PO, GN, AKN, ALPHA, BETA (8F10.0)
1~ 10 UWE	<sup>[6.9]</sup> wet unit weight
11~ 20 G0	Shear modulus constant $G = G0 \left(\frac{\sigma'_m}{P0}\right)^{GN}$
21~ 30 AK0	Bulk modulus constant $K = AK0 \left(\frac{\sigma'_m}{P0}\right)^{AKN}$
31~ 40 P0	Reference confining pressure
41~ 50 GN	Shear modulus exponent
51~ 60 AKN	Bulk modulus exponent
61~ 70 ALPH	A <sup>[6.10]</sup> Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
	proportional damping ratio (when negative)
71~ 80 BETA	<sup>[6.10]</sup> Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .

# AKX, AKY, AN, A, B, AM, HR0, AR (8F10.0)

1~ 10	AKX	Permeability in x-direction
11~ 20	AKY	Permeability in y-direction
21~ 30	AN	Porosity
31~ 40	А	Parameter, A
41~ 50	В	Parameter, B
51~ 60	AM	Parameter, <i>M</i> , sine of phase transformation angle
$61\sim70$	HRO	Parameter, $H_{RO}$
71~ 80	AR	Parameter, $a: H_R = H_{RO}e^{a\lambda P}$

# ARM, BUWAT (2F10.0)

1~ 10 ARM 
$$m: H_{p} = H_{R} - (H_{R} - H_{p}^{*}) \left(\frac{\rho}{\rho_{c}}\right)^{m}$$

 $11\sim 20$  BUWATE Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be used.

#### 3.5.3 Modified Tobita – Yoshida model: constitutive model number 3

Element stiffness matrix is unsymmetrical in this model, therefore flag for unsymmetric matrix should be chosed in section 2.2. Three cards are required in this section.

It is noted that the user should choose relavant reference confining stress depending on the analysis; stress just before the earthquake is to be used in the earthquake response analysis and reference value specified in input will be used in other analysis. This control can be done by PARAM command described in section 5.17.

UWEI, G0,	AK0, P0, GN	I, AKN, ALPHA, BETA (8F10.0)
1~ 10	UWEI <sup>[6.9]</sup>	wet unit weight
11~ 20	G0	Shear modulus constant $G = G0 \left(\frac{\sigma'_m}{P0}\right)^{GN}$
21~ 30	AK0	Bulk modulus constant $K = AK0 \left(\frac{\sigma'_m}{P0}\right)^{AKN}$
31~ 40	P0	Reference confining pressure
41~ 50	GN	Shear modulus exponent
51~ 60	AKN	Bulk modulus exponent
61~ 70	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
		proportional damping ratio (when negative)
71~ 80	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .

### AKX, AKY, AN, A, B, AM, HR0, AR (8F10.0)

1~ 10 AKX	Permeability in x-direction
11~ 20 AKY	Permeability in y-direction
21~ 30 AN	Porosity
31~ 40 A	Parameter, A
41~ 50 B	Parameter, B
51~ 60 AM	Parameter, M, sine of phase transformation angle
61~ 70 HRO	Parameter, $H_{RO}$
71~ 80 AR	Parameter, <i>a</i> : $H_R = H_{RO}e^{a\lambda P}$

ARM, BUWAT (2F10.0)

1~ 10 ARM 
$$m: H_{P} = H_{R} - (H_{R} - H_{P}^{*}) \left(\frac{\rho}{\rho_{c}}\right)^{m}$$

 $11\sim 20$  BUWATE Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be used.

#### 3.5.4 Yoshida model: constitutive model number 4

Model in this article can be used for both total stress and effective stress analyses. However, since effective confining stress is set not to become negative, it is suggested that confining stress is set not to be too small value by conducting initial stress analysis, for example.

#### (1) Fundamental data

IS	TYP, IDA	AYTP, NREV	, IFLGR, UWEI, ALPHA, BETA, AKX, AKY, AN (4I5, 6F10.0)
	1~ 5	ISTYP	Flag number indicating the model for shear deformation
			= 0: Hyperbolic model
			= 1: Modified Hyperbolic model
			= 2: Ramberg-Osgood model
			= 3: Hardin-Drnevich model
			= 4: Yoshida model $(G/G_{ma}-\gamma relation)$
			= 5: Yoshida model ( $\tau$ - $\gamma$ relation)
			= 6: Yoshida model (Confining stress dependent; $G/G_{ma}$ - $\gamma$ relation)
			= 7: Various empirical equations <sup><math>[6.24]</math></sup>
			= 8: ALID model for liquefaction-induced flow
	6~ 10	IDAYTP	Flag number indicating dilatancy model
			= 0: Dilatancy is not considered
			= 1: Stress-dilatancy model
			= 2: Bowl model
			= 3: Under developing
	11~ 15	NREV	Maximum number of storage size to memorize unloading points. NREV $\leq 100$ .
			Usually the value of 20 to 40 is sufficient If NREV is set negative, absolute
			value has the same meaning. In addition, distance from unload point is used as
			shear stress ratio under unload instead of using the radiums.
	16~ 20	IFLGR	If IFLGR = 1, stress ratio does not violate Mohr-Coulomb failure condition.
			If IFLGR = 0, stress state may move outside Mohr-Coulomb failure criteria
	• • • • •	<b></b>	depending on the model specified by ISTYP.
	21~ 30	UWEI <sup>[0,5]</sup>	wet unit weight.
	31~ 40	ALPHA	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
	41 50	DDTT ([6 10]	proportional damping ratio (when negative)
	41~ 50	BEIA	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
	$51 \sim 60$	AKX	Permeability in x-direction.
	$61 \sim 70$	AKY	Permeability in y-direction.
	/1~ 80	AN	Porosity.

# COHE, THETA, G0, AM, EINIT, ALAMDA, AKAPPA, EREF (8F10.0)

1~ 10 COHE Co
---------------

11~ 20 THETA	Internal friction angle THETA must be positive <sup>[6.24]</sup>
11 20 1112171	internal metion angle. The first must be positive.

 $21 \sim 30$  G0 Shear modulus constant

Note that G0 depends on unit system.. If we write

$$G_{\max} = G0\sigma_m'^n = G_{\max}P_a^n \left(\frac{\sigma_m'}{P_a}\right)^n$$

then  $G_{\max}P_a^n$  is a quantity that does not depend on unit system.

- $31 \sim 40$  AM Shear modulus exponent
- 41~ 50 EINIT Flag number indicating the method to treat volume change.
  - >0: Combination of normal consolidation line and rebound, in which case EINIT denotes initial void ratio.
  - $\leq$ 0: Incrementally elastic treatment, or rebound only, in which case the value of EINIT is meaningless. Volumetric strain is expressed as



- 51~ 60 ALAMDA The value of  $\lambda$  in the above figure when EINIT > 0. Bulk modulus constant when EINIT  $\leq 0$ . 61~70 AKAPPA The value of  $\kappa$ , when EINIT > 0. Bulk modulus exponent when EINIT  $\leq 0$ .
- 71~ 80 EREF Reference void ratio,  $e_o$ , (see above Figure) when EINIT > 0. No meaning when EINIT  $\leq 0$ .

PREF, BUWATE	(F10.0)
1~ 10 PREF	Reference confining pressure, $p_o$ when EINIT > 0 (See above figure). No
	meaning when $EINIT \leq 0$ .
11~ 20 BUWATE	Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be
	used.

#### (2) Input related to shear deformation

No input is required when ISTYP = 0. See relavant section depending on constitutive models.

1) ISTYP = 1 (Hyperbolic model, Duncan-Chang type)

FACT (8F10.0)

1~ 10 FACT

Shear strength is set 1/FACT times larger than Mohr-Coulomb failure strength, which can be used to adjust stress-strain relation until peak. FACT < 1.0.

$$\sigma_e = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{FACT \cdot G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$

2) ISTYP = 2 (Ramberg-Osgood model)

$$e = \frac{\sigma_e}{G_{\max}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}} \right)^{\beta - 1} \right)$$

ALPH, BTA (2F10.0)

1~ 10	ALPH	Coefficient, $\alpha$
11~ 20	BTA	Coefficient, $\beta$

3) ISTYP=3(Hardin-Drnevich モデル)

FACT, DMAX (2F10.0)

1~ 10 FACT

Shear strength defined by Mohr-Coulomb failure criteria is increased by multiplying 1/FACT. By choosing relavant value, better fit is obtained for stress-strain model unitl failure. FACT<1.0 $_{\circ}$ 

$$\sigma_{e} = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{FACT \cdot G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$

11~ 20 DMAX Maximum damping ratio

4) ISTYP=4,	5, 6 (Yoshida	a model)				
NN, PREF,	(PARAM(I),	I=1, 4) (I5, 5X, 5F10.0)				
1~ 5	NN	Number of data point				
11~ 20	PREF	Confining stress at which data is defined. PREF should be nonzero value when				
		ISTYP=6. In other case, if not specified, confining stress when an element is				
	activated will be used as reference confining stress.					
21~ 30	PARAM(1)	Necessary only when ISTYP=6. See following equation.				
31~ 40	PARAM(2)	Necessary only when ISTYP=6. See following equation.				
41~ 50	PARAM(3)	Necessary only when ISTYP=6. See following equation.				
51~ 60	PARAM(4)	Necessary only when ISTYP=6. See following equation.				
		$G_{max} = \text{PARAM}(1) \times \sigma_m^{\text{param}(3)},  \tau_{max} = \text{PARAM}(2) \times \sigma_m^{\text{param}(4)}$				

(STRN(I), I=1, NN) (8F10.0)

Strains (ascending order)

(GG0(I), I=1, NN) (8F10.0)

Secant modulus (ISTYP=4) or shear stress (ISTYP=5). Note that shear stress should be ascending order. Because origin and first data point are connected by straight line, first data is recommended to be unity. Several methods are available for extrapolating the strain larger than maximum strain.

(DAMP(I), I=1, NN) (8F10.0)

Damping ratios in %.

5) ISTYP	9=7	(Emprical e	quations)		
MTYP,	PR	EF, (PARAN	M(I), I=1, 5) (I5, 5X, 6F10.0)		
1~	5	MTYP	Flag number indicating empirical equation		
			=1: Port facility		
			=2: Yasuda-Yamaguci		
=3: PWRI Holocene clay					
=4: PWRI Pleistocene clay					
			=5: PWRI sandy soil and gravel		

#### =6: Building Standard Low, Notification: Clay

- =7: Building Standard Low, Notification: Sand
- =8: Japan Railway Design Standard, Type 1 (crushed rock)
- =9: Japan Railway Design Standard, Type 2 (Toyoura sand)
- =10: Japan Railway Design Standard, Type 3 (Inagi sand)
- =11: Japan Railway Design Standard, Type 4 (Iwate loam)

11~ 20 PREF Confining stress at which data is defined. If not specified, confining stress when

Parameters

an element is activated will be used as reference confining stress.

21~ PARAM

PARAM(1)	PARAM(2)	PARAM(3)	PARAM(4)	PARAM(5)
$I_p$	FAC			
$D_{50}(mm)$	FAC			
FAC				
h <sub>max</sub>	FAC			
	PARAM(1) <i>I<sub>p</sub></i> <i>D</i> <sub>50</sub> (mm) FAC <i>h<sub>max</sub></i>	PARAM(1)PARAM(2) $I_p$ FAC $D_{50}(mm)$ FACFAC $h_{max}$ $h_{max}$ FAC $I_{max}$ I $I_{max}$	PARAM(1)PARAM(2)PARAM(3) $I_p$ FAC $D_{50}(mm)$ FACFAC $I_p$ $I_p$ $FAC$ $I_p$ $I_p$ $h_{max}$ FAC $I_p$	PARAM(1)PARAM(2)PARAM(3)PARAM(4) $I_p$ FAC $D_{50}(mm)$ FACFAC $FAC$ $h_{max}$ FAC $h_{max}$ FAC $I$ <

FAC: Empirical equations usually stands for a special unit system. FAC is a stress in current unit system corresponding to the unit in the unit system under which the empirical equation was developed. For example, if an empirical equation is developed in kgf/cm<sup>2</sup> unit, the value of 10. and 98. should be input for current unit system of tf/m<sup>2</sup> and kPa, respectively.

#### 6) ISTYP=8 (ALID model for liquefaction-induced flow)

$G = G_{\max}$ e	$e^{2} \leq e_{1}$ where <i>e</i> is diviatric strain
$G = G_2 \qquad e$ $GAM1  G2 \qquad (8F10 \ 0)$	$> e_1$
1~ 10 GAM1	Shear strain at kink.
11~ 20 G2	Second modulus
	Followings should hold in this model.
	1) $AM = 0$ , i.e., shear modulus does not depend on effective stress.
	2) THETA (internal friction angle) shold set zero. Cohesion COHE is not used.

#### (3) Dilatancy model

There is no input in this subsection when IDAYTP = 0.

1) IDAYTP = 1 AMYU, F1, F2 (3F10.0) 1~ 10 AMYU Stress ratio at phase transform. (Ratio of equivalent stress to average stress)

$$d\varepsilon_{vd} = C\left(\mu de - \frac{s_{ij} de_{ij}}{\sigma'_m}\right)$$

- $11 \sim 20$  F1 Volumetric strain reduction factor after unload. *C* in the above equation is 1 for virgin loading and F1 after unload.
- $21 \sim 30$  F2 No volumetric strain due to dilatancy when equivalent shear strain ratio is less than F2, where stress ratio means a value devided by shear strength.

#### 2) IDAYTP=2

AMYU, F1, F2, F3. F4.	F5 (6F10.0)
1~ 10 AMYU	Not used in this model
11~ 20 F1	Coefficient A: $\varepsilon_{vd} = Ae^B + \frac{\int de}{C + D\int de}$
21~ 30 F2	Coefficient B
31~ 40 F3	Coefficient C
41~ 50 F4	Coefficient D
51~ 60 F5	No volumetric strain due to dilatancy when equivalent shear strain ratio is less
	than F5, where stress ratio means a value devided by shear strength.

#### 3) IDAYTP=3 (under developing)

AMYU, F1, F2, F3, F4,	F5, F6 (8F10.0)
1~ 10 AMYU	Stress ratio at phase transform (ratio of equivalent stress to effective mean
	stress)
	$d\varepsilon_{vd} = (\mu de - s_{ij} de_{ij}) \times C \times \left(1 + \frac{x}{\frac{1}{D} + \frac{x}{E}}\right)$
11~ 20 F1	C=FFF(1), D=1.0, E=FFF(2). In addition, $d\varepsilon_{vd}$ is multiplied by FFF(5) with IST>0.
21~ 30 F2	See above equation
31~ 40 F3	Coeffienet to reduce elastic shear
	moludus $G_{\text{max}} = G_0 p^n \left( 1 - \frac{x}{\frac{1}{A} + \frac{x}{B}} \right)$ : A=FFF(3), B
	B=FFF(4)
41~ 50 F4	Cieffucuebt D
51~ 60 F5	Factor to be multiplied to all component. See above equation.

61~ 70 F6 Stress ratio under which volumetric strain caused by dilatancy will not tale place.

3.5.5 Elastic with confining pressure dependency: Constitutive model number 5

UWEI, GG, AK, ALPHA	A, BETA, AKX, AKY (8F10.0)
1~ 10 UWEI <sup>[6.9]</sup>	wet unit weight
11~ 20 GG	Shear modulus constant
21~ 30 AK	Bulk modulus constant
$31 \sim 40 \text{ ALPHA}^{[6.10]}$	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
	proportional damping ratio (when negative)
41~ 50 BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~ 60 AKX	Permeability in x-direction
61~ 70 AKY	Permeability in y-direction
71~ 80 AN	Porosity

### PO, GN, AKN, BUWATE (4F10.0)

1~ 10	PO	Reference confining pressure
11~ 20	GN	Shear modulus exponent: $G = GG \times (\sigma'_m / PO)^{GN}$
21~ 30	AKN	Bulk modulus exponent: $K = AK \times (\sigma'_m / PO)^{AKN}$
$31 \sim 40$	BUWATE	Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be
		used.

#### 3.5.6 Elastic in simple 2-dimension: Constitive model number 6

There are two lines for input in this section.

UWEI, GG	, AK, ALPHA	A, BETA, AKX, AKY (8F10.0)
1~ 10	UWEI <sup>[6.9]</sup>	Wet unit weight
11~ 20	GG	Shear modulus
21~ 30	AK	Bulk modulus
31~ 40	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
		proportional damping ratio (when negative)
41~ 50	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .
51~ 60	AKX	Permeability in x-direction
61~ 70	AKY	Permeability in y-direction
71~ 80	AN	Porosity
BUWATE		(F10.0)

 $1\sim 10$  BUWATE Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be used.

### 3.5.7 Volumetric strain model: Constitutive model 7

Two lines is required for input in this section.

UWEI, GG	, AK, ALPHA	A, BETA, AKX, AKY	7F10.0)
1~ 10	UWEI <sup>[6.9]</sup>	wet unit weight	
11~ 20	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional data	mping, $\alpha$ . (when positive), or strain energy
		proportional damping ratio (when ne	gative)
21~ 30	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional	damping, β.
31~ 40	AKX	Permeability in x-direction	
41~ 50	AKY	Permeability in y-direction	

61~ 70 BUWATE Bulk modulus of water. If not spefied, value specified in section 2.2 will be used.

P0, EPSV0, AK1, AK2	, GG, GN	(6F10.0)
1~ 10 PO	Reference confining stress	
11~ 20 EPSV0	Volumetric strain at reference con	fining stress
21~ 30 AK1	Coefficient	
31~ 40 AK2	Coefficient	
41~ 50 GG	Constant for shear modulus	
51~ 60 GN	Constant for shear modulus	
	$\frac{p}{p_0} = \frac{e^{\varepsilon_v/c} - 1}{e^{\varepsilon_{vo}/c} - 1},  c = \frac{AK2}{100} + A$	$K1 \cdot \varepsilon_{vo}, \ G_{max} = GGp^{GN}$

# 3.6 Joint element

(V, AHK, AKVP, AKHP, BETA, PHI ] (5F10.0)			
1~ 10 AKV	Spring constant per unit length in normal direction at the reference confining		
	pressure, i.e., elastic spring constant = AKV $\cdot \sigma_m^{\prime AKNO}$		
11~ 20 AKH	Spring constant per unit length in tangential direction at the reference confining		
	pressure, i.e., elastic spring constant =AKH $\cdot \sigma_m^{\prime AKHP}$		
21~ 30 AKVP	Spring constant exponent in normal direction.		
31~ 40 AKHP	Spring constant exponent in tangential direction.		
$41 \sim 50 \text{ BETA}^{[6.10]}$	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$ .		
51~ 60 PHI	Friction angle in degree. When PHI = 0, no slip occur, i.e., linear model in		
	compression side.		

# AKV, AHK, AKVP, AKHP, BETA, PHI (5F10.0)

# 3.7 Rotational spring

Input after this is same with section 3.2, therefore see it for input. Note that weight is meaningless for rotational spring.

### 3.8 Solid element for SH-wave analysis

This element is specially designed for SH-wave propagation analysis<sup>[1.2]</sup>. Effective stress analysis is not available in this element. Since there is only z-direction movement, analysis which may cause the movement in another direction, such as layer construction analysis, is not available, too.

### 3.8.1 Elastic model: constitutive model number 1

	UWEI, GG	, ALPHA, BE	TA (8F10.0)	
	1~ 10	UWEI <sup>[6.9]</sup>	Wet unit weight	
	11~ 20	GG	Shear modulus	
	21~ 30	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of mass proportional damping, $\alpha$ . (	when positive), or strain energy
proportional damping ratio (when negative)				
	31~ 40	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient of stiffness proportional damping, $\beta$	•

#### 4 Structural data

Information to define the model, i.e., node, boundary condition, element, element nodes, width of element, and boundary condition of water, are to be specified in this chapter. Since STADAS is formulated based on u-p formulation in Christian type, boundary condition of soil particle is specified as node freedom and boundary condition of water is specified by the condition of segments.

#### 4.1 Nodal data

Node number, coordinate, and boundary condition are specified in this section<sup>[1,1]</sup>. They are read from file name FIN specified in section 2.2. If the file name is specified other than blank input, one card is necessary in front of the data in this section.

The FORMAT is different depending on the dimension of the analysis. They are explained in subsection (2), (3), and (4) respectively. It is noted that two-dimensional analysis is possible in current version.

Node number is to be specified from 1 to NDPT in an ascending order. Node number 1 and NDPT is always necessary. If node is not specified, the coordinate of missing node is interpolated from the neighboring nodes, and the boundary condition is set to be the same with previous node.

Here boundary condition indicates the freedom or movement of node. In the case of effective stress analysis, boundary condition in this section is condition of the movement of soil skeleton and that for water is input is section 4.4. Three types of boundary can be used: fixed, free, and dependent. In the case of fixed boundary, flag number is 1. In the case of free boundary, flag number is 0. On the other hand, if node movement is the same with other node, flag number is to be negative value whose absolute value is the node number of independent node. Here it is noted that node number of independent node must be smaller than the node number of dependent node. Moreover, independent node is to be active when dependent node is specified.

Boundary condition can be changed in each stage of analysis. In the input in this section, node must be specified free if the node may become free in the sequence of analysis.

#### 4.1.1 Dummy card

Input in this subsection is required only when file name FIN specified in section 2.2 is neither blank nor the standard input device. One card is required whose content does not worry. The purpose of this card is that, in usual, the user put one card for memorandum to describe the content of the file.

#### 4.1.2 Nodal point data

Boundary condition is specified in such a way that 1 for fixed and 0 for free direction. If an freedom depends on other freedom (same movement), number of node of independent freedom is specified with negative sign. In this case, node number of independent freedom should be smaller than dependent node. In addition, of course, independent freedom should be exist and activated.

1~ 5 ND	Node number
6~10 KB	Boundary condition to x-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = $1$
	negative)
11~15 KB0	Boundary condition to y-direction (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent =
	negative)
16~ 20 KBC	Boundary condition rotation (Fixed = 1, Free = 0, and Dependent = negative)

ND, KBCX, KBCY, KBCT, X, Y	(415, 2F10.0)

21~ 30	Х	x-coordinate
31~ 40	Y	y-coordinate

#### 4.2 Element data

Data related to element such as element node numbers, element property number, etc. are input. Element number should be ordered from 1 to NELM in an ascending order. Among them, element number 1 and NELM is necessary. If element number is not specified between 1 to NELM, the element node number is interpolated from the neighboring elements, and element property of previous element is used as element property of missing element.

Element number, material type number and element nodes are necessary for all elements. In addition, informations particular to each material type are required. Therefore, input in this section is described in each material type.

Additional information may be required in particular material type, in which case input will be done according to section ???.

See section 6.16 for saturation of element.

#### 4.2.1 Fundamental of element

#### (1) Spring element

NE, MAT,	(NOD(I), I =	1, 2), IFRFLD, IDIR, ALEN, AK0, NE1, NE2 (415, 10X, 215, 2F10.0, 2I5)			
1~ 5	NE	Element number			
6~ 10	MAT <sup>[6.16]</sup>	Element property number			
11~ 15	NOD(1)	First element node number			
16~ 20	NOD(2)	Second element node number			
31~ 35	IFRFLD <sup>[6.17]</sup>	Usually 0. If first element node is on the free field, $FRFLD = 1$ . If second			
		element node is on the free field, $FRFLD = 2$ .			
36~ 40	IDIR	Direction to which spring works, i.e., flag number on the direction cosine vector.			
		= 0: Longitudinal direction. (Two nodes should have different coordinate).			
		= 1: Transverse direction.			
		= 2: x-axis direction. ADIR should be 2.0 for SH wave analysis.			
		= 3: y-axis direction			
		= 4: z-axis direction			
		= 5: x-axis negative direction			
		= 6: y-axis negative direction			
		= 7: z-axis negative direction			
41~ 50	ALEN	Length of element. When ALEN is set 0.0, the program set distance between			
		nodes to the length. This length is not used to cauculate the spring constant,			
		but to calculate weight of element.			
51~ 60	AK0	If value not equal to 0 is specified, the program uses specified value for spring			
		constant regardless the spring constant value specified in the following. This			
		enable to avoid to prepare many element properties for the elements with same			
		material property except spring constant.			
61~ 65	NE1	have meaning only when constitutive model number is 5. First element number			
		to which stiffness depends.			
66~ 70	NE2	have meaning only when constitutive model number is 5. Second element			
		number to which stiffness depends.			

#### (2) Dashpot

NE, MAT, (1	NOD(I), I = 1	1, 4), IFRFRD, IDIR, ALEN	(4I5, 10X, 3F10.0)
1~ 5 l	NE	Element number	
6~10 1	MAT <sup>[6.16]</sup>	Element property number	
11~15	NOD(1)	First element node number	
16~20 1	NOD(2)	Second element node number	
31~ 35 I	IFRFLD <sup>[6.17]</sup>	Usually 0. If first element nod	e is on the free field, $FRFLD = 1$ . If second
		element node is on the free field	, FRFLD = $2$ .
36~ 40 I	IDIR	Direction to which spring works	s, i.e., flag number on the direction cosine vector.
		= 0: Longitudinal direction.	
		= 1: Transverse direction.	
		= 2: x-axis direction.	
		= 3: y-axis direction	
		= 4: z-axis direction	
		= 5: x-axis negative direction	
		= 6: y-axis negative direction	
		= 7: z-axis negative direction	
41~ 50	ALEN	Length of element. When AL	EN is set 0.0, the program set distance between
		nodes to the length. This length	is not used for calculating a spring constant, but
		to calculate weight of element.	

#### (3) Beam

NE, MAT, (	NOD(I), I =	1, 4), A, AI, AS	(4I5, 10X, 3F10.0)					
1~ 5	NE	Element number						
6~ 10	MAT <sup>[6.16]</sup>	Element property number						
11~ 15	NOD(1)	First element node number						
16~ 20	NOD(2)	Second element node number						
31~ 40	А	Cross sectional area						
41~ 50	AI	Second moment of inertia						
51~ 60	AS	Effective area against s	hear deformation.	AS =	= 0	indicates	no	shear
		deformation, i.e., $AS = \infty$ .						

(Note) Values A, AI and AS are usually to be specified as element property. However, there may be a frequent case that there are many element whose material properties are the same but geometrical configuration such as length and above shown are different. In this case it is not convenient to make different element property for each element. Input above is prepared to avoid this inconveniency. If nonzero value is specified at the input in this section, then the program uses these values regardless of the input in section 3.4.

Here treatment of effective area against shear deformation is done carefully because AS = 0 indicates no share deformation, i.e., infinite area in section 3.4. Therefore we employ new rule that if the user want to specify infinite area in the input in this section and AS in section 3.4 is greater than zero, input negative value (any value) in the input here.

(4) Solid element

 NE, MAT, (NOD(I), I = 1, 4), GG, KK
 (615, 2F10.0)

  $1 \sim 5$  NE
 Element number

6~ 10	$MAT^{[6.16]}$	Element property number
		In the case of effective stress analysis, an element that can have degree of
		pore water pressure is automatically set to be saturated. If the user want to set
		them dry (or does not have degree of freedom), MAT is to be set negative, in
		which case absolute value indicates element property number.
11~ 15	NOD(1)	First element node number
16~ 20	NOD(2)	Second element node number
21~ 25	NOD(3)	Third element node number (set 0 depending on element type)
26~ 30	NOD(4)	Fourth element node number (set 0 depending on element type)
31~ 40	GG	Shear modulus (Used only for constitutive model 1, i.e., elastic). If nonzero
		value is input, GG is used regardless the input in 3.5.1.
41~ 50	AK	Bulk modulus (Used only for constitutive model 1, i.e., elastic). If nonzero value
		is input, GG is used regardless the input in 3.5.1.

(Note) Counter clockwise direction for element nodes.  $4^{th}$  element node = 0 for trignometric element.

#### (5) Joint element

Confinin	ng pressure d	ependency of elastic modulus is automatically taken in this model. <sup>[6.20]</sup>
NE, MAT, (	NOD(I), I =	1, 4), AKV, AKH, AKVP, AKHP, ANG (615, 5F10.0)
1~ 5	NE	Element number
6~ 10	MAT <sup>[6.16]</sup>	Element property number
		In the case of effective stress analysis, an element that can have degree of
		pore water pressure is automatically set to be saturated. If the user want to set
		them dry (or does not have degree of freedom), MAT is to be set negative, in
		which case absolute value indicates element property number.
11~ 15	NOD(1)	First element node number
16~ 20	NOD(2)	Second element node number
21~ 25	NOD(3)	Third element node number (set 0 depending on element type)
26~ 30	NOD(4)	Fourth element node number (set 0 depending on element type)
31~ 40	AKV	Spring constant per unit length in normal direction at the reference confining
		pressure, i.e., elastic spring constant = $AKV \cdot \sigma_m^{\prime AKNO}$ This value is used only
		when nonzero value is input
41~ 50	AKH	Spring constant per unit length in tangential direction at the reference confining
		pressure, i.e., elastic spring constant =AKH $\cdot \sigma'^{AKHP}_{m}$ This value is used only
		when nonzero value is input
51~ 60	AKVP	Spring constant exponent in normal direction. This value is used only when
		nonzero value is input
61~ 70	АКНР	Spring constant exponent in tangential direction. This value is used only when
		nonzero value is input
71~ 80	ANG	Angle of the direction in shear in degree from the horizontal axis in
		counter-clockwise direction. This value is used when the first and the second
		nodes are specified by the same node number.
<b>A</b> T <b>N</b> T		

(Note) Longitudinal direction should come first. The user can specify first two nodes by the same node number and third and fourth node by the same node number such as I, I, J, J.. In this case, joint element works as a mere spring with longitudinal and shear freedom. The user should input direction of shear at the time of element nodes input.

(6) Rotational spring

NE, MAT,	(NOD(I), I =	1, 2), IFRFLD, ALEN, AK0, NE1, NE2	(4I5, 10X, I5, 5X, 2F10.0, 2I5)
1~ 5	NE	Element number	
6~ 10	MAT <sup>[6.16]</sup>	Element property number	
		In the case of effective stress analysis	, an element that can have degree of
		pore water pressure is automatically set to	be saturated. If the user want to set
		them dry (or does not have degree of free	edom), MAT is to be set negative, in
		which case absolute value indicates element	t property number.
11~ 15	NOD(1)	First element node number	
16~ 20	NOD(2)	Second element node number	
31~ 35	IFRFLD	Usually 0. If first element node is on the	e free field, $FRFLD = 1$ . If second
		element node is on the free field, FRFLD =	2.
41~ 50	ALEN	Length. When $ALEN = 0$ , distance between $A$	en nodes is used. If both nodes have
		the same coordinate, ALEN is set to be 1.0	
51~ 60	AKO	If AKO > 0, spring constant is set AKO reg	gardless to input in this section

(7) SH wave element

NE, MAT, (ENOD(I), I = 1, 4)		(615, 5F10.0)	
1~ 5 NE	Element number		
6~ 10 MAT <sup>[6.16]</sup>	Element property number		
	In the case of effective	e stress analysis, an element that can have degree of	
	pore water pressure is auto	omatically set to be saturated. If the user want to set	
	them dry (or does not have degree of freedom), MAT is to be set negative, in		
	which case absolute value	indicates element property number.	
11~15 ENOD(1)	First element node number		
16~ 20 ENOD(2)	Second element node num	ber	
21~ 25 ENOD(3)	Third element node numbe	er (set 0 depending on element type)	
26~ 30 ENOD(4)	Fourth element node numb	per (set 0 depending on element type)	

### 4.2.2 Parameters

Fundamental data such as element number, element type number and element nodes are input in the previous section. In the particular element type, additional data will be required, in which case input follows this section. Usually there is no input in this section. Numbers required in this section is written in the description of each element type in chapter 3.

Eight data are written in a card.

At present, there is no data in this section

Element Type	Const. Model	Data, comment

# PAR(J), J = 1, 8 (8F10.0)

#### 4.3 Element thickness

Input this section is necessary only when NWIDTH in section 2.3 is greater than 0. Totally NWIDTH card is required. Elements from element number IS to element number IE are set to have thickness THICK.

IS, IE, WIDTH	(2I5, F10.0)	
1~ 5 IS	First element	number
6~ 10 IE	Last element	number. If $IE < IS$ , the program set $IE=IS$ .
11~ 20 WIE	OTH Thickness	

#### 4.4 Boundary condition for pore water

Input in this section is not necessary for total stress analysis. The program automatically assumes undrained boundary for the side of the element that has degrees of freedom of pore water pressure, if there is no neighboring element or an element with no degrees of freedom, unless specified in this section<sup>[6.8]</sup>. Therefore undrained boundaries need not specified in this section; drained boundary and flex boundary is to be specified. Element number and its side number is to be specified to define boundary.

The boundary condition can be modified in each analysis. Therefore, boundary conditions that will not change through the analyses are recommended to be specified in this section.

If boundary condition within the analyzed region, it is usual that one boundary belongs to several element, in which case the user needs to specify one side. The program finds elements that have the same side and set the same boundary condition.

NBC (I5)

1~ 5 NBC

Number of boundaries. If NBC = 0, input in the following is not necessary. Otherwise, NBC cards are required.

NBCS, NE, NSIDE, BCVAL	(315, F10.0)		
1~ 5 NBCS Typ	Type of boundary		
= 1:	Undrained boundary		
= 2:	Drained boundary whose boundary value $= 0$ .		
= 3:	= 3: Natural boundary whose boundary value is not zero		
= 4:	Fundamental boundary with nonzero boundary value		
6~ 10 NE Eler	nent number		
11~15 NSIDE Side	e number. Side number 1 is a side composed with first and second element		
node	e, 2 with second and third, 3 with $3^{rd}$ and $4^{th}$ , 4 with $4^{th}$ and first. For		
trigo	phometric element, use 3 for the side within 3 <sup>rd</sup> and 1 <sup>st</sup> element nodes.		
16~25 BCVAL Bou	ndary value		

#### 5 Type of analysis

Analyses are sequentially conducted by choosing the type of analysis. The flow of the analyses is as follows. The user can repeat the job in this chapter depending on request. After finishing the analysis, the flow comes back to this section. This cycle is continued until the end of analyses.

At the beginning of analysis, all the elements are inactive, therefore first work is to activate them. It can be done by choosing ADDELM or CONSTRUCT. After that, necessary analytical sequences are specified.

The first job in this section is to specify the type of job, which is called option. Then go to relavant sections corresponding to the option. After job finishes, the input comes at the beginning of this chapter again.

The user should recognize the followings.

- i) Nonlinear incremental analysis is used STADAS.
- ii) Porewater pressure is either static pressure or excess pore water pressure depending on option. Correspondingly, type of boundary condition and boudnary value is different. See section 6.8 for detail.

KATYPE (A40)

1~ 40 KATYPE Fla

Flag indicating a type of analysis. It is capital letter character. The program retrieve first non-blank set of character that does not include blank to identify the analysis type. Therefore input of character after the first non-blank character set is neglected, which indicate this part can be used to write memorandum for memory of the analysis by the user. It is noted that idenfifier should be capitalized.

Analysis identifier	Content of analysis	Section
END	End of job	5.1
ADDELM	Activate element, change boundary condition	5.2
CONSTRUCT	Layer construction and switch-on-gravity analysis	5.3
EXCAVATE	Excavation analysis or inactivate element	5.4
STATIC	Static analysis	5.5
EARTHQUAKE	Earthquake response analysis	5.6
DYNAMIC	Dynamic analysis under node excitation	5.7
WATER	Chang eof water table and saturation condition	5.8
CONSOL	Consolidation analysis	5.9
EIGEN	Eigen value problem	5.10
FREESUP	Release of fixed constraint	5.11
TITLE	Change title	5.12
PRTSTATE	Print current state	5.13
OUTPUT	Export current response value	5.14
INPUT	Import response value	5.15
CONVERGE	Change convergency condition	5.16
PARAM	Change value of parameter	5.17
CLEARBS	Clear unbalanced force	5.18
DEBUG	Debug (to programmer only)	5.19

Note. Only ADDELM and DYNAMIC are possible for SH-wave analysis. Effective stress analysis is not possible.

### 5.1 End of the job

The run of job can be terminated by two methods.

1) In the case that there is no more data or when the program arrived at the end of input

2) "END" is specified as analysis identifier.

### STADAS prints

and terminates the job.

#### 5.2 Activate element and change boundary condition

By nature, if an element is activated or boundary condition is changed, it affects the overall behavior of the model. For example, weight of a newly activated element will increase stresses and strains of other element. in this option, however, it is assumed that the element appears suddenly without changing pre-existing element. Therefore, this option can be used for the case that the state variable is known (may be computed separately). This option is also valid for the material that does not be affected by initial stress.

#### 5.2.1 Fundamental input

MADD, MBNODE, ME	SIDE, NPRT1, NPRT2, MISTRS, NADMAS, FIN (715, 5X, A20)
1~ 5 MADD	Number of element blocks to activate
6~10 MBNODE	Number of node whose boundary condition is changed.
	>0: Modify from the previous condition
	<0: Modify from the original condition
11~15 MBSIDE	Number of side where boundary condition against water is changed.
16~ 20 NPRT1	= 0: Print the state variable of activated element.
	= 1: State variable of activated element is not printed.
21~ 25 NPRT2	= 0: Print the state after activating the elements.
	= 1: They are not printed.
26~ 30 MISTRS	= 0: State variable is specified by the user.
	= 1: Stresses and strains are zero.
31~35 NADMAS	Flag number to add virtual mass. NADMAS is a number of node blocks whose
	node numbers are in sequence and whose virtual mass is the same to each other.
41~ 60 FIN	File name from which element information in section 5.2.2 is read. If FIN is
	left blank, it indicates that data is read from the standard input device or from
	card.

#### 5.2.2 Element information

Boundary condition of activated nodes according to the activation of the element is set to be the one input in section 4.1. If the user wants to modify it, it must be done in this section through input of MBNODE.

At the beginning of each input in the following, two element numbers JELM and KELM are read, which indicates that elements from element number JELM to element number KELM are activate and have the same characteristics. If the user want to specify only one element, put KELM = 0, or put KELM = JELM.

It is also noted that KELM  $\geq$  JELM. If the user want to specify that the element is dry, put JELM a negative value, in which case absolute of JELM denotes an element number.

When MISTRS = 1 (Initial stresses and strains are zero), only one card is required. If the user specify an element that is already active, the program print warning but job will continue by initializing the state variables.

#### (1) Spring

JELM, KELM, EPS	(2I5, 3F10.0)
1~ 5 JELM	First element number
6~ 10 KELM	Last element number

 $11\sim 20$  EPS Generalizes strain (Relative displacement between node in the direction cosine direction)<sup>[6.15]</sup>

### (2) Dashpot

JELM, KELM (2	215)
1~ 5 JELM	First element number
6~10 KELM	1 Last element number

# (3) Beam

JELM, KE	LM, AM1, AM	M2, Q, AN	(2I5, 4F10.0)
1~ 5	JELM	First element number	
6~ 10	KELM	Last element number	
11~ 20	AM1	Moment at first node <sup>[6.23]</sup>	
21~ 30	AM2	Moment at second node <sup>[6.23]</sup>	
31~ 40	Q	Shear force	
41~ 50	AN	Axial force	

(4) Solid element for 2-dimentional analysis

JELM, KE	LM, SIGX, SI	GY, TAUXY, PWP0, SIGZ, PWP	(2I5, 6F10.0)
1~ 5	JELM	First element number	
6~ 10	KELM	Last element number	
11~ 20	SIGX	$\sigma'_x$	
21~ 30	SIGY	$\sigma'_y$	
31~ 40	TAUXY	$\tau_{xy}$	
41~ 50	PWP0	Hydrostatic pressure	
51~ 60	SIGZ	$\sigma_z^{\prime}$	
61~ 70	PWP	Excess pore water pressure	

# (5) Joint element

JELM, KEI	LM, V, U, PW	PO, PWP	(2I5, 4F10.0)
1~ 5	JELM	First elemen	nt number
6~ 10	KELM	Last elemen	nt number
11~ 20	V	Displaceme	ent in normal direction
21~ 30	U	Displaceme	ent in tangential direction
31~ 40	PWP0	Hydrostatic	pressure
41~ 50	PWP	Excess pore	e water pressure

# (6) Rotational spring

JELM, KEL	LM, EPS	(2I5, FF10.0)
1~ 5	JELM	First element number
6~ 10	KELM	Last element number
11~ 20	EPS	Rotational angle in radian <sup>[6.15]</sup>

(7) Solid element for SH-wave analysis

JELM, KEI	LM, TAUYZ,	TAUZX	(2I5, 4F10.0)
1~ 5	JELM	First elem	ent number
6~ 10	KELM	Last eleme	ent number
11~ 20	TAUYZ	$ au_{yz}$	
21~ 30	TAUZX	$ au_{xz}$	

5.2.3 Boundary condition of node

Input in this section is necessary only when MBNODE>0. Total MBNODE cards are input. NODE, (MBDRY(I), I=1, (4I5) 3)

1~ 5	NODE	Node number
6~ 10	MBDRY(1)	Flag number indicating the change of fixity condition in x-directoin.
11~ 15	MBDRY(2)	Flag number indicating the change of fixity condition in y-directoin.
16~ 20	MBDRY(3)	Flag number indicating the change of fixity condition
		= 0: Not modified
		= 1: Fixed
		= 2: Make free
		< 0: Dependent degree of freedom, in which case independent node number is to
		be specified with minus sign.

### 5.2.4 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE>0. MBSIDE cards are input in total.

# ITYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)

1~ 5 ITYPE	Flag number indicating a type of the boundary	
	=-1: Undrained boundary	
	=-2: Drained boundary	
	=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero.	
	=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero.	
	= 0: The program select suitable boundary condition. If there is an	
	neighboring element, drainage to the element is considered. If there is no	
	neighboring element, undrained boundary is set.	
	> 0: Neighboring element number. By this option, it becomes possible to	
	connect any elements. This option is also used to correct the network	
	that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote	
	neighboring element number and side number.	
6~10 IELM	Element number	
11~ 15 ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element node	
	and (n+1)-th element node is n. For 2-dimensional analysis, side number	
	between 4 <sup>th</sup> element node and first element node is 4, except the case of	
	trigonometric element in which side number between 3 <sup>rd</sup> and first is 3.	
16~ 20 BVAL	Boundary value	
21~ 25 JELM	Neighboring element, which is used only when ITYPE>0.	
26~ 30 JSIDE	Side number of element JELM.	

#### 5.2.5 Virtual mass

Input in this section is necessary only when NADMAS > 0. NADMAS cards are required in total. It is noted that input in this section is not by mass but by weight. Input virtual mass in added to the previous mass, hence if negative value is input it will be subtracted.

Number of virtual mass input in a node depends on the dimension of the analysis. At any dimension, first data is a weight against directional movement (same with any direction), and the rest are weight against rotation that may be different in the direction because it depend on the shape. There are 0, 1, and 3 rotational component in 1-, 2-, and 3-dimension, respectively.

### IS, IE, AMASSX, AMASSR (215, 2F10.0)

1~ 5	IS	First node number
6~ 10	IE	Last node number. The same weight is added to the node between IS and IE.
		If $IE < 0$ , the program set $IE = IS$ .
11~ 20	AMASSX	Virtual mass component to be added against movement.
21~ 30	AMASSR	Virtual mass component to be added against rotation

#### 5.3 Layer construction and switch-on-gravity analysis

Weight of activated elements is applied as external load in the layer construction or switch-on-gravity analysis. External load is divided by NSTEP, which is specified as input, and applied NSTEP times in this analysis.

Treatment of water is to be done carefully in the layer construction analysis. It is few case that saturated soil is used as construction material. Usually either soil is thrown in the water or water level is increased after the construction of the structure. In this analysis, the former analysis is employed because we intend to avoid the stress cycle that may occur in the latter analysis. The latter analysis is also possible in STADAS by constructing the dry element and use option "WATER" that changes water level.

#### 5.3.1 Flag on analytical method

NONSOL, NSTEP, NST	E1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN, ANGVRT (715, F5.0)		
1~ 5 NONSOL	OL Flag number indicating the method of numerical analysis <sup>[6.19]</sup>		
	= 1: Tangent modulus		
	= 2: Initial stress		
	= 3: Modified initial stress <sup><math>[6.18]</math></sup>		
	= 4: Modified Newton-Raphson		
6~ 10 NSTEP	Incremental analysis is conducted NSTEP times to apply the load.		
11~ 15 NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement for output		
	= 0: Displacement starts from zero.		
	= 1: Displacement is a continuum value from previous analysis.		
16~ 20 NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis		
	= 0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.		
	= 1: Displacement is carried into next analysis.		
21~ 25 ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative		
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental		
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a		
	message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the		
	user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be		
	negative value, in which case absolute value denotes maximum number of		
	iteration.		
26~ 30 NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when		
	NPRT > 0. If NPRT = 0, It is not printed. It is noted that final state is		
	printed regardless the value of NPRT.		
31~35 NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition.		
	= 0: Drainage, hence no excess pore water pressure is $\land$ ANGVRT		
	generated.		
	= 1: Undrained condition		
36~ 40 ANGVRT	Direction of acceleration in degree. 0 indicates		
	vertical direction.		
	* v		

#### 5.3.2 Fundamental data

MADD, MBNODE, MBSIDE, NPRT1, NPRT2, MISTRS, NADMAS, NADLD, FIN (815, A20)

 $1\sim 5$  MADD Number of element blocks to activate

6~ 10 MBNODE Number of node whose boundary condition is changed

	>0: Modify from the previous condition
	<0: Modify from the original condition
	The change of boundary condition specified here become valid for the
	coming analysis. For example, it fixed boundary is changed to free boundary,
	force acting the support is released, therefore state of the analyzed region
	changes. However, such kind of effect is not considered here. If the user
	want to do it, use ""FREESUP" option.
11~ 15 MBSIDE	Number of side where boundary condition against water is changed.
16~20 NPRT1	= 0: Print the state variable of activated element.
	= 1: State variable of activated element is not printed.
21~ 25 NPRT2	= 0: Print the state after activating the elements.
	= 1: They are not printed.
26~ 30 MISTRS <sup>[6.15]</sup>	<sup>5]</sup> Flag number to give initial stress of activated element.
	= 0: The program computes it suitably.
	= 1: Initial stresses are set zero. Use it if constitutive models of all activated
	elements are not effective stress independent one.
	= 2: Stresses are given by the user through input data
	= 3: Same as MISTRS = 0, except that the analysis starts from the given state,
	which will result in a little larger stress.
31~35 NADMAS	Flag number to add virtual mass. NADMAS is a number of node blocks whose
	node numbers are in sequence and whose virtual mass is the same to each other.
36~ 40 NADLD	Number of nodal loads to be applied at the same time. Load acting one
	direction of a node is counted one.
41~ 60 FIN	File name from which element information in section 5.3.2 is read. If FIN is
	left blank, it indicates data is read from the standard input device or from card.

#### 5.3.3 Element information

Boundary condition of activated nodes according to the activation of the element is set to be the initial setting. If the user want to modify it, it must be done in this section through input of MBNODE.

At the beginning of each input in the following, two element numbers JELM and KELM are read, which indicates that elements from element number JELM to element number KELM are activate and have the same characteristics. If the user want to specify only one element, put KELM = 0, or put KELM = JELM.

It is also noted that KELM  $\geq$  JELM. If the user want to specify that the element is dry, put JELM a negative value, in which case absolute of JELM denotes an element number.

When MISTRS = 0 or 1 (Initial stresses and strains are determined by the program), only one card is required.

#### (1) Spring

JELM, KELM, DISP	(2I5, F10.0)
1~ 5 JELM	First element number
6~ 10 KELM	Last element number
11~ 20 DISP	Generalizes strain (Relative displacement between node in the direction cosine direction) <sup>[6.15]</sup>

(2) Dashpot

JELM, KELM	(2I5)	
1~ 5 JEL	М	First element number
6~ 10 KEI	LM	Last element number

# (3) Beam

JELM, KE	LM, AM1, Al	M2, Q, AN	(2I5, 4F10.0)
1~ 5	JELM	First element number	
6~ 10	KELM	Last element number	
11~ 20	AM1	Moment at first node <sup>[6.23]</sup>	
21~ 30	AM2	Moment at second node <sup>[6.23]</sup>	
31~ 40	Q	Shear force	
41~ 50	AN	Axial force	

# (4) Solid element for 2-dimensional analysis

ELM, KEL	M, SIGX, SIC	GY, TAUXY, SIGZ	(2I5, 6F10.0)
1~ 5	JELM	First element number	<u>.</u>
6~ 10	KELM	Last element number	
11~ 20	SIGX	$\sigma'_x$	
21~ 30	SIGY	$\sigma'_y$	
31~ 40	TAUXY	$ au_{xy}$	
41~ 50	SIGZ	$\sigma_z$	

# (5) Joint element

JELM, KELM, V, U	(2I5, 2F10.0)
1~ 5 JELM	First element number
6~ 10 KELM	Last element number
11~ 20 V	Normal stress
21~ 30 U	Shear stress

# (6) Rotational spring

JELM, KELM, DISP		(2I5, 2F10.0)
1~ 5	JELM	First element number
6~ 10	KELM	Last element number
11~ 20	DISP	Rotational angle in radian <sup>[6.15]</sup>

# (7) Solid element for SH-wave analysis

JELM, KEI	LM, TAUYZ,	TAUZX	(2I5, 4F10.0)
1~ 5	JELM	First elem	ent number
6~ 10	KELM	Last elem	ent number
11~ 20	TAUYZ	$ au_{yz}$	
21~ 30	TAUZX	$ au_{zx}$	

#### 5.3.4 Boundary condition of node

Input in this section is necessary only when MBNODE > 0. MBNODE card are input in total.

NODE, (MBDRY(I), I=1	., 3) (1615)
1~ 5 NODE	Node number
6~ 10 MBDRY(1)	Flag number indicating the change of fixity condition in x-direction
11~ 15 MBDRY(2)	Flag number indicating the change of fixity condition in y-direction
16~ 20 MBDRY(3)	Flag number indicating the change of fixity condition for rotation
	= 0: Not modified
	= 1: Fixed
	= 2: Make free
	< 0: Dependent degree of freedom, in which case independent node number is to
	be specified with minus sign.

#### 5.3.5 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE > 0. MBSIDE card are input in total.

Saturation condition (dry or wet of an element) cannot be changed by layer construction analysis. Saturated condition of activated element must agree with the boundary condition.

TYPE, IELM, ISIDE, B	VAL, JELM, JSIDE (615)		
1~ 6 ITYPE	1~ 6 ITYPE Flag number indicating a type of the boundary		
	=-1: Undrained boundary		
	=-2: Drained boundary		
	=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero		
	=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero		
	= 0: The program select suitable boundary condition. If there is a		
	neighboring element, drainage to the element is considered. If there is no		
	neighboring element, undrained boundary is set		
	> 0: Neighboring element number. By this option, it becomes possible to		
	connect any elements. This option is also used to correct the network		
	that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote		
	neighboring element number and side number.		
6~10 IELM	Element number		
11~15 ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element node		
	and (n+1)-th element node is n. For 2-dimensional analysis, side number		
	between 4 <sup>th</sup> element node and first element node is 4, except the case of		
	trigonometric element in which side number between 3 <sup>rd</sup> and first is 3.		
16~ 20 BVAL	Boundary value		
21~ 25 JELM	Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$		
26~ 30 JSIDE	Side number of element JELM		

### 5.3.6 Virtual mass

Input in this section is necessary only when NADMAS > 0. NADMAS cards are required in total. It is noted that input in this section is not by mass but by weight. Input virtual mass in added to the previous mass, hence if negative value is input it will be subtracted.

Number of virtual mass input in a node depends on the dimension of the analysis. At any dimension, first data is a weight against directional movement (same with any direction), and the rest are weight against rotation that may be different in the direction because it depend on the shape. There is 0, 1, and 3 rotational component in 1-, 2-, and 3-dimension, respectively.

# IS, IE, AMASSX, AMASSR (215, 2F10.0)

1~ 5	IS	First node number
6~ 10	IE	Last node number. The same weight is added to the node between IS and IE.
		If $IE < 0$ , the program set $IE = IS$
11~ 20	AMASSX	Virtual mass component to be added for lateral movement
21~ 30	AMASSR	Virtual mass component to be added for rotation

### 5.3.7 Nodal load

Input in this section is require only when NADLD > 0. Totally NADLD cards are required.

ND, IDR, ALOAD (215, F10.0)

1~ 5 ND	Node number
6~ 10 IDR	Flag number indicating the direction to which load is applied
	= 1: $x$ -, = 2: y-directions, and = 3: rotation
11~ 20 ALOAD	Applied load

### 5.4 Excavation analysis

Elements are inactivated in the excavation analysis. Equivalent nodal forces of inactivate element are released. They are released by NSTEP step of calculation.

# 5.4.1 Flag on analytical method

NONSOL,	NSTEP, NST	TE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (715)
1~ 5	NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis <sup>[6.19]</sup>
		= 1: Tangent modulus
		= 2: Initial stress
		= 3: Modified initial stress <sup><math>[6.18]</math></sup>
		= 4: Modified Newton-Raphson
6~ 10	NSTEP	Incremental analysis is conducted NSTEP times to apply the load
11~ 15	NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement for output
		= 0: Displacement starts from zero
		= 1: Displacement is a continuum value from previous analysis
16~ 20	NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
		= 0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis
		= 1: Displacement is carried into next analysis
21~ 25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
		procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
		analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
		message and carries unbalance force into next incremental analysis. If the user
		want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be
		negative value, in which case absolute value denotes maximum number of
		iteration
26~ 30	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
		NPRT $> 0$ . If NPRT $= 0$ , It is noted that final state is printed regardless the
		value of NPRT
31~ 35	NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition
		= 0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated
		= 1: Undrained condition

# 5.4.2 Fundamental data

MSUB, MBNODE, MB	SIDE, NADMAS, NADLD (515)		
1~ 5 MSUB	Number of element blocks to inactivate		
6~10 MBNODE	Number of node whose boundary condition is changed		
	> 0: Modify from the previous condition		
< 0: Modify from the original condition			
The change of boundary condition specified here become valid for the			
	coming analysis. For example, it fixed boundary is changed to free boundary,		
	force acting the support is released, therefore, state of the analyzed region		
	changes. However, such kind of effect is not considered here. If the user		
	want to do it, use "FREESUP" option.		
11~15 MBSIDE	Number of side where boundary condition against water is changed.		
16~ 20 NADMAS	Flag number to add virtual mass. NADMAS is a number of node blocks whose		

	node numbers are in sequence and whose virtual mass is the same to each other.
21~ 25 NADLD	Number of nodal loads to be applied at the same time. Load acting one
	direction of a node is counted one.

#### 5.4.3 Element information

Inactivated elements is specified by their element number. In the following input two element numbers, JELM and KELM, are read. This indicates that elements from element number JELM to element number KELM are inactivated. When KELM is set less than JELM, the program set KELM = JELM.

JELM, KELM	(215)	
1~5JELM		First element number
6~10KELM		Last element number

#### 5.4.4 Boundary condition of node

Input in this article is necessary only when MBNODE>0. Totally, MBNODE lines are required.

### NODE, (MBDRY(I), I=1, 3) (16I5)

1~ 5	NODE	Node number
6~ 10	MBDRY(1)	Flag number indicating the change of fixity condition in x-direction.
11~ 15	MBDRY(2)	Flag number indicating the change of fixity condition in y-direction.
16~ 20	MBDRY(3)	Flag number indicating the change of fixity condition for rotation.
		= 0: Not modified
		= 1: Fixed
		= 2: Make free
		< 0: Dependent degree of freedom, in which case independent node number is to
		be specified with minus sign.

#### 5.4.5 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE > 0. Totally MBSIDE card are input.

Saturation condition (dry or wet of an element) cannot be changed by excavation analysis. Saturated condition of inactivate element must agree with the boundary condition

TYPE, IELM, ISIDE, B	VAL, JELM, JSIDE (615)		
1~ 5 ITYPE	Flag number indicating a type of the boundary		
	=-1: Undrained boundary		
	=-2: Drained boundary		
	=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero		
	=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero		
	= 0: The program select suitable boundary condition. If there is a neighboring		
	element, drainage to the element is considered. If there is no neighboring		
	element, undrained boundary is set		
	> 0: Neighboring element number. By this option, it becomes possible to		
	connect any elements. This option is also used to correct the network		
	that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote		
	neighboring element number and side number.		

6~ 10	IELM	Element number
11~ 15	ISIDE	Side number, which is numbered such that boundary between n-th element node
		and $(n+1)$ -th element node is n. For 2-dimensional analysis, side number
		between 4 <sup>th</sup> element node and first element node is 4, except the case of
		trigonometric element in which side number between 3 <sup>rd</sup> and first is 3.
16~ 20	BVAL	Boundary value
21~ 25	JELM	Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$
26~ 30	JSIDE	Side number of element JELM

### 5.4.6 Virtual mass

Input in this section is necessary only when NADMAS > 0. NADMAS cards are required in total. It is noted that input in this section is not by mass but by weight. Input virtual mass in added to the previous mass, hence if negative value is input it will be subtracted.

Number of virtual mass input in a node depends on the dimension of the analysis. At any dimension, first data is a weight against directional movement (same with any direction), and the rest are weight against rotation that may be different in the direction because it depend on the shape. There is 0, 1, and 3 rotational component in 1-, 2- and 3-dimension, respectively.

# IS, IE, AMASSX, AMASSR (2I5, 2F10.0)

1~ 5 IS	First node number
6~ 10 IE	Last node number. The same weight is added to the node between IS and IE.
	If $IE < 0$ , the program set $IE = IS$ .
11~ 20 AMASSX	Weight for lateral movement
21~ 30 AMASSR	Weight for rotation

#### 5.4.7 Nodal load

Input in this section is require only when NADLD > 0. NADLD cards are required in total.

ND, IDR, ALOAD	(2I5, 2F10.0)
1~ 5 ND	Node number
6~ 10 IDR	Flag number indicating the direction to which load is applied
	For 1-dimensional analysis, always set 1.
	For 2-dimensional analysis, 1, 2, and 3 for x-, and y-direction, and rotation.
	For 3-dimensional analysis, 1 to 3 corresponds to x, y, and z direction, and 4 to 6
	corresponds moment around x-, y- and z-axis, respectively.
11~ 20 ALOAD	Applied load

#### 5.5 Static analysis

Fundamental feature of static analysis in STADAS is as follows:

Nodal load or nodal displacement (displacement constraint) is applied at several nodes simultaneously. They are proportional to each other.

Either monotonic load or repeated load is applied. In the repeated loading, loading is controlled either by specifying unload points or by specifying increments. In the monotonic loading or repeated loading in which unload points are specified, step-by-step procedure is necessary because STADAS assumes nonlinear analysis. The user can control this procedure by specifying load increment or by specifying total number of steps.

The control that load is applied and unload is controlled by displacement, or displacement is applied and unload is controlled by load is possible. In this control, STADAS does not find exact unloading points; loading direction is reversed when control parameter crosses the unloading point. It is also noted that whenever control parameter crosses the specified point, then the direction of loading reversed.

#### 5.5.1 Flag on analytical method

NONLIN, NSTE1, NST	E2, ITERMX, NDRAIN, NOUTND, NOUTEM, NPRT (1015)
1~ 5 NONLIN	Flag number indicating the method of numerical analysis <sup>[6.19]</sup>
	= 1: Tangent modulus
	= 2: Initial stress <sup><math>[6.18]</math></sup> . In the analysis to specify displacement, as coefficient
	matrix changes step by step, this option is not valid, and replaced into
	NONLIN=3.
	= 3: Modified initial stress
	= 4: Modified Newton-Raphson
6~ 10 NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement for output
	= 0: Displacement starts from zero
	= 1: Displacement is a continuum value from previous analysis
11~15 NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
	= 0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis
	= 1: Displacement is carried into next analysis.
16~ 20 ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
	message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the
	user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be
	negative value, in which case absolute value denotes maximum number of
	iteration
21~25 NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition
	= 0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated
	= 1: Undrained condition
26~ 30 NOUTND	Number of nodes at which response value at all steps is output in the file.
	When $NOUTND < 0$ , response value of all node is output.
31~ 35 NOUTEM	Number of elements at which response value at all steps is output in the file.
• < < < = = = =	When NOUTEM $< 0$ , response value of all node is output.
36~ 40 NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
	NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result of

specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is printed regardless the value of NPRT.

It is noted that NPRT = -9999 has special meaning. It is used only when NCTRL (input in next card) is 3 to 5, and indicates that the result of analysis is printed at the time when unloaded occurs.

### 5.5.2 Control input

NCTRL, NLCTRL, NR	CTRL, NLOAD, NCTRLN, NCTRLD, NCYC, ASTOP (715, F10.0)
1~ 5 NCTRL	Loading method. The correlation of NCTRL and the following data is shown
	in the table below.
	= 1: Monotonic loading in which goal is specified
	= 2: Monotonic loading by specified steps loading
	= 3: Constant amplitude loading
	= 4: Constant amplitude loading and go back to origin (see figure below)
	= 5: Repeated loading
	= 6: All loading points are input
6~10 NLCTRL	Loading method
	= 1: by nodal load
	= 2: by nodal displacement
11~15 NRCTRL	Flag number indicating the control of unloading
	= 0: same value with NLCTRL
	= 1: by nodal load
	= 2: by nodal displacement
16~ 20 NLOAD	Number of loading points. Load acting in one direction of a node is counted as
	1.
21~ 25 NCTRLN	Node number by which unloading is controlled. If input 0, first degrees of
	freedom (the user cannot control it). When both NLCTRL and NRCTRL are 1,
	and NCTRLN is set –1, sum of all the load at loading points are used as control
	parameter. It is possible to specify NCTRLN = NCTRLD 0 when NCTRL = $6$ .
	It may be convenient, however, to specify them because response value is
	printed.
26~ 30 NCTRLD	Flag number indicating the direction for unloading control
	1-dimensional analysis, NCTRLD = 1
	2-dimensional analysis, $1 = x$ , $2 = y$ , $3 = rotation$
	3-dimensional analysis, $1 \sim 3 = x$ , y, and z; $4 \sim 6 =$ rotation around x, y, and z
31~35 NCYC	Number of half cycle when NCIRL = 3, 4, and 5, or total steps when NCIRL = $2 - 16$
	2 and 6 $(1 + 1) = (1 + 1$
36~ 45 ASTOP	If absolute value of displacement in the NCIRLD direction of node NCIRLN
	exceeds ASTOP, the program terminates. This flag is to control too much
	displacement, which may occur due to error of input data and insufficient coding
	or constitutive model, etc. If $ASTOP = 0$ , this function does not work.

Table showing the parameters required for each control of NCTRL

NCTRL	1	2	3	4	5	6
NLCTRL	1~2	1~2	1~2	1~2	1~2	1~2
NRCTRL	0~2		0~2	0~2	0~2	

NLOAD	0	0	0	0	0	0
NCTRLN	0		0	0	0	•
NCTRLD	0		0	0	0	•
NLOADP	0	0	0	0	0	0
ANLOAD	0	0	0	0	0	
NCYC	_	0	0	0	0	0
AMPL	0	0	0	0	0	

#### 5.5.3 Input and output file name

# FOUT, FIN (2A20)

 $1\sim 20$  FOUT File name to output nodal response value and/or element response value (See section 1.5)

 $11 \sim 40$  FIN This input is required only when NCTRL = 6, and indicates the file name from which loading value is input. Blank input for FIN indicates the standard input device or card input

#### 5.5.4 Loading node and direction

((NLOADP(J, I), J = 1, 2), I = 1, NLOAD) (1015) Five nodal data in one line

1~ 5 NLOADP(1, I) Node number of I-th loading point

- 6~ 10 NLOADP(2, I) Direction
  - 1-dimension; always set 1
  - 2-dimension; 1, 2, and 3 indicate x-, and y-direction and rotation
  - 3-dimension; 1~3=x, y, and z direction. 4~6=moment around x-, y-, and zaxis

Note. Load can be applied to both independent freedom and dependent freedom. If load is applined to both, the sum total is treated as load. On the other hand, displacement cannot be specified to dependent freedom, in which case the program terminates.

#### 5.5.5 Ratio of proportional

(ANLOAD(I), I = 1, NLOAD) (5F10.0)

1~ 10 ANLOAD(I) Ratio of proportional at I-th loading point. ALOAD(I) multiplied by the AMPL input later gives actual load.

#### 5.5.6 Response value at node

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output are required are specified. Ten node numbers are input in one card.

 $\begin{array}{c|c} (NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) \end{array} (10I5) \\ \hline NNDOUT(J) \quad Node numbers. \quad If NNDOUT(J) = 0, input earthquake is printed \\ \end{array}$ 

#### 5.5.7 Response value of element

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output is required are specified. Ten element numbers are input in one card.

# (NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (1015)

NELOUT(J) Element numbers

#### 5.5.8 Step number for print the result of analysis

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. step number for printing state variable of the model is specified by the user. Step numbers at which state variable of that step is printed are specified. Ten step numbers are input in one card.

(NPRTSTP(J), J = 1, NPRT) (8F10.0)

NPRTSTP(J) Step number to print response value.

#### 5.5.9 Magnitude of Loading

Input in this section is different depending on the value of NTCRL

### (1) NTCRL = 1 (Monotonic loading)

AINCRE, AEND	(2F10.0)
1~ 10 AINCR	E Increment. Sign of AINCRE has sense
11~ 20 AEND	Final response value. The analysis stops when response value exceeds AEND

#### (2) NCTRL = 2 (Monotonic loading, controlled by step)

The analysis stops after computing NCYC incremental analysis.

AINCRE (F10.0)

1~ 10 AINCRE Increment. Sign of AINCRE has sense

### (3) NCTRL = 3, 4 (Cyclic loading)

The difference between NCTRL = 3 and 4 are to compute additional analysis after the end of NCYC half cycles of loading (see following figure).



# AINCRE, AMP (2F10.0)

1~ 10 AINCRE Increment. Sign of AINCRE has sense; it shows the direction of first loading.
 11~ 20 AMP Amplitude.

### (4) NCTRL = 5 (Repeated loading)

In this section, two kinds of data are required. The first input related to incremental value, which can
be done by one card. After that, NCYC unloading points are input, eight data per one card. In general specified points are unloading points at which loading direction reversed, but not necessary to be unloading points. The program determines the direction of loading after passing the specified points by looking the current response value and coming specified points.

Increments (first one card)

AINCRE(F10.0)1~ 10AINCREIncrements.Sign of AINCRE has sense; it indicates loading direction at the beginning of analysis.

Unloading points (Total NCYC data)

(5) NCTRL = 6 (Specify each loading)

The following input is to be repeated NCYC times.ANLOAD(J), J = 1, NLOAD(8F10.0)ANLOAD(J)J-th loading value

# 5.6 Earthquake response analysis

Input for earthquake response analysis for option "EARTHQUAKE" is described in this section.

-

# 5.6.1 Control input (1)

NINTEG, NDMPM, NS	TE1, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, FOUT (615, A20)
1~ 5 NINTEG	Flag number indicating the method of numerical integration <sup>[6.19]</sup>
	= 1: Newmark's $\beta$ method
	= 2: Predictor-corrector method using initial stiffness (stress transfer)
	= 3: Predictor-corrector method in which initial modulus is computed at each
	incremental analysis
	= 4: Predictor-corrector method in which tangent modulus is computed at each
	incremental analysis
	= 5: Newmark's $\beta$ method in which only one iteration will be conducted when
	unload occurred.
6~ 10 NDMPM	Flag number indicating the method to build damping matrix
	= 0: Rayleigh damping (mass and stiffness proportional damping), which is
	computed at the beginning of analysis and kept constant through the
	analysis
	= 1: Raiyeigh damping (mass and stiffness proportional damping), that is
	computed at every incremental procedure
	Note: Do not use NDMPM = 1 when constitutive model does not
	output tangent modulus. It is also noted that damping matrix here is
	computed from global mass and stiffness matrix; proportional damping in
	each element is also computed and added to the damping matrix.
	= 2: Modal damping. Modal damping matrix is to be computed before using
	this option by option "EIGEN"
$11 \sim 15 \text{ NSTE1}^{[6.14]}$	Flag number indicating the displacement for output
	= 0: Displacement, velocity and acceleration start from zero
	= 1: Thy are a continuum value from previous analysis
$16 \sim 20 \text{ NSTE2}^{[6.14]}$	Flag number indicating the displacement, velocity and acceleration at the end of
	the analysis
	= 0: They are not left in the subsequent analysis
	= 1: They are carried into next analysis
	= 2: Displacement is carried into next analysis, but velocity and acceleration are
	not left
21~25 ITERMX	ITERMX has sense when NINTEG $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
	message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the
	user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be
	negative value, in which case absolute value denotes maximum number of
	iteration.
26~ 30 NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition
	= 0: Drainage, hence boundary condition of pore water works
	= 1: Undrained condition

31~ 50 FOUT File name for output time history of response values. If left blank, same with previous file name is used.

# 5.6.2 Control data (2)

ALPHA, B	ETA, NOUTI	ND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, COEF1, COEF2 (2F10.0, 4I5, 2F10.0)
1~ 10	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient for mass matrix proportional damping (Rayleigh damping)
11~ 20	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient for stiffness proportional damping (Rayleigh damping)
21~ 25	NOUTND	Number of nodes whose time history is output. NOUTND $< 0$ indicates time
		histories of all nodes are output
26~ 30	NOUTEM	Number of elements whose time history is output. NOUTEM $< 0$ indicates
		time histories of all nodes are output
31~ 35	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
		NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result of
		specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is
		printed regardless the value of NPRT
36~ 40	MXPRT	Temporary peak response value is printed every MXPRT steps when MXPRT $>$
		0. It is not printed if MXPRT = 0. If MXPRT < 0, peak response value is of
		specified steps (input by the user) is printed. It is noted that peak response
		value at the end of earthquake is always printed regardless tot he value of
		MXPRT
41~ 50	COEF1	The value of $\beta$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.25
		(constant acceleration) or 1/6 (linear acceleration)
51~ 60	COEF2	The value of $\alpha$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.5
		(Crank-Nicholson)

# 5.6.3 Input related to earthquake wave

NDATA, N	CARD, DT, 1	NSDIV, (IBASND(I), $I = 1, 2$ ), EQFMT	(2I5, F10.0, 3I5, 5X, A40)
1~ 5	NDATA	Number of earthquake data	
6~ 10	NCARD	Number of earthquake data written in a car	d (≤20)
11~ 20	DT	Time increment of input earthquake; durati	on of earthquake = NDATA*DT
21~ 25	NSDIV	Time increment is divided by NDIV to use	smaller time increment for numerical
		integration.	
26~ 30	IBASND(1)	Flag to output displacement and velocity in	x-, y-, and z-direction
31~ 35	IBASND(2)		
		= 0: Absolute value for rigid base and $Re$	elative response value to outcropping
		for elastic base	
		= 1: Absolute value	
		> 0: Node number. Response value relativ	ve to this node is output
41~ 80	FRMT	FORMAT by which earthquake wave is rea	ad

# 5.6.4 Earthquake name

IX, IY, EQNAM	(211, 8X, A40)
1~ 1 IX	Set 1 when there is earthquake input in x-direction, otherwise set 0
2~ 2 IY	Set 1 when there is earthquake input in y-direction, otherwise set 0

3~	3	IZ	Set 1	when the	nere is	earthquake wave,	, which is pri	nted with	the result
	= 0	FOULD		0.1	. 4	1			

11~ 50 EQNAM Name of the earthquake

# 5.6.5 File name of earthquake wave

Input in this subsection is to be done every time when the input of either IX, IY or IZ = 1. EQMULT, NSKP, FILNAM (F10.0, I5, 5X, A20)

- $1 \sim 10$  EQMULT Multiplication factor for the earthquake data read in the file.(default 1.0)
- 11~ 15 NSKP Data in the file starts (NSKP+1) lines, therefore first NSKP lines are skipped.

21~ 40 FILNAM Filename

# 5.6.6 Node numbers for response output

This subsection is required only when NOUTND>0. Node numbers whose output is required are specified. Ten more numbers are input in one card.

(NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (1015)

NNDOUT(J) Node number. If NNDOUT(J) = 0, input earthquake wave is output.

# 5.6.7 Element numbers for response output

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output is required are specified. Ten element numbers are input in one card.

(NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (10I5)

NELOUT(J) Element number

# 5.6.8 Time for temporary response value print

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Times when state variable is printed are specified. Eight times are input in one card.

(PRTTIM(J), J = 1, |NPRT|) (8F10.0) PRTTIM(J) Times

# 5.6.9 Time for temporary peak response value

Input in this subsection is required only when MXPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Times when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(AMXPRT(J), J = 1, MXPRT)(8F10.0) AMXPRT(J) Times

# 5.6.10 Earthquake wave

XCOMP(I), I = 1, NSDIV	(EQFMT)	Necessary only when IX>0 (see subsection 5.6.4)
YCOMP(I), I = 1, NSDIV	(EQFMT)	Necessary only when IY>0 (see subsection 5.6.4))
XCOMP(I) Accelerat	ion of input e	arthquake in x-direction
YCOMP(I) Accelerate	ion of input e	earthquake in y-direction

ZCOMP(I) Acceleration of input earthquake in z-direction

In general, the program assumes that files are different in each direction of acceleration wave. It is,

however, possible to use the same file. The program read NSDIV earthquake input in the same time under the format EQFMT in each directions, therefore earthquake data must corresponds to this input procedure.

# 5.7 Dynamic response analysis by node excitation

Input for the dynamic analysis by node excitation is described in this section.

-

# 5.7.1 Fundamental data (1)

NINTEG, NDMPM, N	STE1, NSTE2, ITERMX, NDRAIN, FOUT (615, A20)
1~ 5 NINTEG	Flag number indicating the method of numerical integration <sup>[6.19]</sup>
	= 1: Newmark's $\beta$ method
	= 2: Predictor-corrector method using initial stiffness (stress transfer)
	= 3: Predictor-corrector method in which initial modulus is computed at each
	incremental analysis
	= 4: Predictor-corrector method in which tangent modulus is computed at each incremental analysis
	= 5: Newmark's $\beta$ method in which only one iteration will be conducted when
6~ 10 NDMPM	Flag number indicating the method to build damping matrix
	= 0: Rayleigh damping (mass and stiffness proportional damping), which is computed at the beginning of analysis and kept constant through the analysis
	= 1: Ralyeigh damping (mass and stiffness proportional damping), which is
	computed at ever incremental procedure
	Note: Do not use NDMPM = 1 when constitutive model does not output
	tangent modulus. It is also noted that damping matrix here is computed from
	global mass and stiffness matrix; proportional dampping in each element is also
	computed and added to the damping matrix.
	= 2: Modal damping. Modal damping matrix is to be computed before using this option by option "EIGEN".
11~15 NSTE1 <sup>[6.14</sup>	<sup>4]</sup> Flag number indicating the displacement for output
	= 0: Displacement, velocity and acceleration start from zero
	= 1: Thy are a continuum value from previous analysis
16~ 20 NSTE2 <sup>[6.14</sup>	<sup>1]</sup> Flag number indicating the displacement, velocity and acceleration at the end of
	the analysis
	= 0: They are not left in the subsequent analysis
	= 1: They are carried into next analysis
	= 2: Displacement is carried into next analysis, but velocity and acceleration are not left
21~25 ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
	message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the
	user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be
	negative value, in which case absolute value denotes maximum number of
	iteration.
26~ 30 NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition.
	= 0: Drainage, hence boundary condition of pore water works.
	= 1: Undrained condition

31~ 35 FOUT File name for output time history of response values. If left blank, file name same with previous is used.

# 5.7.2 Fundamental data (2)

ALPHA, B	ETA, NOUT	ND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, COEF1, COEF2, (2F10.0, 4I5, 2F10.0, I5)
NLOAD		
1~ 10	ALPHA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient for mass matrix proportional damping (Rayleigh damping)
11~ 20	BETA <sup>[6.10]</sup>	Coefficient for stiffness proportional damping (Rayleigh damping)
21~ 25	NOUTND	Number of nodes whose time history is output. NOUTND $< 0$ indicates time
		histories of all nodes are output.
26~ 30	NOUTEM	Number of elements whose time history is output. NOUTEM $< 0$ indicates
		time histories of all nodes are output.
31~ 35	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
		NPRT $> 0$ . If NPRT = 0, it is not printed NPRT $< 0$ , the result of specified
		steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is printed
		regardless the value of NPRT.
36~ 40	MXPRT	Temporary peak response value is printed every MXPRT steps when MXPRT $>$
		0. It is not printed if $MXPRT = 0$ . If $MXPRT < 0$ , peak response value is of
		specified steps (input by the user) is printed. It is noted that peak response
		value at the end of earthquake is always printed regardless to the value of
		MXPRT.
41~ 50	COEF1	The value of $\beta$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.25
		(constant acceleration) or 1/6 (linear acceleration)
51~ 60	COEF2	The value of $\alpha$ for Newmark's $\beta$ method. Standard value is either 0.5
		(Crank-Nicholson)
61~ 65	NLOAD	Total number of load component

# 5.7.3 Indication of loading method

Number of loading point is input. One direction is counted one even in the same node, therefore, for example, count 2 if loaded in two directions of a node.

NLOAD(I5)1~ 5NLOADNumber of loading freedom.

# 5.7.4 Loading point

(NODEP(J, I), J = 1, 2), I = 1, NDATA (1615) NODEP(1, I) Node number NODEP (2, I) Direction. For 2-dimensional analyses, 1, 2, and 3 indicate x- and y-direction, and rotation

# 5.7.5 File name for lading data

FILNAM, FRMT (A20, A40) 1~ 20 FILNAM File name 21~ 60 FRMT FORMAT

5.7.6	Method	of	loading	scheme
-------	--------	----	---------	--------

NDATA, D	OT, (IBASND	(I), I = 1, 2)	(I5, F10.0, 2I5)
1~ 5	NDATA	Number of ti	me increments.
6~ 15	DT	Time increm	ents. Duration is NSTEP*DT
16~ 20	IBASND(1)	Reference no	ode numher to output relative displacement and relative velocity in
		x-direction.	
		= 0: System	value (Relative to base for fixed base and relative to outcrop base
		for elas	tic base.)
		=-1: Absolute	e value.
		> 0: Node nu	mber
21~ 25	IBASND(2)	Reference no	ode number to output relative displacement and relative velocity in
		-direction.	
		= 0: System	value (Relative to base for fixed base and relative to outcrop base
	NDATA, E 1~ 5 6~ 15 16~ 20 21~ 25	NDATA, DT, (IBASND) 1~ 5 NDATA 6~ 15 DT 16~ 20 IBASND(1) 21~ 25 IBASND(2)	NDATA, DT, (IBASND(I), I = 1, 2) $1 \sim 5$ NDATA Number of ti $6 \sim 15$ DT Time increm $16 \sim 20$ IBASND(1) Reference no x-direction. = 0: System for elas =-1: Absolut > 0: Node nu $21 \sim 25$ IBASND(2) Reference no -direction. = 0: System

- for elastic base.)
- =-1: Absolute value.
- > 0: Node number

### 5.7.7 Node numbers for response output

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output is required are specified. Ten node numbers are input in one card.

(NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (10I5)NNDOUT(J) Node number

### 5.7.8 Element numbers for response output

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output is required are specified. Ten element numbers are input in one card.

(NELOUT(J), J = 1, NOUTEL)(1015) NELOUT(J) Element numbers

### 5.7.9 Time for temporary response value print

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Time when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

$$(PRTTIM(J), J = 1, NPRT)$$
 (8F10.0)

PRTTIM(J) Time to output response value.

### 5.7.10 Time for temporary peak response value

Input in this subsection is required only when MXPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the

model are specified by the user. Time when state variables printed are specified. Eight times are input in one card.

 $(AMXPRT(J), J = 1, MXPRT) \quad (8F10.0)$ 

AMXPRT(J) Time to output maximum response value

5.7.11 Loading data

XCOMP(I), I = 1, NDATA (FRMT) XCOMP(I) Value of load

### 5.8 Change of water table

Change of saturation condition (dry to wet, or wet to dry) is possible only by this analysis. Boundary condition of pore water must correspond to a new saturation condition.

# 5.8.1 Fundamental data

NC	ONSC	)L, I	NSTEP, NST	E1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN (715)
	1~	5	NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis <sup>[6.19]</sup>
				= 1: Tangent modulus
				= 2: Initial stress
				= 3: Modified initial stress <sup>[6.18]</sup>
				= 4: Modified Newton-Raphson
	6~	10	NSTEP	Load caused by the change of water table is divided into NSTEP, and applied
				NSTEP times.
	11~	15	NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement for output
				= 0: Displacement starts from zero
				= 1: Displacement is a continuum value from previous analysis
	16~	20	NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement for output
				= 0: Displacement starts from zero
				= 1: Displacement is a continuum value from previous analysis
	21~	25	ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
				procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
				analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
				message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the
				user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be
				negative value, in which case absolute value denotes maximum number of
				iteration.
	26~	30	NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
				NPRT $> 0$ . If NPRT = 0, It is not printed. It is noted that final state is printed
				regardless the value of NPRT.
	31~	35	NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition
				= 0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated
				= 1: Undrained condition

# 5.8.2 Fundamental data

# MADD, MBSIDE, NADLD (315)

1~ 5 MADD Number of element blocks where saturation condition changes
 6~ 10 MBSIDE Number of side where boundary condition of pore water change
 11~ 15 NADLD Number of nodal loads to be applied at the same time. Load acting one direction of a node is counted one

## 5.8.3 Elements

Elements whose saturation condition is changed are specified here. MADD cards are to be specified in total. If is noted that boundary condition of pore water is to be consistent with a new configuration; the program does not check the inconsistency.

JELM, KELM, IFLG	(315)
1~ 5 JELM	Start element number
6~10 KELM	End element number; saturation condition of elements from JELM to KELM is
	changed
11~ 15 IFLG	Change of saturation condition
	= 1: To dry
	= 2: To wet

# 5.8.4 Boundary condition for pore water

Input in this section is necessary only when MBSIDE > 0. MBSIDE card are input in total.

Saturation condition (dry or wet 0<sup>f</sup> an element) cannot be changed by layer construction analysis. Saturated condition of activated element must agree with the boundary condition.

# TYPE, IELM, ISIDE, BVAL, JELM, JSIDE (615)

1~ 5 ITY	PE Flag number indicating a type of the boundary
	=-1: Undrained boundary
	=-2: Drained boundary
	=-3: Natural boundary whose boundary value is not zero
	=-4: Fundamental boundary whose boundary value is not zero
	= 0: The program select suitable boundary condition. If there is an
	neighboring element, drainage to the element is considered. If there is no
	neighboring element, undrained boundary is set.
	> 0: Neighboring element number. By this option it becomes possible to
	connect any elements. This option is also used to correct the network
	that the program misjudged. In this case, JELM and JSIDE denote
	neighboring element number and side number.
6~10 IEL	M Element number
11~ 15 ISID	E Side number, which is numbered such that boundary between n-th element node
	and (n+1)-th element node is n. For 2-dimensional analysis, side number
	between 4 <sup>th</sup> element node and first element node is 4, except the case of
	trigonometric element in which side number between 3 <sup>rd</sup> and first is 3.
16~ 20 BVA	AL Boundary value
21~ 25 JEL	M Neighboring element, which is used only when $ITYPE > 0$ .
26~ 30 JSIE	DE Side number of element JELM

# 5.8.5 Nodal load

Input in this section is require only when NADLD > 0. NADLD cards are required in total.

ND, IDR, ALOAD	(2I5, 2F10.0)
1~ 5 ND	Node number
6~ 10 IDR	Flag number indicating the direction to which load is applied
	For 1-dimensional analysis, always set 1
	For 2-dimensional analysis, 1, 2, and 3 for x-, and y-direction and rotation
	For 3-dimensional analysis, 1 to 3 corresponds to x, y and z direction, and 4 to 6

corresponds moment around x-, y- and z-axis, respectively

11~ 20 ALOAD Applied load

# 5.9 Consolidation analysis

# 5.9.1 Control input

NINTEG, NTCSL, NCS	LD, NCSLW, NSTE1, NSTE2, ITERMX, TEND (715, F10.0)
1~ 5 NINTEG	Flag number indicating the method of numerical integration <sup>[6.19]</sup>
	= 1: Tangent modulus
	= 2: Predictor-corrector method using initial stiffness (stress transfer)
	= 3: Predictor-corrector method in which initial modulus is computed at each incremental analysis <sup>[6.18]</sup>
	= 4: Predictor-corrector method in which tangent modulus is computed at each incremental analysis
6~ 10 NTCSL	Flag number to indicate time increment
	= 0: Constant, $\Delta t$
	> 0: Pairs of time increment and total steps in which specified time increment is used are specified
	=-1: Time increment is specified by the user
	=-2: Time increment increases gradually, such as $\Delta t = \Delta_{told}$ factor, where factor is input later.
11~ 15 NCSLD	Flag number indicating the load applied at each incremental analysis
	= 0: No external load
	> 0: NCSLD components of external load are applied
16~ 20 NCSLW	Change of boundary value of pore water in each incremental analysis, which can
	be used on the analysis of liquefaction of sea bed
	= 0: No change is specified
	> 0: Boundary value changes at NCSLW sides
21~ 25 NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement and velocity for output
	= 0: Displacement and velocity start from zero
	= 1: Thy are a continuum value from previous analysis
$26 \sim 30 \text{ NSTE2}^{[6.14]}$	Flag number indicating the displacement and velocity at the end of the analysis
	= 0: They are not left in the subsequent analysis
	= 1: They are carried into next analysis
	= 2: Displacement is carried into next analysis, but velocity is not left
31~ 35 ITERMX	ITERMX has sense when NINTEG $\geq 2$ , i.e., the case to conduct iterative
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
	message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the
	user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMA be
	iteration
36~ 15 TEND	Instanton. If TEND > 0, the program stops analysis at time TEND regardless of the input
JU- TJ I DIND	above

# 5.9.2 Output identification

# NOUTND, NOUTEM, NPRT, MXPRT, FOUT (415, A20)

 $1\sim 5$  NOUTND Number of nodes whose time history is output. NOUTND < 0 indicates time histories of all nodes are output

NOUTEM	Number of elements whose time history is output. NOUTEM $< 0$ indicates
	time histories of all nodes are output
NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
	NPRT > 0. If NPRT = 0, it is not printed. If NPRT < 0, the result of
	specified steps (input by the user) is printed. It is noted that final state is
	printed regardless the value of NPRT
MXPRT	Temporary peak response value is printed every MXPRT steps when MXPRT >
	0. It is not printed if $MXPRT = 0$ . If $MXPRT < 0$ , peak response value is of
	specified steps (input by the user) is printed. It is noted that peak response
	value at the end of earthquake is always printed regardless to the value of
	MXPRT.
FOUT	File name for time history output
	NOUTEM NPRT MXPRT FOUT

### 5.9.3 Time increments

Input in this section depends on the value of NTCSL

(	(1)	) N1	<b>FCSL</b>	= 0
---	-----	------	-------------	-----

DELT (F10.0)	
1~ 10 DELT	Time increments

(2) NTCSL > 0

NSTP(I), DELT(I), I = 1	, NTCSL	(I5, 5X, F10.0)
1~ 10 NSTP(I)	Total step	s in which DEPT(I) is used for time increment
11~ 20 DELT(I)	Time incr	ement

(3) NTCSL = -1

 NSDIV, FIN, CSLFM1
 (I5, 5X, A20, A40)

 1~10
 NSDIV
 Number of data in one FORMAT

 11~30
 FIN
 File name

 31~70
 CSLFM1
 FORMAT

# (4) NTCSL = -2

DELT, FACTOR	(2F10.0)
1~ 10 DELT	First time increment
11~ 20 FACTO	OR Multiplication factor

# 5.9.4 External load

Input in this section is required only when NCSLD > 0.

FILN0, CSLF	FMT (A2	(0, A40)
1~ 20 F	TILNO	File name from which external load is read
21~ 60 C	CSLFMT	FORMAT, which should be consistent to read NCSLD nodal loads

NODCSL(I, J), J = 1, 2), I = 1, NCSLD (10I5)

Node number and direction of the external load. For 2-dimensional analysis, input of direction number 1, 2, and 3 denote x- and y-direction and rotation.

### 5.9.5 Boundary condition of pore water

Input in this section is required only when NCSLW > 0.

FILN1, CSLFMT(A20, A40) $1 \sim 20$  FILN1File name from which data is read

21~ 60 CSWFMT FORMAT

 $\frac{\text{NODCSL}(I, J), J = 1, 2), I = 1, \text{NCSLD}}{\text{Element number and side number}}$ (1015)

#### 5.9.6 Node numbers for response output

This subsection is required only when NOUTND > 0. Node numbers whose output is required are specified. Ten node numbers are input in one card.

(NNDOUT(J), J = 1, NOUTND) (10I5)

NNDOUT(J) Node number. If NNDOUT(J) = 0, input earthquake wave is output

### 5.9.7 Element numbers for response output

This subsection is required only when NOUTEL > 0. Element numbers whose output is required are specified. Ten element numbers are input in one card.

(NELOUT(J), J = 1, NOUTEL) (1015) NELOUT(J) Element number

### 5.9.8 Time for temporary response value print

Input in this subsection is required only when NPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Times when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(PRTTIM(J), J = 1, NN) (8F10.0) PRTTIM(J) Times

#### 5.9.9 Time for temporary peak response value

Input in this subsection is required only when MXPRT < 0, i.e. times for printing state variable of the model are specified by the user. Times when state variables are printed are specified. Eight times are input in one card.

(AMXPRT(J), J = 1, NN) (8F10.0)AMXPRT(J) Times

# 5.9.10 Time for analysis

Input in this section is required only when NTCSL > 0.

# 5.9.11 External load

CSLLD	(CSLFMT)
	Nodal load

# 5.9.12 Boundary value of pore water

CSLLD (CSLFMT)

Boundary values

# 5.10 Eigen value problem

In the eigen value analysis, natural period, frequency, eigen vector, etc. are computed. Moreover, modal damping matrix is computed. Eigen values and eigen vectors are computed for all dynamic degrees of freedom. Eigen values are printed for all modes. Eigen vectors are printed up to specified mode. Participation factor, effective stiffness, effective mass, etc. are printed at the same time to print eigen vectors. In this case, eight modes are printed at the same time, therefore it is recommended to specify the number proportional to 8.

In the eigen value problem, it is required that stiffness matrix is to be symmetric. However, it may become unsymmetrical depending on constitutive model. The program makes symmetric matrix by using average value of the symmetrically positioned arguments.

5.	1	0.	1	Control	in	put
----	---	----	---	---------	----	-----

NSTIF, NMODE, NDMP, NDRAIN, NFOUT, FOUT (515, 5X, A20)				
1~ 5 NSTIF	Types of stiffness matrix			
	= 1: Initial modulus corresponding to current confining pressure			
	= 2: Tangent modulus			
6~10 NMODE	Mode number until which eigen vectors are printed			
11~ 15 NDMP	Flag number indicating the method to compute modal damping matrix			
	= 0: Not computed			
	= 1: Computed from modal damping value (specified by the user)			
	= 2: Strain energy proportional damping matrix			
16~ 20 NDRAIN	Flag number indicating the drained condition			
	= 0: Drained, in which only soil skeleton is interested			
	= 1: Undrained, in which coupling with water is considered			
21~ 25 NFOUT	Mode number until which eigen vectors are output in file FOUT.			
31~ 50 FOUT	File name to output eigen vectors.			

### 5.10.2 Modal damping value

Input in this section is required only when NDMP = 1, i.e., damping matrix based on modal damping is computed.

 NCRD
 (I5)

 1~ 5
 NCRD
 Number of mode blocks which have the same damping value.

 IM, JM, DAMP
 (2I5, F10.0): NCRD cards

1~ 5 IM	Start mode number.
6~ 10 JM	End mode number. No that $JM \ge IM$ . If $JM < IM$ , the program set $JM = IM$
	Modes from IM to JM have modal damping value DAMP.

11~ 20 DAMP Modal damping value in fracture.

Note: Number of modes of the model is equal to the dynamic degrees of freedom of the model, i.e., number of degrees of freedom of nonzero mass. If the user does not exactly know it, set sufficiently larger value (number of node times number of degrees of freedom in a node, for example). If input of mode number is greater than dynamic degrees of freedom, the program change it into dynamic degrees of freedom. It is not recommended to input mode number smaller than dynamic degrees of freedom based on the consideration that the behavior at higher mode does not affect the overall behavior,

because response value may be extraordinary large by resonant with higher mode since there is no damping in higher mode behavior.

# 5.11 Release fixed constraint

Release the reaction acting on the fixed support.

# 5.11.1 Control input

NONSOL, NSTEP, NST	TE1, NSTE2, ITERMX, NPRT, NDRAIN, NDFRE (815)
1~ 5 NONSOL	Flag number indicating the method of numerical analysis
	= 1: Tangent modulus
	= 2: Initial stress
	= 3: Modified initial stress <sup><math>[6.18]</math></sup>
	= 4: Modified Newton-Raphson
6~ 10 NSTEP	Incremental analysis is conducted NSTEP times to apply the load.
11~ 15 NSTE1 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacement for output
	= 0: Displacement starts from zero.
	= 1: Displacement is a continuum value from previous analysis.
16~ 20 NSTE2 <sup>[6.14]</sup>	Flag number indicating the displacements at the end of the analysis
	= 0: They are not left in the subsequent analysis
	= 1: They are carried into next analysis
21~25 ITERMX	Flag number indicating the displacement at the end of the analysis
	= 0: Displacement in this analysis is not left in the subsequent analysis.
	= 1: Displacement is carried into next analysis.
21~25 ITERMX	ITERMX has sense when NONLIN $\geq$ 2, i.e., the case to conduct iterative
	procedure. ITERMX is number of maximum iteration at each incremental
	analysis. If not converged within ITERMX iteration, then the program print a
	message and carries unbalanced force into next incremental analysis. If the
	user want to stop at the time when convergency is not obtained, set ITERMX be
	negative value, in which case absolute value denotes maximum number of
	iteration.
26~ 30 NPRT	Temporary response value of the model is printed every NPRT steps when
	NPRT > 0. If NPRT = 0. It is not printed. It is noted that final state is
	printed regardless the value of NPRT.
31~ 35 NDRAIN	Flag number indicating the drainage condition.
	= 0: Drainage, hence no excess pore water pressure is generated.
	= 1: Undrained condition
36~ 40 NDFRE	Number of degrees of freedom to release fixed support condition.

# 5.11.2 Free support

Specify node number and direction number where fixity condition is released. Totally NDFRE cards are input.

IND, IDIR	(2I5)	
1~ 5	IND	Node number
6~ 10	IDIR	Direction number
		$1 \sim 3$ , for x- and y-direction and rotation

# 5.12 Change title

Title is printed at every time where result of the analysis is printed. Therefore, it is natural to use the same title throughout the analysis. There may be a case, however, to change title to distinguish each case of analysis. It is controlled by input in this section.

TITLE(A80)
$$1 \sim 80$$
 TITLEA new title

## 5.13 Print current state

By this option, current state of the model such as constraint condition etc. is printed. No card input is necessary to complete this job.

# 5.14 Export current response value

Current response value is output in the file. This information is used by the option in next section.

FILEOUT (A20)

1~ 20 FILEOUT File name

# 5.15 Import response value

This option can be used only when the following conditions are satisfied.

Input through chapters 2 and 3 except the identification of the analysis.

Put this option just before the input of identification of the analysis input.

The program replace initial state of the model into input value, which enable to continue the analysis from the end of previous analysis. It is noted that result of eigen value problem (Modal damping matrix) is lost.

FILEOUT (A20)

*l~ 20 FILEOUT* Output file name

# 5.16 Convergency condition

Convergency condition is modified through the input in this section. If leave blank or zero, initial value will be kept unchanged. Therefore, the user input only the value of variable that he want to change.

ERR001, ERR002, IUN	BCE	(F10.0, I5)
1~ 10 ERR001	New e	error value. Initial value = $10^{-3}$ . The criteria is $  f   \le ERR001 \cdot   f_0  $ ,
	where	f is error and $f_0$ is external load.
11~ 20 ERR002	New e	rror value foe relative judgement. Initial value = $10^{-3}$ . The criteria is
	$\left\ \Delta f\right\  \leq$	$ERR002 \cdot \ f_0\ $ , where $\Delta f$ is directed of error between present and
	previo	as iteration and $f_0$ is external load.
21~25 IUNBCE	Flag t	o carry unbalanced stress into next incremental analysis. Generally,
	IUNB	CE should be 1 (initial value), but in some case unbalanced force may
	becom	e undesired result, in which case the user can change it.
	= 1: U	nbalance stress will be carried into next step.

= 2: Unbalance stress will not be carried into next step.

# 5.17 Change parameter

Values of parameters used in the analysis is modified by this input.

Generally speaking, values of the paparemter should keep constant all through the analysis because they should depend on the materia. However, the user may change the value on the process of the analysis, in which case this option is available. It is noted that variables that the user can change ther value depends on the constitutive models and element type.

NMAT, NITP, JOB, (PARAM(J), J=1, 5)	(3I5, 5X, 5F10.3)
-------------------------------------	-------------------

 $1 \sim 5$  NMAT element type number

6~ 10 NITP Constitutibve model number. If NITP is positve, corresponding subroutine is called only once because PARAM is common for all elements. On the other hand, if NITP is negative, subrourine will be called for all elements because change will be done element by element.

 $11 \sim 15$  JOB Type of job

PARAM(1) to PARAM(5) will be changed only when nonzero value is specified.

NMAT	NIPT	JOB	PARAM
4	4		<ul> <li>Minimum value</li> <li>(1): Ratio of tangential stiffness to the initial stifness when perfectly plastic behavior is specified. Initial value = 10<sup>-10</sup>.</li> <li>(2): Inverst of atomosphetric pressure gor minimum confining stress. If the user want to specify minimum mean stress to be Pa/500, he need to input 500 (initial value)</li> <li>(3): Stiffness ratio to be used for modified initial stress method. Initial value = 2.0.</li> </ul>
4 3		1	Change minimum value (set NIPT=2) (1) Ratio of tangential stiffness to the initial stifness when perfectly plastic behavior is specified. Initial value = $10^{-10}$ . (2): Inverst of atomosphetric pressure gor minimum confining stress. If the user want to specify minimum mean stress to be Pa/500, he need to input 500 (initial value) (3): Stiffness ratio to be used for modified initial stress method. Initial value = 2.0.
		2	Change reference confining stress corresponding to degradation under cyclic loading (Set NIPT=-2) (1) =0.0: Use initial value =1.0: Use current value

### 5.18 Clear unbalanced force

Unbalanced force is cleared by this option. STADAS keeps unbalanced force at the end of each job and applies as external load for coming analysis in order to keep the equilibrium between external load and internal stress. Generally speaking, therefore, analysis should be conducted so that unbalanced force becomes small or zero. However, unbalanced force may not become negligibly small depending on the problem. This generally does not cause error, because this is natural. However, it may give unexpected result at the first step of the analysis. This option clears unbalanced force so that it will not be carried into next step. One should, however, note that external load and internal stress are now not in equilibrium state.

No data card is required in this option.

# 5.19 DEBUG

Print various information for the debug calculation. This option is for programmer only.

# KDBG1, KDBG2, KDBG3, KDBG4, KDBG5 (515)

1~ 5	KDBG1	= 0: No additional job.
		= 2: Unbalanced force will not be carried into next step in the dynamic analysis.
6~ 10	KDBG2	= 0: No additional job.
11~ 15	KDBG3	= 0: No additional job.
16~ 20	KDBG4	= 0: No additional job.
		= 2: Print the unbalanced force in subroutine PRECOR.
21~ 25	KDBG5	= 0: No additional job.
		= 2: Process of calculation such as stiffness matrix, solution, velocity,
		acceleration, unbalanced stress, stress-strain relationships will be pringed
		in subroutine PRECOR

#### 6 Comments for preparing input data

#### 6.1 Simultaneous equation

Sweep out methods are used to solve simultaneous equation in STADAS. As shown in section 6.2, coefficient matrix may be symmetric or unsymmetric. In addition, the subprogram may employ pivoting or not. It is recommended to employ pivoting for liquefaction and consolidation analysis because differences between the arguments of coefficient matrix may be very large in these analyses. The user should recognize these and choose suitable combination of NSOL (method to build coefficient matrix) and NCMAT (method to solve simultaneous equation). Table 6.1.1 shows the combination of these two variables.

NSOL NCMAT	1 (Symmetric)	2 (Nonsymmetric, pivoting)	3 (Nonsymmetic)
1 (Symmetric)	0	×	0
2 (Nonsymmetic)	×	0	0

Table 6.1.1. Relation between NSOL and NCMAT

#### 6.2 Coefficient matrix

In general, coefficient matrix or stiffness matrix is symmetric, but it may not be symmetric in STADAS in the following cases.

When the constitutive model used different function for potential function and yield surface, and when tangent modulus method is choose to solve the nonlinear equation. It is noted that even if potential function and yield function are not the same to each other, coefficient matrix is symmetric if the user select initial stress method.

Analyzed region and free field are connected by spring and/or dashpot.

Effect of kinematic energy on the head of water is considered in the liquefaction analysis.

The user should choose whether coefficient matrix is symmetric or unsymmetric. It does not cause problem when unsymmetric matrix is chosen for symmetric case, except that it requires more memory and more computing time than for symmetric matrix. However, it cause problem in the other case: symmetric matrix is chosen for unsymmetric matrix.

STADAS build band matrix for coefficient matrix to save memory and computing time except the case of eigen value problem and dynamic response analysis using modal damping matrix. Let band width  $N_B$  and number of unknowns N, required memory size is as follows:

Symmetric matrix  $N.N_B$ 

Unsymmetric matrix  $N.(2N_B-1)$ 

It indicates that unsymmetric matrix requires about double memory size than that of symmetric matrix. Computing time also increases for unsymmetric matrix. Therefore it has advantage to use symmetric matrix, NCMAT = 1.

It may be recommended, however, to choose unsymmetric matrix although coefficient matrix is symmetric. In the effective stress analysis, the difference of the arguments between stiffness term and pore water term may be very large. It depend on the unit system, of course, but the difference of order of more than 10 digit is not rare case for the conventional unit system. Moreover, in the nonlinear analysis stiffness may decrease very much to nearly zero. The accuracy in the cases may not be good.

STADAS employ special technique for the former case, but it mat not be perfect. Pivoting technique (NCMAT = 2) may solve the problem. Pivoting technique cannot be used in the symmetric matrix since

rows are exchanged. As described above, however, using an unsymmetric matrix requires more time and more memory. Therefore it is recommended for the user to run both case for some examples to recognize the order of error.

# 6.3 Thickness of element

In the two dimensional analysis, width of element is assumed to be unit length. However, the user may want to use different thickness to conduct, for example, pseudo 3-dimensional analysis. This flag is efficient in these case.

### 6.4 Total and effective stress analysis

The user should choose effective stress analysis if more than one element are 2-phase material (mixture of soil skeleton and water, both of which have degrees of freedom), and total stress analysis for other case. Of course, it is possible to choose effective stress analysis for 1-phase material, but it requires more input data and possible more memory and computing time. Especially it is noted that boundary condition of pore water pressure in section 2.7 is necessary for only effective stress analysis.

Not all the type of element can be treated as 2-phase material. Only spring element can have degrees of pore water pressure for 1-dimensional analysis. For 2- and 3-dimensional analyses, solid element and joint element can have degrees of pore water.

### 6.5 Hourglass mode deformation

STADAS employs significantly reduced integral method (one-pint Gauss integration) to compute element stiffness matrix to increase the efficiency of computing time and to compute element stiffness matrix accurate for the case that Poisson's ration is nearly 0.5 (it may occur in the undrained condition). It may cause, however, hourglass instability problem because deformation mode shown in Figure 6.5.1 does not dissipate energy in one-point integration. This deformation mode may appear such as Figure 6.5.2.



Figure 6.5.1. Hourglass mode in two dimensional element

_		_	$\sim$	_	$\sim$
	$\sim$		/		/
	_	-	_	-	_
		~		$\sim$	

Figure 6.5.2. Typical hourglass deformation

STADAS employs anti-hourglass mode deformation matrix in addition to the ordinary stiffness matrix to avoid hourglass instability. The computing time increase by employing anti-hourglass mode matrix, but it is still much smaller to compute stiffness matrix by ordinary method. Therefore it is always recommended to set IHGS = 1.

### 6.6 Unit number from which model is read

In general, node information and element information input in sections 4.1 and 4.2 occupy large amount among the whole input data. Therefore, it may not be inconvenient or it may cause difficulty to recognize the flow of the analysis to prepare then with other data.

Therefore, in STADAS, the user can choose either to input them with other data or from separate file. If the user wants to input with other name, leave the input of file name blank, otherwise input file name.

It is noted that, when other file is chosen, one line is required before the node information. The user can this line to write memorandum etc.

#### 6.7 Atmospheric pressure

Input of atmospheric pressure seems not to have sense. It is, however, necessary because of the following two reason.

In some constitutive model, minimum values of stresses and stiffness are set for the stability of the computation. The value itself depends on unit system, therefore it is not possible to prepare fixed value for them. Atmospheric pressure is used for this purpose.

Empirical equations are frequently used in the analysis of ground. For example, shear modulus of Toyoura sand at small strains,  $G_{max}$ , is expressed as follows:

$$G_{\max} = 840 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} (\sigma'_m)^{0.1}$$

This equation is valid in the unit of  $kgf/cm^2$ . If this equation is modified to

$$G_{\max} = 840 P_a^{0.5} \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{\sigma'_m}{P_a}\right) = 853.8 \frac{(2.17 - e)^2}{1 + e} \left(\frac{\sigma'_m}{P_a}\right)$$

then the equation does not depend on unit system. Some of the empirical equations used in STADAS are modified by this kind of technique. Therefore, use of arbitrary value cannot be allowed if this kind of equation is used; standard value shown in the input is to be used.

#### 6.8 Boundary condition of water

Boundary conditions of pore water classified as follows:

Fundamental boundary where boundary value is specified. It may call drained boundary in this manual.

Natural boundary where flow of water through the boundary is specified. If there is no flow, it is called undrained boundary in this manual.

Boundary condition is to be specified at the side of an element in STADAS. Boundary value at the center of side is specified for fundamental boundary. On the other hand, amount of water passing through the side per unit time is specified for natural boundary. In this case if water flow in the model, boundary value must be negative.

Side of joint element cannot become fundamental boundary.

In the analysis of STADAS, total pore water pressure (sum of hydrostatic pressure and excess pore water pressure) or excess pore water pressure is used depending on the type of analysis. As shown in Part

II of this manual, the difference of governing equation is whether to consider body force (inertia due to gravity of acceleration in STADAS) or not. In other words, if governing equation is solved considering the body force, resultant pressure is total pressure, otherwise excess pore water pressure. In the engineering stand point of view, only the excess pore water pressure is usually important, therefore STADAS usually compute only excess pore water pressure. This, however, does not mean that calculation of hydrostatic pressure is not necessary. Whenever hydrostatic pressure changes, it must be computed. They are the following cases:

CNSTRACT: switch-on-gravity or layer construction analysis

EXCAVATE: excavation analysis

WATTABLE: change of water table and saturation condition

When one of these analyses is chosen, STADAS conduct seepage analysis based on the specified boundary condition for pore water pressure, and set the solution as hydrostatic pressure. If these analyses are conducted under drained condition, no excess pore water pressure is generated. On the other hand, solution under the undrained condition is total pressure, the difference between the solution and hydrostatic pressure gives excess pore water pressure. It is noted that this is the definition of hydrostatic and excess pore water pressure in STADAS.

Boundary condition of pore water pressure may be different to compute total pressure, hydrostatic pressure, and excess pore water pressure. For example, hydrostatic pressure at point A is  $\gamma_w h$ , therefore this value is to be specified as boundary value in the input. The boundary value, however, is zero if excess pore water pressure is of interested. The user does not worry these change because the program modify boundary condition suitable. However, when boundary condition changes during the analysis (possible in the consolidation analysis), then the user correctly recognize that which value is required (boundary value of excess pore water pressure in this case).



Figure 6.8.1 Example of boundary condition for water

### 6.9 Unit weight

In the effective stress analysis, wet unit weight  $\gamma_t$  of the element which can have degrees of freedom (Element type = 4, 7 and 8) is expressed as

 $(6.9.1) \qquad \gamma'_t = (1-n)\gamma_s + n\gamma_w$ 

where  $\gamma_s$  and  $\gamma_w$  are unit weight of soil particle and water, and *n* denotes porosity. The program always requires wet unit weight  $\gamma'_t$  regardless of the saturation condition although it is possible to specify dry element. In each analysis, the program uses suitable value for unit weight judging the saturation condition.

Set porosity n = 0 for the impermeable material such as concrete and steel. In this case, it must be taken care to prepare input data such that they do not have degrees of freedom of pore water. Do not set n = 0 for the element which may have degrees of freedom of pore water.

If the user want to input dry unit weight,  $(1-n)\gamma_s$ , put minus sign at the input of unit weight. It is noted that this input also indicates that elements that use this material are dry at the beginning of the

analysis.

There is no degrees of freedom of pore water pressure in total stress analysis. Therefore input wet unit weight for wet element and dry unit weight for dry element.

### 6.10 Rayleigh damping

Damping matrix [C] is made as the sum of mass matrix proportional term and stiffness matrix proportional term as

 $(6.10.1) \quad [C] = \alpha[M] + \beta[K]$ 

where [M] and [K] denotes mass matrix and stiffness matrix at the beginning of the analysis.

It is known that modal damping is expressed as

(6.10.2) 
$$h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

where  $h_i$  and  $\omega_i$  denotes modal damping and circular frequency of i-th mode. From Equation (6.10.2).

The preceding discussion are mainly based on the whole system and the physical meaning of the Rayleigh damping is well expressed by Euation (6.10.2). In addition to this function, Rayleigh damping can be specified element by element. If damping is the nature of materal, this input also have physical meaning.

Beside the physical meaning of the Rayleigh damping, Rayleigh damping can be used to make the numerical integration stable, in which case damping is better to be specified in the global system.

In the input of STADAS, two constants are required to specify for damping for elements expept dashpot. The first one is  $\alpha$  in the above equation. However, if the value is negative, the absolute value indicated strain proportional damping and the value of  $\beta$  will not be used.

#### 6.11 Curved skeleton curves

Three constitutive models can be used for curve type-I model. They are hyperbolic model, Ramberg-Osgood model<sup>1)</sup> and Davidenkov model. The Masing rule will be employed for hysteresis curve (See section 6.14).

As discussed in part II section 3, Masing rule does not simulate actual behavior, and models above cannot perfectly simulate the stress-strain model. Therefore, a more flexible model is prepared in curve type-2 model. The differences between them are as follows:

The backbone curve for hyperbolic model, Ramberg-Osgood model are same in both method, but the expression is different to each other.

Hysteresis curves are defined based on the idea of Ishihara and Yoshida<sup>2)</sup> for Hysteresis type hyperbolic model, Hardin-Drnevich model, and Yoshida model, which is based on the damping ratio. The damping ratio will be calculated as follows for first two models.

$$h = h_{max} \left( 1 - \frac{K_{sec}}{K} \right)$$

This equation is exactly the same proposed by Hardin and Drnevich. On the other hand, table type input will be used for Yoshida model.

### 6.12 Masing's rule

Masing's rule is a rule to make hysteretic curve from the skeleton curve, which is composed of the following two rules in STADAS.

When skeleton curve is expresses as

 $(6.12.1) \quad \tau = f(\gamma)$ 

Then hysteresis curve unloaded from point ( $\gamma_R$ ,  $\tau_R$ ) is expressed by

(6.12.2) 
$$\frac{\tau - \tau_{R}}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_{R}}{2}\right)$$

If hysteretic curve passed previous unloaded point, then previous skeleton or hysteresis curve is used.

The unloaded points should be memorize to satisfy the second rule. Because of the limitation of the computer, however, it is impossible to prepare infinite area for memorizing them. The value of NREV is used to limit the size.

Usually the value of 20 to 30 is sufficient for NREV, it is because we can forget unloaded points if strains larger than the unloaded strain appears. Therefore memorized unloading point increases only when unloading occurs at the strain smaller than previous unloaded strain. The only exception is free vibration of damped system, in which unloaded strain gradually decreases. However, the second rule does not work in this case. Therefore the coding of STADAS is conducted such that if required storage area exceed NREV, the second rule is not applied. However, since many of unloaded point at larger unloading strain is still saved, hence the program will work well even if strains increases again. Of course a pulse wave may appears at the inconsistency part, which usually does not significant. Therefore the user need not be so sensitive in determining the value of NREV.

The value of 20 through 30 is usually good nbough for NREV in the ordinary earthquake response analysis.

### 6.13 Piesewise linear stress-strain models

STADAS prepare 11 piesewise linear type stress-strain models. The skeleton curve of these models are bi-linear or trilinear. Required inputs are initial stiffness (or simply spring constant)  $G_{max}$ , stiffness ratio of second and third stiffness to the initial stiffness,  $G_2$  and  $G_3$  and load at second and third kinks,  $T_1$  and  $T_2$  (see Figure 6.13.1).

These values must satisfy the conditions that  $0 < G_2 < 1$ ,  $0 < G_3 < G_2$  and  $T_2 > T_1 > 0$ . For the bilinear model the values of  $G_3$  and  $T_2$  do not used.

In total, 11 stress-strain model are available, which is shown in section 3.4.



Figure 6.13.1 Relationship of skeleton curve and input data

### 6.14 Output of displacement

Among the fundamental input data in each analysis there are NSTE1 and NSTE2, which is explained in this section. In the analysis of STADAS, each analysis is conducted step by step. State variables such as stresses and strains should be computed sequentially following the procedure of the analysis, but the output of displacement, velocity and acceleration have more flexibility because they are relative ones.

Let's suppose, for example, the sequence of four analyses, switch-on-gravity analysis to obtain initial state, construction analysis to build structures, earthquake response analysis, and consolidation analysis to dissipate excess pore water pressure generated during the earthquake. Does the user actually want the displacement at the end of the consolidation analysis as the sum of these four analyses? May be he is interested at the displacement caused by consolidation or caused by earthquake response analysis and consolidation analysis. If the user is interested in the displacement by consolidation analysis, set NSTE1 = 0 at the input of consolidation analysis, then the program output displacement caused by only consolidation analysis. Next, does the user want to carry displacement into next analysis? If so, then set NSTE2 = 1, otherwise set NSTE2 = 0.

As shown in this example, the program has two kinds of storage area for displacement, velocity and acceleration. Let's call them permanent and temporary ones. Temporary ones are the response value at only the analysis that are going on and permanent ones are the sum of all response value of the analysis when NSTE2 = 1 is input. If NSTE1 = 1, the program output sum of permanent and temporary response values. If NSTE2 = 1, the program add temporary response value to permanent response value.

#### 6.15 Initial stress at switch-on-gravity analysis

Theoretically, initial stresses of a newly constructed elements are zero because weight of the element is applied as load in the switch-on-gravity analysis. If may cause problems, however, when effective stress dependent material properties are used. In these models, stiffness at zero stress is zero, therefore displacement may become infinite. There may be several techniques to escape from this problem. The one method may be to set minimum rigidity in each constitutive models. Considering that, however, STADAS can analyze liquefaction phenomena, in which case the determination of minimum value may be a difficult problem. Therefore, as a standard method, STADAS assumes small stress values (1/20 of the weight for normal stress) for newly constructed element (MISTRS = 0). In this case, if we apply the whole weight as a load in the analysis, resulting stresses will be larger than actual one. To avoid it, STADAS applies whole weight minus equivalent nodal force of existing stress as load, therefore obtained stress is correct. However, by this operation resulting displacement becomes a little smaller than the actual response.

If effective stress dependent constitutive model is not used, set MISTRS = 1. If the user want to specify small stress value instead of that computed by the program, set MISTRS = 2 or 3 depending on the situation.

If the user does not like displacement which is a little smaller than exact when MISTRS = 0, he can use MISTRS = 4. The whole weight of the constructed element is applied as load, therefore obtained initial stress is a little larger than the actual one.

### 6.16 Saturation condition

In addition to the freedom of node movement, pore water pressure can also have freedom. As described in the theoretical part, Part II, pore water pressure is assumed to be constant in an element, hence degrees of freedom of pore water is specified by element.

The status of an element is whether the element is dry or completely saturated: no intermediate state. Moreover, type of element which can have freedom of pore water pressure is limited, which are shown in the table below.

Type No.	1	2	3	4	5	6	7	8
Type of element	Spring	Dashpot	Beam	2D solid	Joint	3D solid	SH	Rotation
Status	x	x	0	0	0	0	х	х

Element type which can have freedom of pore water pressure

It is noted that STADAS automatically set the status of the element wet unless the user specify. There are a few method by which status of the element is set dry.

Use a negative element property number at the input in section 2.6 (element data), in which case absolute value denotes actual element property number. It is noted that wet unit weight is to be input in this case, too.

Specify negative value for unit weight input in chapter 3 (element property). The element never move to wet condition in this case. Absolute value of the input denotes dry unit weight in this case (see section 6.9).

Change saturation condition by choosing the analysis "WATER". It is noted that at the beginning, the element has freedom of pore water pressure in this case.

### 6.17 Connection between free field

Figure 6.17.1 schematically shows a model in which analyzed region is connected to the free field by dashpot. Similar modeling may be conducted in the seismic deformation method or Penzien model, in which case spring is used to connect to free field instead of dashpot. In the ordinary program this kind of problem is treated as multiple excitation problem, hence may not be possible or special treatment is required. STADAS, however, solve this model simultaneously. In this case, the behavior of the free field affect the behavior of analyzed region, but that of analyzed region should not affect the behavior of free field. This can be done approximately by using fairly large mass in the free field in the ordinary program. However, in STADAS, the variable IFRFLD enable to solve this problem exactly (see Part II, section 1.6.3). If first element node lies on the free field, put IFRFLD = 1. If second element node lies on the free field, put IFRFLD = 2. Of course, if IFRFLD = 0, both element nodes are located within the analyzed region.



Figure 6.17.1 Example of free field

#### 6.18 Stiffness for the initial stress method

In the ordinary analysis using stress transfer method or initial stress method, coefficient matrix is computed at the beginning of the analysis and it is used in whole the process of the analysis. In the case to use confining pressure dependent material, it may cause unconvergency problem. Suppose that you are analyzing 1-directional compression test or consolidation test, effective confining pressure increases as load increases. Therefore, tangent modulus may become larger than initial stiffness because it is computed at the beginning of the analysis where confining pressure is small. Convergency may become difficult to obtain in this case. Similar phenomena may occur when there is large dilatancy component.

Convergency will obtain in these cases if larger stiffness may be used in the analysis. If can be done by computing coefficient matrix at every incremental calculation and use a little larger value in the analysis.

### 6.19 Nonlinear analysis

STADAS prepares four methods to solve nonlinear equation. The user must choose suitable method depending on the situation or problem that are going to be solved. It is noted that all the method may not be used for a particular constitutive model.

### (1) Tangent modulus method

Tangent modulus is computed at each incremental calculation and each incremental calculation is conducted once. This is the fastest method. Since unbalanced load generated in an incremental calculation is carried out into next calculation, unbalanced force do not increase too much.

When considering the multi-degrees of freedom problem, it is impossible to compute actual tangent modulus. Even in one degrees of freedom problem, tangent modulus is different for loading and unloading paths and effective confining pressure may change, therefore, so called tangent modulus value is usually approximate value. Although tangent modulus may not be a actual one, total error may not become too much because unbalanced force is carried into next step, but calculation in each step may have relatively large error.

In many constitutive models, tangent modulus is computed in the following method.

Suppose that shear stress is expressed as a function of shear strain and pore water pressure,

$$\tau = \tau(\gamma, p)$$

then, stress increments are computed as

$$d\tau = \frac{\partial \tau}{\partial \gamma} d\gamma + \frac{\partial \tau}{\partial p} dp$$

If we look at previous step, we already know a tangent modulus at previous analysis. It is used instead of tangent modulus at current state.

It is noted that this option may not be used depending on constitutive model; some constitutive model does not output tangent modulus.

### (2) Stress transfer method

Coefficient matrix is compute only once at each analysis and iterative procedure is employed to obtain the solution. This method can be used for any constitutive models. However, if phenomena described section 6.18 occurs, then iterative procedure does not converge. The other method is to be used in these cases.

This method may not work well when tangent stiffness is close to zero, because iteration will not converge under specified numbers of iteration, therefore the user need to use other method.



### (3) Modified initial stiffness method

If convergency is difficult to obtain because of the above mentioned reason or the reason described in section 6.18, this method may be a solution. Initial stiffness (or alternate value) is computed at the beginning of each incremental calculation.

#### (4) Modified Newton-Raphson method

This method is an iterative method based on the tangent modulus. Since computing the tangent modulus at every incremental procedure, it is computed once only at the beginning of each incremental calculation. Since tangent modulus is computed by assuming that the loading direction holds, convergency may not be good when unloading occurs because at that time we should use initial stiffness, not tangent modulus.

#### 6.20 Joint element

The user can obtain the porewaver pressure value by constraining the upper side and bottom side displacements identical (no sepatation). However, if undrained condition is assumed, this process may cause error because or curious output diagonal component becomes zero.

#### 6.21 Stiffness of spring

Stiffness of spring is specified as the stiffness per unit length. The generalized force of the speing F is computed as

$$F = K\varepsilon = K\frac{\delta}{\ell}$$

where  $\varepsilon$  is strain,  $\delta$  is relative displacement between nodes. The value of *K* in the above equation is required as input.

Input of this kind is conveninent when spring with the same cross sectional element is used with different length because ony one input for material is enough. A truss member is an example of this kind.

On the other hand, this input is inconvenient when a spring with the same spring constant is used with different length. In the analysis of pile-ground interaction analysis, piles are connected to the free field, in which case length of spring depends on the horizontal position but spring constant is the same. In this case, prepare one material property and set the length of the spring to be unity, which can be specified in the element input.

#### 6.22 Finite displacement of spring

The direction of force in spring element is identical with the direction cosine. However, in some cases, the user may change the direction cosine following the deformation of whole system as schematically shown in the figure. The direction that spring works depends on the displacement. The actual elongation refrects spring force. This kind of modification belongs to large deformation theory, but one can use this function easily by this option.



#### 6.23 Generalized stress of beam element

Definition of positive direction for generalized stress of beam element is shown in the following figure. Since no intermediate stress is not considered, only one stress is enough to represent an element for shear and axial force. On the ohter hand, linear distribution is assued for bending moment.



Under the positive bending moment at both ends as shown in the figure, the tesile side changes in the middlel; therefore, curvature becomes zero at the middle of the bar. On the other hand, under the equi-moment distribution keeping the tensile side, the sign of the bending moment is different at both ends.

Since load along the beam is not considered in STADAS, reaction of fixed end bar is to be applied as initial load for intermediate load.

### 6.24 Empirical equations

Variety of empirical equations is available in Yoshida model. Dynamic deformation characteristics are given as a function with respect to effective confining stress in many empirical relations. Therefore, stress-strain curve can be obtained by specifying elastic shear modulus.

If empirical equations are defined at very small confining stress used in the liquefied state, analysis using the empirical equation is possible in the liquefaction analysis, but no equation is available for this purpose. Therefore, as described in the theoretical part, stadas nondimensionalize stress-strain curve by shear modulus and shear strength by assuming that empirical equation gives stress-strain curve at the initial confining stress.

Here, it is noted that the user can specigy elastic shear modulus, shear strength and  $G/G_{max}-\gamma$  relationships independently. As an example, stress-strain curve yields in the figure below under  $\sigma'_{m0} = 1 \text{ kgf/cm}^2$  and  $G_{max}=1000 \text{ kgf/cm}^2$ .

On the other hand, if one defines cohesionless soil with internal friction angle If 40 degrees, then shear strength yields 0.643kgf/cm<sup>2</sup>. As seen in the figure, shear strain excees shear strength in some model and maximum shear stress is much less than shear strength in some model. This does not create problem in total stress analysis and in effective stress analysis under small strain; STADAS evaluates shear stress with sufficient accuracy by setting the value of IFLGR relavantly. However, in the liquefaction analysis and simulation of element test, problem may take place. For example, shear stress may not exist in the simulation of element test even if specified stress is less than shear strength.



In other words, elastic shear modulus, shear strength and dynamic deformation characteristics should be related to each other although the relation is not well known at present. A use of reference strain may help it.

Considering it, reference strain and corresponding internal friction angle are shown in the table below under the condition speficied above. It is noted that this relation is applicable only in this case. Internal friction angle is not shown for clay.

Empirical eq.	$\gamma_r$ (%)	$\phi$ (deg.)	Empirical eq.	$\gamma_r$ (%)	φ (deg.)
PHRI	0.034425	20.1	Building S. L. clay	0.105855	
Yasuda-Yamaguchi	0.093530	69.3	Building S. L. sand	0.043220	25.6
PWRI Holocene clay	0.161545		JR (crushed rock)	0.045850	27.3
PWRI Pleistocene clay	0.095640		JR (Toyoura sand)	0.050000	30.0
PWRI sand	0.050000	30.0	JR (Inage Sand)	0.034716	20.3
			JR (Iwate clay)	0.073487	

The same discussion can be done for table type material property.

## References

- <sup>1</sup>) Jenning, P. C. (1964): Periodic Response of a General Yielding Structure, Proc. ASCE, Vol. 80, No. EM2, pp. 133-166
- <sup>2</sup>) Ishihara, K., Yoshida, N. and Tsujino, S. (1985): Modelling of stress-strain relations of soils in cyclic loading, Proc. 5th International Conference for Numerical Mothod in Geomechanics, Nagoya, Vol. 1, pp. 373-380
## 7 Error Massage

STADAS will stop the run when it finds error of input data or the continuation of the run becomes impossible, printing the error massages in the following form:

where \$\$\$ denote error code number, and ### denotes explanation of the error. The explanation of the error is simple, which is explained here in more detail.

It is noted that STADAS does not prepare detailed error check routine. Moreover, there are many errors which will not affect the run, in which case the program cannot find them.

- (1) Dynamic allocation size is short. Contact the programmer, and enlarge the size of array ZZ and the value of MXAREA in main routine.
- (2) NBC0 must be set 0 for total stress analysis since there is no freedom for pore water pressure.
- (3) All the input file name should be the same to each other for the dashpot element whose constitutive model number is 3 (time dependent material), but different number is input.
- (4) Either element type number or constitutive model number is not correct. Element type number should be between 1 to 8, and limitation of constitutive model number depends on element type.
- (5) Sequence of node number is not correct. Order should be from 1 to NDPT.
- (6) Node number is greater than number of element.
- (7) Sequence of element number is not correct. Order should be from 1 to NELM.
- (8) Specified element number is larger than number of element.
- (9) Element property number of the specified element number exceeds limit value, or specified element number does not allowed.
- (10) Element node number is greater than maximum node number.
- (11) Total number of element nodes used to identify the element is larger or smaller than that to identify a element.
- (12) Number of sides of boundary condition where nonzero boundary value is specified exceeds allowable limit, NBC0. Input larger value for NBC0 in section 2.3.
- (13) Flag number on boundary type of boundary condition of pore water. They should be between -1 to -4.
- (14) Element number is incorrect when specifying the boundary condition of water. It must be between 1 to NELM.
- (15) Side number is incorrect when specifying the boundary condition of pore water.
- (16) Trial to specify the boundary condition of water in an element which does not have freedom of pore water pressure.
- (17) Area is negative or zero for two dimensional solid element. It usually occurs when the sequence of element nodes is incorrect. It is to be ordered in an counter-clockwise direction.
- (18) Degrees of freedom specified as independent degrees of freedom depends on other freedom.
- (19) Dependency of degrees of freedom is the same node.
- (20) Either element type number or constitutive model number is incorrect.
- (21) Short of dynamic allocation size to complete the subsequence analysis. See (1).
- (22) Specified degrees of freedom cannot be free. For the fixity condition node which may become

free must be set free at the input of node.

- (23) Activated element number is incorrect.
- (24) Node number is incorrect, which occurs when changing the boundary condition of node.
- (25) Specified dependent degrees of freedom number is incorrect.
- (26) A trial to change boundary condition of pore water is specified, but specified element is not active.
- (27) A trial to change boundary condition of pore water is specified, but specified element does not have freedom of pore water.
- (28) Specified side number at changing the boundary condition or pore water is larger than allowable number or actual number of side.
- (29) Switch-on-gravity analysis is not allowed for SH-wave analysis.
- (30) In the static analyses, constraint displacement is given at dependent degrees of freedom.
- (31) Since coordinates at two elements nodes are the same for dashpot, beam and spring element, direction cosine or length cannot be computed. Specify it through input data.
- (32) Flag number for direction cosine is to be between 0 to 7.
- (33) Input element number is incorrect. Usually, this error appears when element number is negative or greater than total number of elements.
- (34) Input node number is incorrect. Usually, this error appears when node number is negative or greater than total number of nodes.
- (35) Flag number for control data is incorrect. Please consult the manual.
- (36) The boundary value of pore water are going to be changed, but the boundary value is fixed to be 0. Change boundary type number to -3 or -4.
- (37) Number of data in one line in dynamic analysis must be greater than or equals to 1.
- (38) End of file when reading material property.
- (39) End of file when reading node.
- (40) End of file when reading element.
- (41) End of file when reading element width.
- (42) End of file when reading boudary condition against water.
- (43) Material number should be sequential order, but specified number is not sequential.

## 8 Supplementary codes

Result of calculation may be visualized. If response time history is stored as vector type, them many other program can read the output. This chapter explains several codes developed with STADAS in order to read output formatless file. The user can use these codes dialogically to the computer.

In addition to time history, several other kind of figure will be required such as FEM mesh, peak acceleration, displacement, stress, etc. Relavant codes can do it. Codes POST2D and POSTEQ are developed for the STADAS, but it is not directly related to STADAS, therefore is not explained here.

Among the codes, the first code PCUP is a general purpose program, and is sufficient to retrieve all time history. However, other program may be sometimes covenient because input is simple and output is easy to read.

## 8.1 PCUP

The program PCUP can be used to retrieve the unformatted output from STADAS such as time history. Following are the procedure when running the PCUP

Output fine name of STADAS	Blank = TIME.out	
Output file name of STADAS.	If blank, TIME.out will be used.	

File name fo	or fromatted	output	Blank = TIMEHIST.out

File name for formatted output. If blank, TIMEHIST.out will be used.

How many data do you retrieve ?

less than 10 is recommended. More than 100 is not allowed.

Input number of data to retreive. Too many numbers are not recommended because all data is written in one line; 10 or less is recommended. If one wants more than 10 data, repeat the job necessary times.

Flag number for FORMAT				
1 = [+#.###E+##] (4 signifi	cant digit without space between data)			
2 = [+#.###E+##] (4 significant digit with space between data)				
3 = [+0.######E+##]	3 = [+0.#####E+##] (8 significant digit)			
4 = [ #####.#####]	(5 integer and 5 sigits after decimal point)			
5 = [ ######.####]	(6 integer and 4 sigits after decimal point)			
6 = [ ##########]	(7 integer and 3 sigits after decimal point)			
7 = [ +#.####E+##]	(5 significant digit without space between data)			

Sequence number. Numbers should be separated by blank or comma.

Address of the data is specified. The address is written in the printout of STADAS.

After above input, echo of the number is printed. After a while, if the program finished successfully, the comment

PCUP	termintates	successfully	Number	of	data	=	####
------	-------------	--------------	--------	----	------	---	------

## 8.2 PC-Node

PC-Node retrieves nodal response

File name of STADAS standard output Blank=out.out

Specify standard output file from STADAS. The code needs this file to read address of data. The line Table of address for time history output in FILE =

will be read first to identify the address, therefore the user can cut this part from original output if there are several output files.

Time history file: ####

If you will use a file other than above file

### is a unformatted file name to store time history. The codes read it from standard output file. If the user renames the output file name, then he should use a new file name.

Output file name	Blank = NODERESP.wave	
Output file name to st	ore retrieved time history.	

How many nodes.

Number of nodes are recommended to be less than or equal to 10 in toder not to make one line very long. Of cource, number more than 10 is possible. In this case, the codes output by treating 10 nodes as one block.

Node numbers separate by blank or comma

Node numbers is to be specified.

Types of data:			
1=acc-x, vel	x, dis-x		
2=acc-y, vel	y, dis-y		
3=acc-x, acc	-y, dis-x, dis-y		
4=acc-t, vel-	t, dis-t		

Here, acc, vel, and dis indicate acceleration, velocity and displacement, respectively, and x, y, t indicate x-direction, y-direction and rotation.

Multiplication factor for acceleration, velocity, and displacement

Factors specified here will be multiplied to the origical data. If zero is specified, it is replaced to unity.

In the output, header will be printed at the beginning of data. They are as follows, where # indicates node number:

"DisX\_#", "DisY\_#", "DisT\_#", "VelX\_#", "VelY\_#", "VelT\_#", "AccX\_#", "AccY\_#", "AccT\_#"

## 8.3 PC-Elem

Element data will be retrieved. Output depends on element, and is shown below.

Spring: force and displacement Beam:  $M_1, M_2, Q, N, \kappa_1, \kappa_2, \delta, \varepsilon$ Solid:  $\sigma_m, \tau_{xy}, \gamma_{xy}$ , PWP,  $\sigma_x, \sigma_y, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \sigma_e, \varepsilon_e, U/\sigma_{v0}, 1-\sigma_m/\sigma_{m0}$ Joint: H, V,  $\gamma, \delta$ Rotational spring: Moment and rotatoin SH-wave: shear stress and strain

In the output of soild element, following data is also ouput in addition to the direct result.

$$\sigma_m = (\sigma_x + \sigma_y)/2, \quad \sigma_e = \sqrt{\left(\left(\sigma_x - \sigma_y\right)/2\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad \varepsilon_e = \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

In addition, excess porewate pressure ratio are output by two different types.

File name of STADAS standard output Blank=out.out

Specify standard output file from STADAS. The code needs this file to read address of data. The line Table of address for time history output in FILE =

will be read first to identify the address, therefore the user can cut this part from original output if there are several output files.

Time history file: ####

If you will use a file other than above file

#### is a unformatted file name to store time history. The codes read it from standard output file. If the user renames the output file name, then he should use a new file name.

Output file name	Blank = TIMEHIST.wave
------------------	-----------------------

Output file name to store retrieved time history.

How many elements

Element numbers separate by blank or comma

Multiplication factor for stress and strain for solid element only.

Factors specified here will be multiplied to the origical data. If zero is specified, it is replaced to unity. Since strain output is actual number, therefore 100 should be used if one want % output.

In the output, header will be printed at the beginning of data. They are as follows, where # indicates node number:

Spring: "Forc\_#", "Disp\_#"
Beam: "M1\_#", "M2\_#", "QQ\_#", "NN\_#", "Kap1\_#", "Kap2\_#", "Delt\_#", "Eps\_#"
Solid: "SigM\_#", "Tau\_#", "Gam\_#", "PWP\_#", "SigX\_#", "SigY\_#", "EpsX\_#", "EpsY\_#", "SigE\_#",
 "EpsE\_#", "PWPR\_#", "SMR\_#"
Joint: "Fv#", "Fh#", "Delt\_#", "Gam\_#"
Rotation spring: "Mom\_#", "Rot\_#"

## 8.4 STADAStoPOSTEQ

This program covert from STADAS standard output file to POSTEQ, a computer program to visualize one dimensional earthquake response analysis. Therefore, it is meaningless if the user cannot use POSTEQ.

File name of STADAS standard output Blank=out.out

```
Specify standard output file from STADAS.
```

Output file for POSTEQ Blank=STADAS.max

File name for putput.

Number of layers that does not include semi-infinite layer

Rotational freedam ? No=0, Yes=1

If there is freedam of rotation in the STADAS analysis, then set 1.

One node number and two element numbers from ground surface to (NLAY+1)th layer Average of two elements is used, but if only one element number, it is used.

Information on each layer is specified. In the (NLAY+1)th layer, a semi-infinite layer, only node number is necessary and element number is not necessary.

## 9 Version

- 1.00 1993.5 Dynamic effective stress response analysis
- 2.00 1994.5 Add various function
- 3.00 1999.5 Revise manual
- 3.01 2000.2 Install Takeda model for 1-d analysis
- 4.00 2001.12 Improve Yoshida model. Change element input
- 4.01 2002.2 Small bug fix
- 4.02 2002.5 Bug at ZZ3020 and ZZ3030 related to iteration

# Part 2 Theoretical Background

## 1 Governing equations for 2-phase material

Application of Biot's 2-phase material equation into Finite Element method is described in this chapter.Biot Biot's formulation<sup>11)2)3)4)</sup> have been extended into various form by many researchers<sup>5)-11)</sup>. These are not explained here one-by-one, but contents here include almost all of them in the field of small deformation theory. After that, fundamental equations used in STADAS are introduced.

## 1.1 Fundamental equations and notations

#### 1.1.1 Strain and stress

Total stress and strain are represented by vector form as

(1.1.1)  $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{\tau_{xy}} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^{\mathrm{T}}$  Total stress vector, and (1.1.2)  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_{\tau_{xy}} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx}\}^{\mathrm{T}}$  Strain vector

Next, effective stress or stress acting on soil skeleton is represented as

(1.1.3) 
$$\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{m\}p$$

where

(1.1.4) 
$$\{\sigma'\} = \{\sigma'_x \ \sigma'_y \ \sigma'_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^{\mathrm{T}}$$
 effective stress vector, and  
(1.1.5)  $\{m\} = \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^{\mathrm{T}}$ 

Vector  $\{m\}$  corresponds to Kronecker's  $\delta$  in the tenser form, and p denotes pore water pressure.

Using the vector  $\{m\}$ , confining pressure  $\sigma_m$ , effective confining pressure  $\sigma'_m$ , and volumetric strain  $\varepsilon_v$  are expressed as follows:

(1.1.6) 
$$\sigma_{m} = \frac{1}{3} \{m\}^{\mathsf{T}} \{\sigma\} = \frac{1}{3} \{\sigma\}^{\mathsf{T}} \{m\}$$
$$\sigma_{m}' = \frac{1}{3} \{m\}^{\mathsf{T}} \{\sigma'\} = \frac{1}{3} \{\sigma'\}^{\mathsf{T}} \{m\}$$
$$\varepsilon_{v} = \{m\}^{\mathsf{T}} \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{\mathsf{T}} \{m\}$$

Figure 1.1.1 shows positive direction of stress and strain. Following the conventional soil mechanics rule, compression is taken positive and strain indicates engineering strain, i.e., shear component is twice larger than that of tenser strain.



Figure 1.1.1. Positive direction of stress and strain

## 1.1.2 Constitutive relation

In the two-phase problem, we should treat three different materials such as soil particle, soil skeleton,

and pore water. Constitutive relations of them are expressed as follows:

#### 1) Soil particle

Deformation of soil particle is sometimes considered, but usually neglected, because stiffness of soil particle is fairly large compared with that of soil skeleton. Even when it is considered, only the volume change is taken into account and shear deformation is neglected. In the following, we assume that stiffness of soil particle is infinite, hence it does not deform. Therefore, deformation of soil depends on soil skeleton.

## 2) Soil skeleton

In the nonlinear analysis, it is not sometimes impossible to express the behavior using total strain, therefore incremental form is used hereafter. Constitutive relation of soil skeleton is expressed in the incremental form as

 $(1.1.7) \qquad \left\{ d\sigma' \right\} = \left[ D \right] \left\{ d\varepsilon \right\}$ 

where [D] denotes tangent modulus matrix. Constitutive models in which volumetric strain due to dilatancy is computed separately, constitutive relation is expressed as follows instead of Equation (1.1.7).

(1.1.8) 
$$\{d\sigma'\} = [D](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon_d\})$$

However, it is usually possible to modify this equaiton into the form of Equation (1.1.7).

## 3) Pore water

Pore water is treated as a material which does not resist shear deformation. Moreover, time dependent characteristics such as viscosity does not considered. Therefore, only the relation between volumetric strain of water  $\varepsilon_{wv}$  and pore pressure *p* has sense. They are expressed as

(1.1.9)  $p = K_w \varepsilon_{wv}$ where  $K_w$  denotes bulk modulus of water.

#### 1.1.3 Strain-displacement relation

Strain-displacement relationships is expressed as follows in the matrix form under small strain, (1.1.10)  $\{\varepsilon\} = -[L]\{u\}$ 

 $(1.1.10) \quad \{\varepsilon_{j} = -[L]_{i} u_{j}$ 

where [L] denotes differential operator,

$$(1.1.11) \quad \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$
$$(1.1.12) \quad \{u\} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \text{disp}$$

 $u_x u_y u_z$  displacement vector

 $u_x, u_y, u_z$  displacement in x-, y- and z-direction Here, the minus sign in Equation (1.1.10) comes from the definition that contractive strain is taken positive.

## 1.1.4 Darcy's law and displacement of water

General form of the Darcy's law in the 3-dimensional space is expressed as (1.1.13)  $\{\dot{w}\} = -k\{\nabla\}h$ 

where  $\{\nabla\}$  is a differential operator,

(1.1.14) 
$$\{\nabla\} = \left\{\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right\}$$

 $\{w\}$ : approach velocity or superficial velocity,

k: coefficient of permeability, and

h: total head.

In Equation (1.1.13), k is assumed isotropic, i.e., permeability is the same in any directions. It is however, usual that permeability is different in direction reflecting the sedimentation condition, for example, in which case we treat permeability to be tenser quantity, such that

(1.1.15)  $\{\dot{w}\} = -[k]\{\nabla\}h$ 

where

$$(1.1.16) \quad \begin{bmatrix} k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

and  $k_x$ ,  $k_y$  and  $k_z$  are permeability in x-, y- and z-direction, respectively.

#### 1.2 Equilibrium equation

In the analysis of 2-phase material, soil particles, soil skeleton and pore water are treated separately because they behaves in a different manner. The deformation of soil particle, however, is assumed to be negligible, we will build two types of equilibrium equations, i.e., whole equilibrium and equilibrium of water.

## 1.2.1 Equilibrium equation of 2-phase material

Soil and water are treated as one body, therefore equilibrium equation yields,

(1.2.1) 
$$[L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{\ddot{w}\} = \{0\}$$

where  $\{b\}$  is acceleration which causes body force (but sign is opposite because we consider inertia component). In other words, body force is obtained by multiplying mass density. It seems, however, that this difference will not cause confusion, therefore  $\{b\}$  may call body force in the following. The third term of left hand side appears because soil particle and pore water moves in the same manner and the fourth term corresponds to the difference of acceleration of soil particle and pore water.

## 1.2.2 Equilibrium equation and Darcy's law

Referring to Figure 1.2.1, which schematically shows forces acting in x-direction, equilibrium of water yields,

(1.2.2) 
$$\{\nabla\}p + \{R\} + \rho_f\{\ddot{U}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$$

where R is a restrain force when water flows through the soil skeleton, and is expresses as

$$\{R\} = \rho_f g[k]^{-1} \{\dot{w}\}$$

U denotes absolute displacement of water, which is related to the displacement of soil particle and approach velocity as

(1.2.3) 
$$\{U\} = \{u\} + \frac{\{w\}}{n}$$

where *n* denotes porosity.



Figure 1.2.1 Force in x-direction acting on infinitesically small element

Substituting these equations into Equation (1.2.2), we obtain

(1.2.4) 
$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n}\{\ddot{w}\} - \rho_f\{b\} = [0]$$

Equation (1.2.4) can be rewritten in the following form, focusing on the relation that  $\{\nabla\}\{x\}^{T}\{b\} = \{b\}$ , in which  $\{x\}$  denotes a position vector of an element.

(1.2.5) 
$$\{\dot{w}\} = -\frac{[k]}{\rho_f g} \left( \{\nabla\} p + \rho_f \{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n} \{\ddot{w}\} - \rho_f \{b\} \right)$$

This equation is identical to Equation (1.1.13), or Darcy's law, because total head h is expressed as

(1.2.6) 
$$h = \frac{p}{\rho_f g} - \frac{\{x\}^T \{b\}}{g} + \frac{\{x\}^T}{g} \left\{ \{\ddot{u}\} + \frac{1}{n} \{\ddot{w}\} \right\}$$

where  $\{x\}$  denotes position vector. The first term of Equation (1.2.6) is pressure head, the second term is position head and the third term is kinematic head which usually is not considered in the analysis of soil mechanics.

#### 1.3 Continuity condition (mass conservation equation)

Volume change may occur when water flows into or go out of the material, which causes volume change. Factors causing the volume change of soil skeleton are (1) residual water as a result of water flow and (2) volume change of water. Again volume change of soil particle itself is neglected.

The difference of pore water that flowed in and goes out of the material is  $\{\nabla\}^1 \{\dot{w}\}$ , in which positive sign indicates residual water decreases. On the other hand, decrease of volume of pore water in a unit time duration is computed from Equation (1.1.9) as

(1.3.1) 
$$\dot{\varepsilon}_{wv} = \frac{\dot{p}}{K_w}$$

Since total volume of water is *n* times as large as total volume, the effect of the volume change of water in the total body in  $np/K_w$ . As a result, volume change (decrease) of a unit body yields,

(1.3.2) 
$$\dot{\varepsilon}_{w} = \{m\}^{T} \{\dot{\varepsilon}\}$$

Continuum condition describes that the amount of water that flowed out is equal to the volume change of a body, i.e.,

(1.3.3) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\} = \{\nabla\}^{\mathrm{T}}\{\dot{w}\} + \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

Here, since constitutive equation of water, Equation (1.1.9), is used to make Equation (1.3.3), right-hand

side of Equation (1.3.3) is expressed in terms of pore pressure, not strain.

## 1.4 Various governing equation of 2-phase material

#### 1.4.1 Exact equation

Fundamental equations necessary in the analysis of 2-phase material are already explained in sections

- 1.2 and 1.3. They are summarized as follows:
- (1) Definition of effective stress

(1.1.3)  $\{\sigma'\} = \{\sigma\} - \{m\}p$ 

(2) Constitutive relation of soil skeleton

 $(1.1.7) \qquad \left\{ d\sigma' \right\} = \left[ D \right] \left\{ d\varepsilon \right\}$ 

(3) Strain-displacement relationship

 $(1.1.10) \quad \{\varepsilon\} - [L]\{u\}$ 

(4) Overall equilibrium

(1

2.1) 
$$[L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{\ddot{w}\} = \{0\}$$

(5) Equilibrium of pore water

(1.2.4) 
$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} + \frac{\rho_f}{n}\{\ddot{w}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$$

(6) Continuum condition

(1.3.3) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\} = \{\nabla\}^{\mathrm{T}}\{\dot{w}\} + \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

Since u, w and p are used as independent variable in these equations, these formulation is called as u-w-p formulation.

If supposing that water is compressible, i.e.,  $K_w \neq \infty$ , pore pressure p can be removed from Equations (1.3.3) and (1.2.4). This types of formulation is called u-w formulation. When pore cannot be removed. Both u-w-p formulation and u-w formulation are exact expressions of Biot's equation considering the kinematic condition.

#### 1.4.2 u-p formulation, approximate formulation

So called u-w-p formulation which is the exact is introduced in the previous section. It requires, however, large amount of memory size and computing time to solve exact formulation, therefore there is no computer code which solves exact formulation. There are several codes which solves u-w formulation (or u-U formulation). In the u-w formulation, pore water pressure term is removed, but it is an important quantity to be known. Therefore it should be computed separately. Moreover, total number of independent variables is still large because only pore water pressure term is removed from the fundamental equation. In addition, in the consolidation analysis, it is usual to assume incompressible water, in which case complicated technique is necessary to solve the governing equation.

An approximate equation, called u-p formulation, is introduced in this section, which is consistent with consolidation equation and is convenient to ideal with water outside the analyzed region.

First approximation is that the pore water flow is very slow, so that acceleration of water relative to soil skeleton  $\ddot{w}$  is neglected. Putting  $\ddot{w} = 0$ , Equation (1.2.1) and (1.2.4) are rewritten as

(1.4.1) 
$$[L]^{1} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$$

1.4.2) 
$$\{\nabla\}p + \rho_f g[k]^{-1}\{\dot{w}\} + \rho_f\{\ddot{u}\} - \rho_f\{b\} = \{0\}$$

Equation (1.4.2) is solved in terms of  $\dot{w}$  as

(

(1.4.3) 
$$\{\dot{w}\} = \frac{[k]}{\rho_f g} (-\{\nabla\}p - \rho_f \{\ddot{u}\} + \rho_f \{b\})$$

Substituting this equation into Equation (1.3.3), we obtain

(1.4.4) 
$$\{\nabla\}^{T} = \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g} \left(-\{\nabla\}p - \rho_{f}\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{b\}\right) = \{m\}^{T}\{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

Equation (1.4.1) and (1.4.4) are governing equations when  $\ddot{w}$  is neglected. This formulation is called u-p formulation since u and p appear as variable. It is seen that there is no w term in the u-p formulation. Accordingly, number of equations reduced by 3. This formulation holds in sufficient accuracy in the ordinary liquefaction analysis.

In addition to the approximation above, the term of  $\rho_f \{\vec{u}\}$  in Equation (1.4.4) is frequently neglected, whose physical meaning is expressed in Equation (1.5.29) later. If this term can be neglected, acceleration appears only in the overall equilibrium equation. Zienkiewicz et al. Conducted case study by numerical example<sup>9)</sup> and describes "we do not recommend that this term should be generally suppressed, although at low permeabilities its importance is small." Equation (1.4.4) is again rewritten as

(1.4.5) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} = \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_f \{b\}\right) = \{m\}^{\mathrm{T}} \{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_w} \dot{p}$$

A combination of Equations (1.4.1) and (1.4.5) is also a set of governing equations and is called u-p formulation, too.

## 1.4.3 Consolidation formulation

In the u-p formulation, the term  $\ddot{w}$  is assumed to be negligibly small compared with  $\ddot{u}$ . If acceleration itself is small (or inertia force is small), the term itself can be neglected. This assumption obviously does not hold during the earthquake, but may be reasonable in the process of excess pore water pressure dissipation after the earthquake, and holds in the ordinary consolidation problems.

Suppressing  $\ddot{u}$  and  $\ddot{w}$ , we obtain the following governing equations,

(1.4.6) 
$$[L]^{T} \{\sigma\} - \rho\{b\} = \{0\}$$
  
(1.4.7)  $\{\nabla\}^{T} = \frac{[k]}{\rho_{f}g} (-\{\nabla\}p + \rho_{f}\{b\}) = \{m\}^{T} \{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p}$ 

This set of equations is so called consolidation equations. Equation (1.4.7) is identical with Equation (1.4.5), which indicate that the same equation can be used for pore water pressure terms in the consolidation and liquefaction analyses when neglecting the term  $\rho_f \{\vec{u}\}$ . It is usual in the consolidation analysis that  $K_w$  is assumed to be infinite, therefore the term  $n\dot{p}/K_w$  is neglected, in which case Equation (1.4.7) becomes

(1.4.8) 
$$\{\nabla\}^{\mathsf{T}} \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_f \{b\}\right) = \{m\}^{\mathsf{T}} \{\dot{\varepsilon}\}$$

A combination of Equations (1.4.6) and (1.4.8) is ordinary governing equation for consolidation problem.

#### 1.4.4 Seepage analysis

In the above formulation, we consider interacting effect between soil and water, therefore governing equations are coupled. In this subsection, on the other hand, we treat the case that the behaviors of soil and pore water are separated. Overall equilibrium equation does not change under any condition, because, as recognized in the definition of effective stress, behavior of soil skeleton is anyway affected by pore water. However, it may become possible to separate the behavior of water from the total behavior under suitable condition.

There are two reasons by which interactive term appears in the equation of pore water; (1) existence of soil particle constrain the flow of water, which corresponds to Darcy's law and (2) volume of soil skeleton changes depending on the change of pore water pressure (continuity condition).

The latter effect is neglected here. In other word, volume change of soil skeleton is assumed not to occur by the change of pore pressure, which condition always hold in steady state. Equation (1.4.4) result in

(1.4.9) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} = \frac{[k]}{\rho_{f}g} (-\{\nabla\}p - \rho_{f}\{\ddot{u}\} + \rho_{f}\{b\}) = -\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

Interactive term still exists in this equation, but it can become non-interactive if the term  $\rho_f \{\vec{u}\}$  is suppressed, whose validity is already explained in the preceding section. If, as conducted in the consolidation formulation, acceleration is assumed to be negligibly small, interactive term disappears, too. This indicates that in the quasi-static case, governing equation against pore water yields

(1.4.10) 
$$\left\{\nabla\right\}^{T} = \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g} \left(-\left\{\nabla\right\}p + \rho_{f}\left\{b\right\}\right) = -\frac{n}{K_{w}}\dot{p}$$

This equation if a governing equation in the unsteady seepage analysis. Moreover, right hand side becomes 0 under the steady condition, therefore

(1.4.11) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} \frac{[k]}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p + \rho_f\{b\}\right) = 0$$

This equation is governing equation against steady flow.

Considering that there is no body force change and that acceleration term is neglected and substituting Equation (1.2.6) into Equations (1.4.10) and (1.4.11), we obtain

(1.4.12)  $\{\nabla\}^{\mathsf{T}}[k]\{\nabla\}h = \frac{n\rho_f g}{K_w}\dot{h}$ (1.4.13)  $\{\nabla\}^{\mathsf{T}}[k]\{\nabla\}h = 0$ 

These equations are familiar seepage equation appears in the soil mechanics.

## 1.4.5 Excess pore water pressure

Excess pore water pressure is the change of pore water pressure from the hydrostatic pressure, i.e.,

 $(1.4.14) \quad p_d = p - p_s$ 

where  $p_d$  denotes excess pore water pressure and  $p_s$  denote hydrostatic pressure obtained as a solution of seepage equation. Considering that  $p_s$  is a solution of Equation (1.4.11) and substituting Equation (1.4.14) into Equation (1.4.4), we obtain

(1.4.15) 
$$\{\nabla\}^{\mathrm{T}} \frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_f g} \left(-\{\nabla\}p_d - \rho_f \{\ddot{u}\}\right) = \{m\}^{\mathrm{T}} \{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_w} \dot{p}$$

This equation indicates that governing equations based on excess pore water pressure and total pore water pressure are the same to each other, except the existence of the term of body force.

#### 1.4.6 Undrained condition

Undrained condition indicates that pore water does not move. This condition holds exactly or approximately in many situations in the soil mechanics. It is used one of the test condition of laboratory tests, in which case this condition is exactly true. In the actual field, this condition is approximately holds in such a situation that the phenomena occurs very rapidly. An example is a problem to compute initial condition of consolidation analysis in which load is applied almost suddenly. Liquefaction during the earthquake is suppose to be another example, in which duration of the earthquake is supposed to be

sufficiently short for excess pore water to dissipate.

This condition can be written mathematically as

(1.4.16) w = 0

which indicate the pore water does not move relative to soil skeleton. Then  $\ddot{w}$  is always 0, which indicate that u-p formulation is an exact form under undrained condition.

It seems that, in the u-p formulation, Equation (1.4.16) seems not to be applicable because  $\dot{w}$  is removed from the governing equation. Putting  $\dot{w} = 0$  in Equation (1.3.3), we obtain the constraint condition of undrained condition to be used instead of Equation (1.4.16) as

(1.4.17) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\dot{\varepsilon}\} - \frac{n}{K_{w}}\dot{p} = 0$$

Govering equation is derived using this condition. Starting from u-w-p formulation, Equation (1.2.1) is rewritten as

(1.4.18)  $[L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} - \rho\{b\} + \rho\{\ddot{u}\} = \{0\}$ 

Next, the differential with respect to time in Equation (1.4.17) can be replaced into incremental form since there is no velocity term, as

(1.4.19) 
$$\mathrm{d}p = \frac{K_w}{n} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{d}\varepsilon\}$$

Rewritten the definition of effective stress, Equation (1.1.3), into incremental form, we obtain

$$(1.4.20) \quad \left\{ \mathrm{d}\sigma' \right\} = \left\{ \mathrm{d}\sigma \right\} - \left\{ m \right\} \mathrm{d}p$$

Substituting constitutive relation, Equation (1.1.7) and Equation (1.4.19) into Equation (1.4.20), we obtain

(1.4.21) 
$$\{\mathbf{d}\sigma\} = [D]\{\mathbf{d}\varepsilon\} + \{m\}\frac{K_w}{n}\{m\}^{\mathrm{T}}\{\mathbf{d}\varepsilon\} = [\overline{D}]\{\mathbf{d}\varepsilon\}$$

Here, [ $\overline{D}$ ] is a tangent stiffness matrix, represented as

(1.4.22) 
$$\left[\overline{D}\right] = \left[D\right] + \left\{m\right\} \frac{K_w}{n} \left\{m\right\}^{\mathrm{T}}$$

Equations (1.4.18), (1.1.10) and (1.4.21) are governing equation under undrained condition. These equations do not include the pore water explicitly. In other words, number of unknowns can be reduced by the undrained condition. Related to it, interactive term disappears, hence equations are more easy to solve. Here, coefficient matrix  $[\overline{D}]$  is obtained from the elastic matrix [D] by replacing bulk modulus of soil skeleton K into  $(K+K_w/n)$ . It becomes clear in this formulation that bulk modulus of water cannot be an infinite value, which assumption is frequently used in the consolidation analysis. It is dangerous to use very large value for  $K_w$  instead for using infinite value, because element stiffness matrix in the Finite Element formulation cannot be computed or inaccurate. In STADAS, we solve this difficulty by another method, which is described later in the formulation of Finite Element method.

## 1.5 Formulation into Finite Element Method

Finite element formulation from the previous basic equation is described in this section.

## 1.5.1 Formulation by weighted residuals

Let  $\{u^n\}$  nodal displacement, and the distribution of nodal displacement  $\{u\}$  in an element by the use of interpolation function [N] as

 $(1.5.1) \qquad \left\{u\right\} = \left[N\right] \left\{u^n\right\}$ 

Interpolation function [N] is sometimes called displacement function or shape function in the FE method.

Condition to minimize the residual of weighted intergrand of Equation (1.4.1) in an element yields.

(1.5.2)  $\int_{\mathbf{v}} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \left[ \left[ L \right]^{\mathrm{T}} \left\{ \sigma \right\} - \rho \left\{ b \right\} + \rho \left\{ \ddot{u} \right\} \right] \mathrm{dV} = \left\{ 0 \right\}$ 

Here, weight function is chosen to be the same with interpolation function (Galerkin's method).

Integral in Equation (1.5.2) is to be done whole the element including boundary. Applying Gauss's theorem to the first term of Equation (1.5.2), we obtain

(1.5.3)  $\int_{v} [N]^{\mathrm{T}} [L]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \mathrm{d}\mathbf{V} = \int_{s} [N]^{\mathrm{T}} [n]^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{v} ([L] N])^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \mathrm{d}\mathbf{V} = \int_{s} [N]^{\mathrm{T}} \{T\} \mathrm{d}\mathbf{S} - \int_{v} ([L] N])^{\mathrm{T}} \{\sigma\} \mathrm{d}\mathbf{V}$ 

where [n] denote direction cosine matrix of unit normal (a matrix whose row is composed of direction cosines  $\{n\}$  and

 $(1.5.4) \qquad [T] = -[n]^{\mathrm{T}} \{\sigma\}$ 

denote surface traction vector. S denotes surface of element region V, and dS denotes integral with respect to surface. Here, minus sign in the right-hand side of Equation (1.5.4) denotes that compression is taken positive. Surface traction is expressed in an explicit form by Equation (1.5.3), the substitution into Equation (1.5.2) yields

(1.5.5) 
$$-\int_{v} \left( \left[ L \right] N \right)^{\mathrm{T}} \left\{ \sigma \right\} dV - \int_{s} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \left\{ T \right\} dS - \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ b \right\} dV + \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ \ddot{u} \right\} dV = \left\{ 0 \right\}$$

This equation is total equilibrium equation relaxed by weighted residual method.

(1.5.6) 
$$\{\varepsilon\} = -[L]\{u\} = -[L][N]\{u^n\} = -[B]\{u^n\}$$

where

 $(1.5.7) \qquad \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}$ 

denotes strain matrix or simply B matrix. Substitution of Equations (1.5.6) and (1.5.7) into constitutive relation (1.1.7), we obtain

(1.5.8) 
$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = -[D][B]\{u^n\}$$

Using these relations, Equation (1.5.5) become its final form as

$$\int_{v} \left[ B \right]^{\mathrm{T}} \left[ D \right] \left[ B \right] dV \cdot \left\{ u^{n} \right\} = \int_{s} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \left\{ T \right\} dS + \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ b \right\} dV - \int_{v} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \rho \left\{ \ddot{u} \right\} dV$$

or

$$(1.5.9) \qquad \llbracket K \rrbracket \lbrace u^n \rbrace = \lbrace F \rbrace$$

where

(1.5.10) 
$$\begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \int_{v} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \end{bmatrix} dV \text{ Stiffness matrix} \\ \{F\} = \int_{s} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}^{T} \{T\} dS + \int_{v} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}^{T} \rho\{b\} dV - -\int_{v} \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}^{T} \rho\{\ddot{u}\} dV \text{ : Equivalent nodal force vector}$$

This equation is a FE formulation of whole equilibrium, but it is not convenient. Therefore, we convert it into effective stress form and incremental form considering the nonlinear analysis. In the incremental form, increment of static body force  $\{b\} = \{0\}$ , therefore it does not appear in the governing equation. This is the only difference between total strain type formulation and incremental formulation.

Equilibrium equation relaxed by the use of weighted residuals is rewritten from Equation (1.5.5) as

(1.5.11) 
$$-\int_{v} \left( \left[ L \right] N \right)^{\mathsf{T}} \left\{ \mathrm{d}\sigma \right\} \mathrm{d}\mathsf{V} - \int_{s} \left[ N \right]^{\mathsf{T}} \left\{ \mathrm{d}T \right\} \mathrm{d}\mathsf{S} + \int_{v} \left[ N \right]^{\mathsf{T}} \rho \left\{ \mathrm{d}\ddot{u} \right\} \mathrm{d}\mathsf{V} = \left\{ 0 \right\}$$

where total stress increment  $\{d\sigma\}$  is expressed from Equations(1.5.6), (1.1.7), and (1.1.3), as

(1.5.12) 
$$\{\mathbf{d}\sigma\} = \{\mathbf{d}\sigma'\} + \{m\}\mathbf{d}p = -[D][B]\{\mathbf{d}u^n\} + \{m\}\mathbf{d}p$$

Since  $\{d\sigma\}$  is derived, substitution of Equation (1.5.11) yields

$$\int_{s} [N]^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}T \} \mathrm{d}S + \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} (-[D] [B] \{ \mathrm{d}u^{n} \} - \{m\} \mathrm{d}p) \mathrm{d}V + \int_{v} [N]^{\mathrm{T}} \rho \{N\} \{ \mathrm{d}\ddot{u} \} \mathrm{d}V = \{0\}$$

or

1.5.13) 
$$[M] \{ \mathrm{d}\ddot{u}^n \} + [K] \{ \mathrm{d}u^n \} - \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \{ m \} \mathrm{d}p \mathrm{d}V = \{ \mathrm{d}F \}$$

where

(

$[M] = \int_{v} [N]^{\mathrm{T}} \rho \{N\} \mathrm{dV}$	: mass matrix
$[K] = \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} [D] [B] \mathrm{dV}$	: tangent stiffness matrix
$\left\{ dF \right\} = \int_{s} \left[ N \right]^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}T \right\} \mathrm{d}S$	: equivalent nodal force

Finally, we obtained a governing equation of total equilibrium based on the effective stress. A more simplified form equation is derived, which is used in STADAS. Let's assume that pore water pressure is constant within an element, as Christian first assumed<sup>12</sup>. Then the third term of the left hand side of Equation (1.5.13) can be modified as follows because pore water pressure is constant<sup>2</sup>.

1.5.14) 
$$\int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \{m\} \mathrm{d}p \mathrm{d}V = \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \{m\} \mathrm{d}V \mathrm{d}p = \{K_{p}\} \mathrm{d}p^{n}$$

where superscript m denotes that pore pressure is a representative value of an element.

(1.5.15)  ${K_p} = \int_{v} [B]^{T} {m} dV$ : porewater pressure vector

In the above, porewater pressure is explained to be constant in a element, but, since the only value at the center of the element is used, porewater pressure in Equation (1.5.14) is the value at the center of the element.

Next, pore water pressure is expanded by backward difference,

 $(1.5.16) \quad dp^{m} = p^{m}{}_{t} - p^{m}{}_{t-dt}$ 

Here, subscript indicates corresponding time.

Substituting Equations (1.5.14) and (1.5.16) into Equation (1.5.13), we obtain the overall equilibrium equation such that

(1.5.17) 
$$[M] \{ d\ddot{u}^n \} + [K] \{ du^n \} - \{ K_p \} p^m_t = \{ dF \} - \{ K_p \} p^m_{t-dt}$$

Then the unbalanced force  $\{dR\}$ , which will be generated in the nonlinear analysis, is computed as follows,

(1.5.18) 
$$\{dR\} = \{dF\} - \{K_p\}(p^m_t - p^m_{t-dt}) - [M]\{d\ddot{u}^n\} - \{df^e\}$$

where

$$\left\{ df^{e} \right\} = \int_{v} \left[ B \right]^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\sigma' \right\} \mathrm{d}V$$
 : Nodal force quivalent to stress

It is obvious that total amount of numerical calculation is reduced very much by the operation shown above compared with the ordinary FE method.

## 1.5.2 Equation on pore water pressure

Incremental form of Equation (1.4.4) is written in the form

(1.5.19) 
$$-\{\nabla\}^{\mathrm{T}}\frac{\lfloor k \rfloor}{\rho_{f}g}(\{\nabla\}p+\rho_{f}\{\ddot{u}\}-\rho_{f}\{b\})\mathrm{d}t=\{m\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{d}\varepsilon\}-\frac{n}{K_{w}}\mathrm{d}p$$

where  $\{d\varepsilon\}$  and dp are increment during the time increment dt. In the ordinary FE method, weighted residual method is applied in Equation (1.5.19), too. In STADAS, we employ differential method following the method by Akai and Tamura<sup>13)</sup> but more general form<sup>3</sup>. It is noted that, in the orifical Akai-Tamura formulation,  $K_w = \infty$  and the second term of Equation (1.5.19) is not considered because they formulated for consolidation analysis. The inertia term  $\rho_f \{\tilde{u}\}$  is also not considered.

Equation (1.5.19) is written for infinitesinally small element, but we integrate it within an element. The right hand side is integrated as

(1.5.20) 
$$\int_{v} \{m\}^{\mathrm{T}} \{\mathrm{d}\varepsilon\} \mathrm{d}\mathrm{V} = -\int_{v} \{m\}^{\mathrm{T}} [B] \{\mathrm{d}u^{n}\} \mathrm{d}\mathrm{V} = -\{K_{p}\} \{\mathrm{d}u^{n}\}$$

 $(1.5.21) \quad \int_{v} dp dV = V dp^{m}$ 

where V denotes volume (area in two dimensional analysis) of an element, since one point Gauss integration is assumed to be done or pore water pressure is assumed to be constant within an element as assumed in the preceding section.



Figure 1.5.1 Model to consider the flow of water

Next, let's compute the integral of left hand side of Equation (1.5.19), i.e., water flows in an element. Firstly, a simple rectangular element shown in Figure Figure 1.5.1, which is the same element configuration that Akai and Tamura computed, is examined.

$$Q_1 = \mathrm{d}t\,s_1\,k\,\frac{h_n - h_1}{\ell_1}$$

Let point *m* denote the center of element being examined,  $I_1 \sim I_4$  denote the center of the neighboring elements and correspondingly the elements themselves are called *m* and  $I_1 \sim I_4$ , respectively. Based on Darcy's law, pore water flowed out from element *m* to element  $I_1$  during time increment *dt* is computed, referring Figure 1.3, as

(1.5.22) 
$$Q = dt \frac{h_m}{\ell} \sum_{i=1}^4 s_i k_i - dt \sum_{i=1}^4 s_i k_i \frac{h_m}{\ell_i}$$

Therefore, sum total of pore water Q that flowed out from element m into surrounding four elements becomes. This equation is derived for simple rectangular elements. The same procedure can be applied for more general form for the element that has n sides as

$$Q = \alpha \left( p^{m} + \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \left\{ \ddot{u}^{m} \right\} - \left\{ b \right\} \right) \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p^{i} + \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \left\{ \ddot{u}^{i} \right\} - \left\{ b \right\} \right) \right) \mathrm{d}t$$
$$= \alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \alpha \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}^{m} \right\}$$

or,

$$(1.5.23) \qquad Q = \alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \left\{ c_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}^{m} \right\} - \sum_{i=1}^{n} \left( \alpha_{i} \left( p^{i} - \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \left\{ c_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}\dot{u}^{i} \right\} \right)$$

Total pressure is separated into each component referring to Equation (1.2.6). When p denotes excess pore water, the term  $\{b\}$  is not necessary. Here,

(1.5.24) 
$$\alpha_{i} = \frac{s_{i}k_{i}}{\rho_{f}g\ell_{i}}, \quad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{i}k_{i}}{\rho_{f}g\ell_{i}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i}$$
$$s_{i}k_{i} = s_{xi}k_{xim}\cos\theta + s_{yi}k_{yim}\sin\theta$$

(1.5.25)  $k_{xim}, k_{yim}: \text{average permeability of the flow from point m to point } I_i, \text{ which is calculated as} \\ \frac{\ell_i}{k_{xim}} = \frac{\ell_{ii}}{k_{xi}} + \frac{\ell_{im}}{k_{xm}}, \quad \frac{\ell_i}{k_{yim}} = \frac{\ell_{ii}}{k_{yi}} + \frac{\ell_{im}}{k_{ym}}$ 

 $k_{xi}$ ,  $k_{yi}$ : permeability of element I<sub>i</sub> in x and ydirection.

 $k_{xm}$ ,  $k_{ym}$ : permeability of element m in x and ydirection.

 $s_i, s_{xi}, s_{yi}, \ell_i, \ell_{ii}, \ell_{im}, \theta_i$ : See Figure 1.5.2

 $\{x\}$ : Coordinate at the center of element

 $\{ du_i^n \}$ : Coordinate of element nodes of element i

 $\{c_m\} = \alpha \rho_f [N_m]^{\mathrm{T}} \{x_m\}$  $\{c_i\} = \alpha_i \rho_f [N_i]^{\mathrm{T}} \{x_i\}$ 

(Note) For 4-point isoparametric element in two dimensional analysis, natural coordinate at the center of element is  $\xi = \eta = 0$ , therefore above equation yields



Figure 1.5.2. General configuration of elements to compute water flow

Considering that Q is the water flowed out from the element m, or volume (area) decreases when Q is positive, equation equivalent to Equation (1.5.19) finally becomes

$$\alpha \left( p_{t}^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p_{t}^{i} - \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t + \left\{ c_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}^{n} \right\} - \sum_{i=1}^{n} \left\{ c_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}_{i}^{n} \right\}$$
$$= -\left\{ K_{p} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}u^{n} \right\} - \frac{nV}{K_{w}} \left( p_{t}^{m} - p_{t-dt}^{m} \right)$$

or rewitten as

(1.5.26) 
$$\left( -\alpha dt - \frac{nV}{K_w} \right) p_t^m - \left\{ K_p \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ du^n \right\} + \sum_{i=1}^n \alpha_i p^i{}_i dt - \left\{ c_m \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}^n \right\} + \sum_{i=1}^n \left\{ c_i \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ d\dot{u}_i^n \right\} = -\frac{nV}{K_w} p_{t-dt}^m + B$$

where

(1.5.27) 
$$B = -\alpha dt \rho_f \{x_m\}^{\mathrm{T}} \{b\} + \sum_{i=1}^n \alpha_i dt \rho_f \{x_i\}^{\mathrm{T}} \{b\}$$

It may be difficult to understand the summation part of Equations (1.5.23) and (1.5.26) when looking at the equations. For the element in Figure 1.5.1 as an example, the terms in Equation (1.5.23) will be added in the global system in the following positions.

$p^{m}$	$p^1$	$p^2$	$p^3$	$p^4$
$-\alpha dt - \frac{nV}{K_w}$	$\alpha_1 dt$	$\alpha_2 dt$	$\alpha_3 dt$	$\alpha_4 dt$

It is difficult to make more recognizable expression of Equation (1.5.23) and (1.5.26) when looking at an element, but it may be possible to consider the whole system. When we focused on element *m*, the term *\alphaidt* appears at the freedom of element *i*. On the other hand, the term  $\alpha_m dt$  appears at the freedom of

element *m* when we focused on element *i*. Here, it is obvious that  $\alpha_1$  and  $\alpha_m$  are the same to each other. Therefore coefficient matrix [A] is written in the form

 $(1.5.28) \quad \left[A\right] = \left[A_{ij}\right]$ 

where

$$A_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} dt - \frac{nV}{K_w}$$
 (summed for the lement neighbouring the element i)  

$$A_{ij} = \frac{s_{ij}k_{ij}}{\rho_f g\ell_{ij}}$$
 (i≠j and there if flow between elements i and j)  

$$A_{ii} = 0$$
 (No water flow between element i and j)

and

$$s_{ij}k_{ij} = s_{ijx}k_{ijx} \left|\cos\theta_{ij}\right| + s_{ijy}k_{ijy} \left|\sin\theta_{ij}\right|$$

 $s_{ijx}$ ,  $s_{ijy}$ : Length in x and y direction of the boundary between elements i and j

 $\theta_{ij}$ : Angle to x-axis of the line connecting the centers of element i and j

 $k_{ijx}$ ,  $k_{ijy}$ : Average permeability between elements i and j, and is computed as follows:

$$\frac{\ell_{ij}}{k_{ijx}} = \frac{\ell_{iji}}{k_{xi}} + \frac{\ell_{ijj}}{k_{xj}}, \quad \frac{\ell_{ij}}{k_{ijy}} = \frac{\ell_{iji}}{k_{yi}} + \frac{\ell_{ijj}}{k_{yj}}$$

 $k_{xi}, k_{yi}, k_{xj}, k_{yj}$ : permeability of element i and j in x and ydirection.

 $\ell_{ij}$ : distance between centers of elements i and j

 $\ell_{iji}, \ell_{ijj}$ : length of element i and j among  $\ell_{lij}$ 

Obviously, [A] is a symmetric matrix. In the same manner, term related to velocity is written as follows:

$\left\{ \mathrm{d}u^{n} ight\}$	$\left\{ \mathrm{d}u_{1}^{n}\right\}$	$\left\{ \mathrm{d} u_2^n \right\}$	$\left\{ \mathrm{d} u_3^n \right\}$	$\left\{ \mathrm{d} u_4^n \right\}$
$-\left\{ \mathcal{C}_{m} ight\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{1}\right\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{2}^{} ight\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{3}\right\} ^{\mathrm{T}}$	$\left\{ \mathcal{C}_{4} \right\}^{\mathrm{T}}$

However, there are the same degrees of freedom among  $\{du^n\}, \{du_1^n\}, \{du_2^n\}, \{du_3^n\}$  and  $\{du_4^n\}$ . Considering it, coefficient matrix of the interactive part is written as

(1.5.29) 
$$[Q]^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}\dot{u} \} = [Q_{im}] \{ \mathrm{d}\dot{u} \} = \sum_{\mathrm{all \ elements}} \left( -\{c_m\}^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}\dot{u}^n \} + \sum_{i=1}^n \{c_i\}^{\mathrm{T}} \{ \mathrm{d}\dot{u}^n \} \right)$$

where  $Q_{im}$  takes nonzero value when water flows through the side of element i and zero in the other case. None that this is a formally expression and actual computation will be conducted base on Equation (1.5.26).

Since there is no terms correspond to the term in Equation (1.5.17), therefore coefficient matrix is symmetric. It may not cause problem because coefficient matrix is unsymmetrical in the ordinary liquefaction analysis as non-associated flow rule is usually used.

This term is the same expression with the term  $\rho_f{\{\ddot{u}\}}$  of Equation (1.4.4). Therefore it is obvious this term comes form the kinematic component of total head of water, therefore can be neglected.

## 1.5.3 Overall behavior

Equations (1.5.17) and (1.5.26) are final form, which is summarized as follows:

$$(1.5.30) \quad \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ \ddot{p}^m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\dot{u}^n \\ \dot{p}^m_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^T & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ p^m_t \end{bmatrix} = \begin{cases} dF - K_p p^m_{t-dt} \\ -\frac{NV}{K_w} p^m_{t-dt} + B \end{cases}$$

Form Equation (1.5.30), response at time t is computed from the response value at time t-dt. Here, the coefficients of the differential or pore pressure with respect to time appears only because to write the two equations in the same form, therefore the value is 0. There is not acceleration term and velocity term in the ordinary consolidation analysis, in which case coefficient matrix is symmetric. In the liquefaction

analysis, the coefficient matrix becomes symmetric if the kinematic component of head of water, [Q], is neglected (see derivation of Equation (1.4.5)).

Here we briefly discuss the calculation of Equation (1.5.23). Diagonal part of the coefficient matrix of the second term of Equation (1.5.23) is composed of the diagonal part of the stiffness matrix [K] and pore water pressure term [a]. As recognized from Equation (1.5.13) that  $[\alpha]$  is proportional with permeability and time increment. Since both of them are usually small value, the difference between the term from K and  $\alpha$  can be fairly large. For example, in the ordinary consolidation problem of clay that Akai and Tamura solved, the value of dt is at minimum 0.1 day. However, in the liquefaction analysis, dt is the order of 0.01 seconds. Therefore it is not rare case that coefficients are different by the order of 10 digit or more, in which case numerical error may appear at solving simultaneous equation. This problem is solved by the method proposed by Arai et al<sup>14</sup>. Let multiply suitable value  $\beta$  to the lower part of Equation (1.5.30), and unknown  $p^m_t$  is replaced into  $p^m_t/\beta$ , then Equation (1.5.30) is rewritten in the form

(1.5.31) 
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ \ddot{p}^m_t \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \beta \begin{bmatrix} Q \end{bmatrix}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\dot{u}^n \\ \dot{p}^m_t \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -\beta K_p \\ -\beta K_p^T & \beta^2 A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ p^m_t \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF - K_p p^m_{t-dt} \\ -\frac{nV}{K_w} \beta p^m_{t-dt} + \beta B \end{bmatrix}$$

By this conversion,  $1/\beta$  of pore water pressure is obtained. The third term is symmetric if original coefficient is symmetric. Moreover, the value  $\beta^2$  is multiplied to the small value, we can reduce the numerical error by choosing suitable value. In the ordinary unit system, the value of 1000~10000 will give good result. It is noted that these types of correction cannot be used in the Sandu-type u-p formulation.

#### 1.5.4 Undrained condition

One can use governing equation of undrained condition in the FEM, in which case overall equilibrium becomes as follows if pore water pressure term is removed following the method described in subsection 1.4.2.

(1.5.32) 
$$[M]{\ddot{u}^n} + [K']{u^n} = \{dF\}$$

where

(1.5.33) 
$$[K'] = \int_{v} [B]^{\mathrm{T}} \left( [D] + \{m\} \frac{K_{w}}{n} \{m\}^{\mathrm{T}} \right) [B] \mathrm{d} \mathrm{V}$$

is a element stiffness matrix under undrained condition. Pharensesis of the integrand in Equation (1.5.33) is apparent tangent modulus under the assumption that displacement of soil skeleton is the same with the one of pore water. Equation (1.5.32) has a characteristic that, since there is no pore water pressure term, simultaneous equation is easy to solve, in which case pore pressure is computed from Equation (1.4.19). This formulation, however, has a shortage described in the following.

In the consolidation analysis and liquefaction analysis, it is frequent that the water is assumed to be incompressible, or the value of  $K_w$  is infinite. It is obvious that this assumption cannot be employed in Equation (1.5.33). Moreover, if the value of  $K_w$  is so large that apparent Poisson's ratio becomes approaches to 0.5, large amount of numerical error will be created in the computation of element stiffness matrix (by ordinary Gauss integral method), therefore not desired.

This problem is solved by relaxing this condition a little based on the method firstly shown by Christian<sup>15)</sup>. He assumed no volume change of an element, which is modified into more general form in the following.

Overall equilibrium, Equation (1.5.17) is used except that backward differential of pore pressure, then (1.5.34)  $[M] \{ d\ddot{u}^n \} + [K] \{ du^n \} - [K_n] dp^m = \{ dF \}$ 

On the other hand, undrained condition, Equation (1.4.17) is described using the nodal displacement as

(1.5.35) 
$$\{m\}^{\mathrm{T}}\{\mathrm{d}\varepsilon\} = -\{m\}^{\mathrm{T}}[B]\{\mathrm{d}u^{n}\} = \frac{n}{K_{w}}\mathrm{d}p$$

This equation is to be hold within all part of an element. We relax this condition a little such that this condition is to be hold in an element. In other words, integral of Equation (1.5.35) with an element is to be hold under undrained condition, which yields

(1.5.36) 
$$\begin{bmatrix} K_p \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left\{ \mathrm{d}u^n \right\} + \frac{nV}{K_w} \mathrm{d}p^m = 0$$

From Equations (1.5.34) and (1.5.36), we can obtain the governing equations under undrained condition as follows:

(1.5.37) 
$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\ddot{u}^n \\ d\ddot{p}^m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^{\mathrm{T}} & -\frac{nV}{K_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du^n \\ dp^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dF \\ 0 \end{bmatrix}$$

In the previous method, number of unknown is smaller because pore pressure is removed in the governing equation, whereas, in the present method, coupled equation is solved. We can see that the equation can be solved even if  $K_w$  is infinite or any large value.

Both Equation (1.5.37) and Equation (1.5.30) have the same structure of the equation. The difference is that, in the Equation (1.5.30), water flow through the element is taken into account. Therefore, we can use the same procedure to solve the problem for both undrained condition and other condition.

### 1.5.5 Consolidation analysis

In the consolidation analysis, undrained condition is out of consideration except to obtain the initial condition by the load applied within a short duration, which will be solved as the static problem and is described in the next subsection.

As shown in subsection 1.4.3, acceleration term is neglected in the consolidation analysis. Putting  $\{d\ddot{u}^n\} = \{0\}$  in Equation (1.5.30) and neglecting the kinematic component of the head of water  $\{d\dot{u}^n\}$ , we obtain

(1.5.38) 
$$\begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^{\mathrm{T}} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}u^n \\ p_t^m \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathrm{d}F - K_p p_{t-\mathrm{d}t}^m \\ -\frac{nV}{K_w} p_{t-\mathrm{d}t}^m \end{cases}$$

This equation is exactly the same equation that Akai and Tamura derived except that they defined tensile stress as positive.

#### 1.5.6 Static analysis

Either drained or undrained condition is assumed in the static analysis. The former condition corresponds that the load is applied very slowly so that pore water has time to drain without generating excess pore water pressure. It may be recognized to be steady state, too. On the other hand, the latter condition corresponds that the load is applied very quickly so that there it no time for pore water pressure to dissipate. This condition is frequently employed to compute an initial condition of consolidation analysis, because the duration of loading is much smaller than the duration required for consolidation.

Governing equation for undrained condition is derived from Equation (1.5.37) by neglecting the acceleration term, as

(1.5.39) 
$$\begin{bmatrix} K & -K_p \\ -K_p^{\mathsf{T}} & -\frac{nV}{K_w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{d}u^n \\ \mathrm{d}p^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}F \\ 0 \end{bmatrix}$$

On the other hand, excess pore water does not change in the drained condition, therefore we can put  $dp^m = 0$ , which result in

 $(1.5.40) \quad [K] \{ \mathrm{d}u^n \} = \{ \mathrm{d}F \}$ 

The value of hydrostatic pressure is obtained by solving the seepage analysis described in the next section.

## 1.5.7 Seepage analysis

Lastly we mention the formulation of seepage analysis. For unsteady problem the governing equation is derived by removing the interactive term in Equation (1.5.26), which result in

(1.5.41) 
$$\alpha \left( p_t^m - \rho_f \left\{ x_m \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^n \alpha_i \left( p_t^i - \rho_f \left\{ x_i \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t = -\frac{nV}{K_w} \left( p_t^m - p_{t-dt}^m \right)$$

Putting  $p_t = p_{t-dt} = p$ , we obtain the seepage equation under steady condition as

(1.5.42) 
$$\alpha \left( p^{m} - \rho_{f} \left\{ x_{m} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t - \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i} \left( p^{i} - \rho_{f} \left\{ x_{i} \right\}^{\mathrm{T}} \left\{ b \right\} \right) \mathrm{d}t = 0$$

## 1.6 Boundary condition

#### 1.6.1 Boundary condition on soil

Figure Figure 1.6.1 classifies various boundary on soil. The treatment for free boundary is easy among them, therefore the other two types of boundary is explained in this subsection. The separation of boundaries into two boundaries, lateral boundary and base, has sense in only earthquake response analysis. The name of "base" is sometimes confusing because several bases are defined related to the purpose of the analysis. For the design purpose, for example, base indicate the location below which earthquake wave is the same at any locations. Therefore, it may be located deeper than the analyzed region. The definition of the term "base" in this section is that it belongs to the analyzed region and earthquake wave incidents through the boundary. In the case of elastic base, it also includes the infinite region outside the analyzed region. Now, the definition of lateral boundary is clear, it is the rest of the boundary along which analyzed region is separated from the ground.

For static and consolidation analysis, these two boundaries are identical and are treated same with rigid base. For dynamic excitation problem, the boundary is also classified into two types., which is similar to rigid base and elastic base. Therefore, if one recognize the boundary condition for earthquake response analysis, them the treatment for other analysis is easily recognized.

Since we deal with displacement of soil, we pick up terms related to soil movement from the governing equations described in the previous section. In other words, we represent governing equation as

(1.6.1) 
$$[M]{\ddot{u}} + [C]{\dot{u}} + [K]{u} = {0}$$



Figure 1.6.1. Classification of boundary on soil movement

## 1.6.2 Rigid boundary

Base moves as if it is a rigid body at rigid base. Let's separate the displacement of the analyzed region  $\{u\}$  into displacement of rigid base  $\{u_b\}$  and displacement relative to rigid base;

 $(1.6.2) \qquad \{u\} = \{u_r\} + \{u_{br}\}\$ 

where  $\{u_{br}\}$  denotes displacement relative to rigid base and is expressed as

(1.6.3) 
$$\{u_{br}\} = [I_b]\{u_b\} = [I_x \quad I_y \quad I_z] \begin{cases} u_{bx} \\ u_{by} \\ u_{bz} \end{cases}$$

Here,  $[I_b]$  is a matrix with 3x3 component whose each column vector is expressed as  $\{I_x\}$ ,  $\{I_y\}$  and  $\{I_z\}$ . The arguments of these column vectors are 1 for the component corresponding to x-, y- and z-moment, respectively and the other arguments are zero. Components  $u_{bx}$ ,  $u_{by}$  and  $u_{bz}$  of  $\{u_b\}$  are displacement in x-, y- and z-direction, respectively.

Substituting Equation (1.6.3) into Equation (1.6.1) and separating the displacement into displacement at base and the other, Equation (1.6.1) is rewritten as

(1.6.4) 
$$\begin{bmatrix} M_r & 0 \\ 0 & M_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u}_r + \ddot{u}_{br} \\ \ddot{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_r & C_{br} \\ C_{rb} & C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_r + \dot{u}_{br} \\ \dot{u}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_r & K_{br} \\ K_{rb} & K_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_r + u_{br} \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Since displacement  $\{u_b\}$  is known because it is specified as earthquake input, upper equation of Equation (1.6.4) yields

$$(1.6.5) \qquad \left[M_{r}\right]\left\{\ddot{u}_{r}\right\} + \left[C_{r}\right]\left\{\dot{u}_{r}\right\} + \left[K\right]\left\{u_{r}\right\} = -\left[M_{r}\right]\left[I_{b}\right]\left\{\ddot{u}_{b}\right\} - \left(\left[C_{r}\right]\left[I_{b}\right]\right] + \left[C_{rb}\right]\right)\left\{\dot{u}_{b}\right\} - \left(\left[K_{r}\right]\left[I_{b}\right]\right] + \left[K_{rb}\right]\right)\left\{u_{b}\right\}$$

Since  $\{u_b\}$  is a rigid body motion, the third term of the right-hand side of Equation (1.6.5) is  $\{0\}$ . The second term also becomes  $\{0\}$  in the either case that stiffness proportional damping is employed or that damping force is proportional with the relative velocity, for example. Although it does not become  $\{0\}$  when mass matrix proportional damping is employed, but usually the effect of this term is supposed to be small, therefore neglected. Then Equation (1.6.5) is rewritten as

(1.6.6)  $[M_r]\{\ddot{u}_r\} + [C_r]\{\dot{u}_r\} + [K]\{u_r\} = -[M_r][I_b]\{\ddot{u}_b\}$ 

Equation (1.6.6) is equation of motion for rigid base.

## 1.6.3 Elastic base

The modeling method is shown for 2-dimensional analysis following to Joyner<sup>16</sup>). We consider the case that incident wave enters analyzed region perpendicular to the base as shown in Figure 1.6.2(a). The coordinate system is chosen so that y-axis is perpendicular to the base. Because incident wave moves towards y-direction, x-direction corresponds to the direction of vibration of SV wave and y-direction corresponds to the one of P wave. We consider these two waves and the case that both incident and reflected wave moves perpendicular to the base.



Let's identify quantities related to P-wave and S-wave by subscript P and S and the ones related to incident wave and reflected wave by I and R. The velocity at the point just below the boundary is expressed as

(1.6.7) 
$$v_{x} = v_{SI} + v_{SR} \\ v_{y} = v_{PI} + v_{PR}$$

Next we consider the outcropping base where base faces to open surface as shown in Figure Figure 1.6.2(b), which is obtained by removing the ground above the base from Figure Figure 1.6.2(a). This base is called outcropping base. The wave component in this ground is distinguished by subscript F. Since phase of the reflected wave at the outcropping base is 180° different to the incident wave, velocity at the outcropping base becomes

(1.6.8) 
$$v_{Fx} = 2v_{SI}$$
  
 $v_{Fy} = 2v_{PI}$ 

We are dealing with plane wave; therefore, displacement u is expressed as a function in terms of position and time as

$$u_{PI} = u_{PI} \left( y - V_{p} t \right)$$

$$u_{PR} = u_{PR} \left( y + V_{p} t \right)$$

$$u_{SI} = u_{SI} \left( y - V_{s} t \right)$$

$$u_{SR} = u_{SR} \left( y + V_{s} t \right)$$

Here,  $V_p$  is velocity of compressive wave, and  $V_s$  is velocity of shear wave. Using this relation, strains caused by there waves considered here can be expressed as

(1.6.10) 
$$\varepsilon_{yI} = -\frac{\partial u_{PI}}{\partial y} = \frac{v_{PI}}{V_P}, \quad \varepsilon_{yR} = -\frac{\partial u_{PR}}{\partial y} = \frac{v_{PR}}{V_P}$$
$$\gamma_{xyI} = -\frac{\partial u_{SI}}{\partial y} = \frac{v_{SI}}{V_S}, \quad \gamma_{xyR} = -\frac{\partial u_{SR}}{\partial y} = \frac{v_{SR}}{V_S}$$

where  $V_p$  and  $V_s$  is expressed using the elastic module of base, bulk modulus K and shear modulus G, and mass density  $\rho$  as

(1.6.11) 
$$V_{P} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left( K + \frac{4}{3} G \right)}, \quad V_{S} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

Therefore, stress at the boundary caused by P-wave and S-wave becomes

(1.6.12) 
$$\sigma_{yI} = \frac{v_{PI}}{V_{P}} \left( K + \frac{4}{3} G \right) = \rho V_{P} v_{PI} \quad \sigma_{yR} = -\frac{v_{PR}}{V_{P}} \left( K + \frac{4}{3} G \right) = \rho V_{P} v_{PR}$$
$$\tau_{xyI} = \frac{v_{SI}}{V_{S}} G = \rho V_{S} v_{SI} \quad \tau_{xyR} = -\frac{v_{SR}}{V_{S}} G = -\rho V_{S} v_{SR}$$

Since stress at the boundary is the sum total of the stress caused by incident wave and that by reflected wave,

(1.6.13) 
$$\sigma_{y} = -\rho V_{P} (v_{PR} - v_{PI}) = -\rho V_{P} (V_{y} - V_{Fy})$$
$$\tau_{xy} = -\rho V_{S} (v_{SR} - v_{SI}) = -\rho V_{S} (V_{x} - V_{Fx})$$

In the above, we consider the stress at a point, but it must be converted into nodal force in the FEM analysis. It can be done using Equations (1.5.4) and (1.5.10) since these stresses are treated as surface traction. If boundary is a straight line, then

(1.6.14) 
$$\{F\} = \begin{cases} \rho V_S \ell(v_x - v_{Fx}) \\ \rho V_P \ell(v_y - v_{Fy}) \end{cases} = \begin{cases} \mu_x (\dot{u}_x - \dot{u}_{Fx}) \\ \mu_y (\dot{u}_y - \dot{u}_{Fy}) \end{cases}$$

where *l* denotes sum of the half distance to the neighboring node in both sides. This equation indicates that if we put two dashpots which works in x- and y-direction and whose viscous coefficient are  $\mu_x$  and  $\mu_y$  and if we excite the node of dashpot by the velocity relative to the one at outcropping base, resultant force is exactly the same to consider infinite region under the base of analysis.

Since we assumed only that both incident and reflected waves are directed perpendicular to the boundary except that we assumed that there is a infinite region outside the analyzed boundary therefore reflected wave never come back into the analyzed region. Among these assumption, incident wave is always perpendicular to the base because we set so. On the other hand, reflected wave is also perpendicular to the base in the one-dimensional case, but may not be perpendicular approximation of actual elastic base.

If we combine load due to dashpot described in Equation (1.6.14) into equation of motion, Equation (1.6.1), we obtain

(1.6.15)  $[M]{\ddot{u}} + [C']{\dot{u}} + [K]{u} = \mu \{I\}\dot{u}_f$ 

where {*I*} denote a vector whose argument is 1 if the direction of movement of that freedom coincide with the direction of vibration of the incident wave at the base and 0 for other freedom, and  $u_f$  is a displacement if base of analysis were outcropping base and

(1.6.16)  $[C'] = [C] + [\mu]$ 

where  $[\mu]$  denotes a diagonal matrix whose component is computed from Equation (1.6.14) at the node where dashpot is attached and is zero for other components.

We should specify the velocity of outcropping base to use Equation (1.6.15), which is somewhat inconvenient in the practical use. We separate displacement in the analyzed region into two component, displacement at the outcropping base and displacement relative to outcropping base,

 $(1.6.17) \quad \{u\} = \{u_r\} + \{I_b\}u_f$ 

where  $\{I_b\}$  is a vector whose component is 1 if direction of freedom coincide with the direction that dashpot works. Substitution of Equation (1.6.17) into Equation (1.6.16) yields

(1.6.18)  $[M]{\ddot{u}_r} + [C']{\dot{u}_r} + [K]{u_r} = -[M]{I_b}\ddot{u}_f - [C]{I_b}\dot{u}_f$ 

The second term of the right-hand side of Equation (1.6.18) becomes  $\{0\}$  if damping is such that damping force is proportional to the relative velocity of elements. Now, velocity term of outcropping base disappears and acceleration term remains instead. If indicate that we can use acceleration of outcropping base in the analysis as ordinary earthquake response analysis is so. It is noted that acceleration in

right-hand side of Equation (1.6.18) is the acceleration at the outcropping base, which is double in amplitude of the incident wave.

Unidirectional incident wave is considered in Equation (1.6.17), but if one consider multi-directional component of incident wave, he should add corresponding term into the right hand side of Equation (1.6.18).

## 1.6.4 Lateral boundary

In this subsection, modeling of lateral boundary by dashpot is explained.



Figure 1.6.3. Energy transmitting boundary that Lysmer assumed

Lysmer et al.<sup>17)</sup> showed that the following boundary condition has good ability to absorb the energy of wave that are going out of the region being considered for the vibration generated within the region as shown in Figure 1.6.3.

(1.6.19) 
$$\sigma = -a\rho V_P v_n$$
$$\tau = -b\rho V_S v_t$$

where  $\sigma$  and  $\tau$  are normal and tangential stress, respectively,  $v_n$  and  $v_t$  are velocities in the normal and tangential directions, respectively and *a* and *b* are dimensionless coefficients. The case that *a*=1 and *b*=1 are especially called standard boundary, in which case boundary absorbs energy of incident wave the most efficiently if angle of incident wave is perpendicular to the boundary. On the other hand, steady Rayleigh wave can be completely absorbed by setting suitable value for *a* and *b* as a function of depth.

The physical modeling of this boundary is the same with the boundary shown in the previous subsection (actually, dashpot for lateral boundary is proposed earlier and Joyner extended it for elastic base), but incident waves that are not perpendicular to the base is taken into account in this model. As shown in Figure Figure 1.6.4, standard boundary show good ability fairly wide range of incident angle. Therefore although Joyner did not discuss the reflected wave not perpendicular to the boundary, his boundary is effective at fairly wide range of reflected wave.

Since vibration source in the region being considered is discussed in Lysmer's method, it cannot be used in the earthquake response analysis directly because region outside the analyzed region is also vibrate during the earthquake. If we subtract the displacement of free field from the displacement, displacement of free field is zero. Therefore, if we are interested in the absorption of the wave that moves relative to free field, boundary condition to be used instead of Equation (1.6.19) becomes

(1.6.20) 
$$\sigma = -a\rho V_P(v_x - v_{Fx})$$
$$\tau = -b\rho V_S(v_y - v_{Fy})$$

It is noted that in many computer codes input corresponding the coefficient a and b are not prepared, or only standard boundary is considered. It can be, however, taken into account if one prepares the data

considering these coefficient in the value of  $V_s$  and  $V_p$ .



Figure 1.6.4. Energy absorbing capacity of standard boundary

Nodal force  $\{F_{i+1}\}$  acting at the node between *i*th and *i*+1th layer in Figure 1.6.5 is computed for standard boundary as

$$(1.6.21) \quad \left\{F_{i+1}\right\} \left\{ \begin{pmatrix} \rho_i \ell_i V_{Pi} + \rho_{i+1} \ell_{i+1} V_{Pi+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_{x,i+1} - \dot{u}_{Fx,i+1} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \rho_i \ell_i V_{Si} + \rho_{i+1} \ell_{i+1} V_{Si+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_{y,i+1} - \dot{u}_{Fy,i+1} \end{pmatrix} \right\} \left\{ \mu_{yrbi} \begin{pmatrix} \dot{u}_{y,i+1} - \dot{u}_{Fy,i+1} \end{pmatrix} \right\}$$



Figure 1.6.5. Free field



Figure 1.6.6. Schematic figure of lateral viscouse boundary

Therefore, equation of motion considering this term in addition to Equation (1.6.6) and (1.6.18) yields (1.6.22)  $[M^*]\{\ddot{u}_r\} + [C^*]\{\dot{u}_r\} + [K^*]\{u_r\} = -[M]\{I_b\}\ddot{u}_g - [\mu_{rb}]\{I_F\}\dot{u}_F$ 

where  $M^*$ ,  $C^*$ ,  $K^*$  and  $u_g$  are replaced into  $M_r$ ,  $C_r$ ,  $K_r$  and  $u_b$ , respectively, for rigid base and M, C', K and  $u_f$  for elastic base. Matrix  $[m_{rb}]$  is valid only at the freedom where dashpot is set and  $u_F$  denote displacement of lateral free field.

Usually analysis is conducted twice to use dashpot for lateral boundary. In the first analysis,

response of free field is computed, and, in the second analysis, both input earthquake motion and the response of free field are used as input and the problem is to be treat as multiple excitation problem. So as to avoid this inconveniency, free field is sometimes modeled with large area compared with the region being analyzed so that the behavior of analyzed region does not affect the response of free field. If the free field is too large, numerical error will increase, and if it is too small, the behavior is affected by the behavior of analyzed region. STADAS solves this difficulty by taking care to build a damping matrix of dashpot connecting the free field and analyzed region, which enable to solve the model in Figure 1.6.6 without error. Here damping matrix are build so that the force acting the dashpot does not act into the free field, which result in

$$(1.6.23) \quad \begin{bmatrix} M^* & 0 \\ 0 & M_F \end{bmatrix} \left\{ \ddot{u}_F^n \right\} + \begin{bmatrix} C^* + \mu_{rb} & \mu_{rb} \\ 0 & C_F \end{bmatrix} \left\{ \dot{u}_F^n \right\} + \begin{bmatrix} K_r & 0 \\ 0 & K_F \end{bmatrix} \left\{ u_F^n \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} M \end{bmatrix} \{I\} \\ \begin{bmatrix} M_F \end{bmatrix} \{I_F\} \right\} \ddot{u}_g$$

where above equation is build for the region being analyzed and the lower equation corresponds to the equation of motion of free field, and subscript F indicates quantities related to free field.

#### 1.6.5 Boundary condition for water

There are two types of boundary for the pore water: fundamental boundary where pore water pressure is specified and natural boundary where flow through the boundary is specified.

A little consideration is required to treat the boundary condition for pore water in STADAS because pore water pressure only at the center of an element is computed. We consider virtual element that is symmetric with the referent element as shown in Figure 1.6.7. Let's denote that pore water pressure of referent element as  $p_m$  and the one of the virtual element as  $p_i$ .



Figure 1.6.7. Virtual element that is symmetric with referent element

The value of pore water pressure is specified at the fundamental boundary. Let's denote it as  $p_b$  then pore water pressure  $p^I$  of virtual element is computed from

$$(1.6.24) \qquad p_b = \frac{p^m + p^l}{2}$$

where linear pore water pressure gradient is assumed. The solution of this equation gives  $p^{l}=2p^{b}-p^{m}$ . Therefore water passing through this boundary per unit time, Q is computed as

(1.6.25) 
$$Q = \frac{sk}{\rho_f g\ell} \left( p^m - p^i \right) = \frac{2sk}{\rho_f g\ell} \left( p^m - p_b \right)$$

This equation indicates that fundamental boundary is treated as the other boundary where there is neighboring element, treatment of which is already described, if we change the definition of  $\ell$  from the distance between the center of elements to the distance between the center of the element and boundary and add the term of  $p_b$  in the right-hand side of governing equation.

On the other hand, the water passing the natural boundary dQ is computed as

(1.6.26) 
$$dQ = \frac{sk}{\ell \gamma_w} \left( dp^i - dp^m \right)$$

where k denotes permeability in the direction connecting the center of two elements, s is the length of the boundary and  $\ell$  denotes the distance between the centers.

As shown, flow through the boundary can be computed by assuming virtual element, then flow in Equation (1.5.23) is computed.

The most frequently used boundary conditions are  $dp_b=0$  and dQ=0. It is noted that for other boundary the term  $dp_b$  and dQ will move from left-hand to right-hand side in Equation (1.5.30). As the result, treatment of boundary condition for pore water is summarized as follows:

: drained. Add  $\frac{sk}{\rho_f g(\ell/2)}$  into  $\alpha$  i where 1/2 denotes distance to the pb=0

boundary.

Natural boundary : -Q\*dt is added to the right-hand side, where Q\* denotes flow goring out from the boundary

Fundamental boundary : Add  $\frac{sk}{\rho_{f}g(\ell/2)}p_{b}dt$  in the right-hand side.

#### Numerical integration with respect to time 1.7

## 1.7.1 Newmark's $\beta$ method

Since quantities at time t is derived from the one at time t-dt for pore water pressure in fundamental equation (1.5.30), we compute displacement in the same manner. Applying the Newmark's  $\beta$  method, displacement and velocity at time t is computed as

$$\dot{u}_{t} = \dot{u}_{t-dt} + (1-\gamma)dt\ddot{u}_{t-dt} + \gamma dt\ddot{u}_{t}$$
(1.7.1)
$$u_{t} = u_{t-dt} + dt\dot{u}_{t-dt} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(dt)^{2}\ddot{u}_{t-dt} + \beta(dt)^{2}\ddot{u}_{t-dt}$$

where  $\gamma$  and  $\beta$  are parameter affecting the accuracy of numerical integration, and take the value  $0 \le \gamma \le 1$  and  $0 \le \beta \le 1/2$ , respectively. The method to take  $\gamma = 1/2$  for velocity is called Crank-Nicholson's method, and employed frequently. The one reason is that numerical damping is introduced for other value<sup>18)</sup>, and the other reason is that the error is small in general when  $\gamma = 1/2$ .

Incremental form of Equation (1.7.1) yields

(1.7.2) 
$$\{ d\dot{u} \} = dt \{ \ddot{u}_{t-dt} \} + \gamma dt \{ d\ddot{u} \}$$
$$\{ du \} = dt \{ \dot{u}_{t-dt} \} + \frac{1}{2} (dt)^2 \{ \ddot{u}_{t-dt} \} + \beta (dt)^2 \{ d\ddot{u} \}$$

If we substitute these equations into fundamental equation, Equation (1.5.30), only  $\{d\ddot{u}\}$  and  $\{p(t)\}$  remains as unknown variable, therefore they can be solved. In the consolidation analysis, however, displacement increments are unknown. To be consistent, it is convenient to leave displacement increment as known. If Equation (1.7.2) is solved in terms of displacement, we obtain

(1.7.3)  
$$d\ddot{u} = \frac{1}{\beta (dt)^2} du - \frac{1}{\beta dt} \dot{u} - \frac{1}{2\beta} \ddot{u}$$
$$d\dot{u} = \frac{\gamma}{\beta dt} du + dt \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \ddot{u} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}$$

where  $\dot{u}$  and  $\ddot{u}$  denote the velocity and acceleration at time t-dt. Substituting this into governing equation, we obtain

This method has an advantage that stiffness matrix [K] appears only in the left-hand side and is not multiplied any coefficients. Therefore, we can compute and add various terms in (1.7.4) with building a stiffness matrix.

## 1.7.2 Predictor-corrector method

It becomes difficult to obtain unique solution such as tangent modulus method previously explained when tangent modulus is a function of both strain and effective stress, which occurs frequently in the liquefaction analysis, because the term  $[K]{u}$  in Equation (1.5.30) becomes nonlinear. Iterative method is to be employed in this case. A Predictor-corrector method is employed in the program.

Newmark's  $\beta$  method is employed as a predictor, in which acceleration response of first iteration is the same with the acceleration increment of input earthquake. In other words, we employ acceleration increment of base as initial guess.

Both tangent modulus and initial modulus can be used as predictor, in which case flow chart of the solution is shown in Figure 1.7.1.



Figure 1.7.1. Floe chart for predictor-corrector iterative method

References

- Biot, M.A., General Theory of Three-dimensional Consolidation, J. Appl Phys., Vol 12, pp.155-164, 1941
- Biot, M.A., Theory of Elasticity and Consolidation for a Porous Anisotropic Solid, J. Appl. Phys, Vol. 26, pp.182-185, 1955
- Biot, M.A., Mechanics of Deformation and Acoustic Propagation in Porous Media, J. Appl. Phys, Vol. 33, pp.1483-1898, 1962
- Biot, M.A., Theory of Stability and Consolidation of a Porous Media under Initial Stress, J. Math. and Mech., Vol. 12, pp.521-541, 1963
- 5) Ghaboussi, J. and Wilson, E.L., Variational Formulation of Dynamics of Fluid Saturated Porous Elastic Solids, Proc. ASCE, Vol. 98, No. EM4, pp.947-963, 1972
- Bowen, R.M., Theory of Mixtures, Continuum Physics, Vol. III, Eringen ed., Academic Press, 1976, New York
- 7) Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol. 30, pp.385-395, 1980
- Zienkiewicz, O.C., Basic Formulation of Static and Dynamic Behavior of Soil and Other Porous Media, Numerical Methods in Geomechanics, J.B. Martins ed., D. Reidl Publishing Co., 1982
- 9) Pande, G.N. and Zienkiewicz, O.C. ed., Soil Mechanics-Transient and Cyclic Loads Constitutive relations and numerical treatment, John Wiley and Sons, 1982
- Prevost, J.H., Nonlinear Transient Phenomena in Saturated Porous Media, Comp. Mech. in Appl. Mech. Eng., Vol. 20, pp.3-8, 1982
- Zienkiewicz, O.C. and Shiomi, T, Dynamic Behavior of Saturated Porous Media, The Generalized Biot Formulation and Its Numerical Solution, International Journal of Numerical and Applied Method in Geomechanics, Vol. 8, pp.71-96, 1984
- Christian, J.T. and Boehmar, J.W., Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. ASCE, Vol. 96, No. SM4, pp.1435-1457, 1968
- Akai, K. and Tamura, T., Numerical analysis of multi-dimensional consolidation by plasticity theory, Proc., JSCE, No. 269, pp. 95-104, 1976.
- 14) Arai, K., Watanabe, T., Ueda, Y., Comparison of numerical method of multi-dimensional consolidation, Soils and Foundation, Vol. 24, No. 3, pp. 178-180, 1983.
- Christian, J.T., Undrained Stress Distribution by Numerical Methods, Proc. ASCE, SM6, Nov., 1968, pp.1333-11345
- Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol. 65, No. 5, pp.1337-1357, October 1975
- Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol. 95, No. EM4, 1969, pp.859-877
- Yoshida, Y., Time dependent analysis, Theory and application of Finite Element Method in Structural Engineering, Japan Steel Association, 1984.

## 2 Hourglass deformation mode

One point Gauss integration is conducted to compute an element stiffness matrix in STADAS because of two reasons: save computing time and memory for numerical integral, and consistent with the treatment of pore water. As shown in chapter 1 and will be shown in the following, this method has several advantage, but it has a shortage that it may cause hourglass instability. The solution of the hourglass instability, anti-hourglass mode matrix, is described in this chapter.

## 2.1 Fundamental equations

We consider the behavior of soil in this chapter. We can treat the mixture of soil and water as one body in the total stress analyses.

First, FEM formulation using the advantage of one point Gauss integration is described although general method is described in the previous chapter. Fundamental equations are as follows:

(1) Interpolation of displacement

(2.1.1) 
$$u = \{N\}^{T} \{u_{n}\}$$
$$v = \{N\}^{T} \{v_{n}\}$$

u, v: displacement in x- and y direction. Subscript n indicates that they are nodal value.

## (2) Interpolation function

(2.1.2)  $\{N\}^{\mathsf{T}} = \{N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4\}$ (2.1.3)  $N_i = (1 + \xi \cdot \xi_i)(1 + \eta \cdot \eta_i)$ (2.1.4)  $\xi_i = -1, 1, 1, -1$  for i = 1 to 4 (2.1.5)  $\eta_i = -1, 1, 1, -1$  for i = 1 to 4

(3) Constitutive model

 $(2.1.6) \qquad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ 

Note that compression is positive and strain is engineering strain.

(4)Strain-displacement relationship

(2.1.7) 
$$\{\varepsilon\} = - \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{cases} \begin{cases} u\\ v \end{cases}$$

Since the state values at the center of an element, where  $\xi = \eta = 0$ , is used in the one point Gauss integration, it is convenient to compute them. Substituting Equations (2.1.1)~(2.1.5) into Equation (2.1.7), we obtain the strain at the center of an element.

$$(2.1.8) \qquad \left\{\varepsilon_{c}\right\} = \frac{1}{A} \begin{cases} \left\{b_{x}\right\}^{T} & 0\\ 0 & \left\{b_{y}\right\}^{T}\\ \left\{b_{y}\right\}^{T} & \left\{b_{x}\right\}^{T} \end{cases} \begin{cases} u_{n}\\ v_{n} \end{cases} \frac{1}{A} \begin{bmatrix} B_{c} \end{bmatrix} \begin{cases} u_{n}\\ v_{n} \end{cases} \end{cases}$$

where

(2.1.9) 
$$\{b_x\}^T = \frac{1}{2}\{y_2 - y_4 \quad y_3 - y_1 \quad y_4 - y_2 \quad y_1 - y_3\} = \int \frac{\partial\{N\}}{\partial x} dA$$
  
(2.1.10)  $\{b_y\}^T = \frac{1}{2}\{x_4 - x_2 \quad x_1 - x_3 \quad x_2 - x_4 \quad x_3 - x_1\} = \int \frac{\partial\{N\}}{\partial y} dA$ 

Here, subscript c in Equation (2.1.8) indicates that they are the value at the center of an element. In the

()

followings, however, they are usually clear, therefore subscript c are usually removed unless necessary.

## 2.2 Element stiffness matrix

One of the advantage of one point Gauss integral is that it requires less amount calculation compared to other method. Moreover, it can be possible to compute element stiffness matrix without error for the material whose Poisson's ration is extremely close to 0.5. In the ordinary numerical integral, integral in this range may cause large error. For example, it is possible to obtain element stiffness matrix without any problem for the material with Poisson's ration v = 0.49999 even by simple precision calculation by one point Gauss integral, which calculation is necessary under undrained condition.

Virtual work equation under virtual displacement  $\{\delta u_n\}$  is written as

(2.2.1)  $\{ \delta U_n \}^{\mathrm{T}} \{ f_n \} = \int \{ \delta \varepsilon \}^{\mathrm{T}} \{ \sigma \} dA = A \{ \delta \varepsilon_c \}^{\mathrm{T}} \{ \sigma_c \} = A \{ \delta U_n \}^{\mathrm{T}} [B_c] \{ \sigma_c \}$ 

Substituting Equations (2.1.6) and (2.1.8) into the condition that Equation (2.2.2) holds under arbitrary  $\{\delta u_n\}$ , we obtain the relation between nodal force  $\{f_n\}$  and nodal displacement  $\{U_n\} = \{\{u_n\} \mid \{v_n\}\},\$ 

(2.2.2)  $\{f_n\} = A[B_c]^T [D_c] B_c \{U_c\}$ 

Therefore, element stiffness matrix [K] yields

 $(2.2.3) \qquad [K] = A[B_c]^T [D_c] [B_c]$ 

## 2.3 Hourglass deformation mode

First, we define two fundamental vector by Equations (2.3.1) and (2.3.2), the meaning of which will be clear later.

 $(2.3.1) \qquad \{s\}^{\mathrm{T}} = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\} \qquad : \text{Rigid body motion}$ 

(2.3.2)  $\{h\}^{T} = \{1 -1 \ 1 -1\}$ : Hourglass deformation

The relation of these vector and vectors shown in the preceding section is as follows:

(2.3.3)  $\{s\}^{\mathsf{T}}\{h\} = \{s\}^{\mathsf{T}}\{b_x\} = \{s\}^{\mathsf{T}}\{b_y\} = 0$ 

$$(2.3.4) \qquad \{h\}^{\mathrm{T}}\{b_{x}\} = \{h\}^{\mathrm{T}}\{b_{y}\} = 0$$

In addition, the relation between nodal coordinate (x-coordinate =  $\{x_n\}$ , y-coordinate =  $\{y_n\}$  and  $\{b_x\}$ ,  $\{b_y\}$  becomes

(2.3.5) 
$$\{x_n\}^{\mathsf{T}} \{b_x\} = \{y_n\}^{\mathsf{T}} \{b_y\} = A$$
  
(2.3.6)  $\{x_n\}^{\mathsf{T}} \{b_y\} = \{y_n\}^{\mathsf{T}} \{b_y\} = 0$ 

The element being considered is composed with four nodes, and each node has 2 degrees of freedom. Therefore an element has 8 degrees of freedom, among which three are rigid body motion in x- and y-directions and rotation. Therefore, it has five independent deformation mode. On the other hand, the one point Gauss integration uses the state variable at the center of an element. In other word, displacement of an element is expressed in terms of the strain at the center of an element by assuming linear displacement field. The total number of strain at the center of an element, however, is three. Therefore two deformation modes cannot be expressed by one-point Gauss integration.

Let's consider deformation modes in Figure Figure 2.3.1 as an example. Strain is caused at the center of the element by three deformation mode shown in the upper row in the figure, which deformation modes corresponds to  $\varepsilon_{xv}$   $\varepsilon_y$  and  $\tau_{xy}$ . On the other hand, strain is not caused at the center of the element by two deformation modes shown in the lower row in the figure. This may cause instability because an element can deform without rigidity. In the actual situation, hourglass mode instability is appeared in such a mode as shown in Figure 2.3.2. Now it is recognized the meaning of the term "hourglass" in Figure 2.3.2.


Figure 2.3.1. A set of independent deformation modes

		$\sim$	
$\sim$	/	/	/
<u> </u>	_		_

 Figure 2.3.2.
 Typical hourglass mode instability

It is easy to recognize that hourglass instability can be avoided by giving suitable stiffness against hourglass mode deformation. As shown above, there are two hourglass modes, mode to deform in x-direction and y-direction. Then, we express generalized strains  $q_x$  and  $q_y$  using the shape function against hourglass mode deformation  $\{\gamma\}$  as

(2.3.7)  $q_x = \{\gamma\}^{\mathsf{T}} \{u_n\}$ (2.3.8)  $q_y = \{\gamma\}^{\mathsf{T}} \{v_n\}$ 

Here, shape function  $\{\gamma\}$  is defined as

(2.3.9)  $\{\gamma\} = \{h\} + \alpha_x \{b_x\} \alpha_y \{b_y\}$ 

where  $\alpha_x$  and  $\alpha_y$  are coefficient, whose value is determined because of the following reason.

It is noted that shape  $\{\gamma\}$  function have a characteristics such that generalized strain q is 0 under the set of displacement for rigid body motion and constant strain. In other words, it must be orthogonal to them, which is proved hereafter.

# 2.4 Orthogonality against rigid body motion

There are three independent rigid body motions, which are shown in the table below. Therefore rigid body motion is expressed as a linear combination of these mode, which is expressed using three arbitrary coefficients  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  and  $\beta_3$ .

	x-direction	y-direction	rotation
$\{u_n\}$	$\{s\}$	{0}	$-\{x_n\}$
$\{v_n\}$	$\{0\}$	$\{s\}$	$\{\mathcal{Y}_n\}$

(2.4.1) 
$$\begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases} = \beta_1 \begin{cases} s \\ 0 \end{cases} + \beta_2 \begin{cases} 0 \\ s \end{cases} + \beta_3 \begin{cases} -x_n \\ y_n \end{cases}$$

If the hourglass deformation mode in x-direction is orthogonal to the rigid body motion, the equation

(2.4.2) 
$$({h} + \alpha_x {b_x} + \alpha_y {b_y})^{\mathrm{T}} (\beta_1 {s} + \beta_3 {x_n}) = 0$$

should be holds under any value of  $\beta_l$  and  $\beta_3$ , which result in Equation (2.4.1). Here sign against rotation is opposite to the one before, which is done so as to make the following formulation easy, and which does not affect the conclusion because orthogonality should holds regardless to easy, and which does not affect the conclusion because orthogonality should holds regardless to the displacement in y-direction.

- (2.4.3)  $\{h\}^{\mathsf{T}}\{s\} + \alpha_x\{b_x\}^{\mathsf{T}}\{s\} + \alpha_y\{b_y\}^{\mathsf{T}}\{s\} = 0$
- (2.4.4)  $\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} + \alpha_x\{b_x\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} + \alpha_y\{b_y\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} = 0$

Referring Equation (2.3.3), Equation (2.4.3) always hold. Using the relation in Equations (2.3.5) and (2.3.6), the third term of Equation (2.4.4) holds is rewritten as Equation (2.4.5), and therefore the value of  $\alpha_{y}$  can be arbitrary.

(2.4.5) 
$$\alpha_x = -\frac{1}{A} \{h\}^{\mathrm{T}} \{x_n\}$$

In the same manner, orthogonality condition against hourglass mode in y-direction is written as Equation (2.4.6); against,  $\alpha_x$  can be an arbitrary value.

(2.4.6) 
$$\alpha_{y} = -\frac{1}{A} \{h\}^{T} \{y_{n}\}$$

Consequently, shape function must have a following form so as to be orthogonal tot he rigid body movements in both x- and y-direction.

(2.4.7) 
$$\{\gamma\} = \{h\} - \frac{1}{A} \{\{h\}^{\mathsf{T}} \{x_n\} \{b_x\} + \{h\}^{\mathsf{T}} \{y_n\} \{b_y\}\}$$

For the check of orthogonality against rigid body rotation, let's suppose  $\beta_1 = \beta_2 = 0$  and  $\beta_3 = 1$ , we obtain

(2.4.8) 
$$q_x = -\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_n\} + \frac{1}{A}(\{b_x\}^{\mathsf{T}}\{x_n\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{x_n\} + \{b_y\}^{\mathsf{T}}\{y_n\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{x_n\})$$

where among two term in the pharensesis of Equation (2.4.8), two products,  $\{x_n\}^T\{h\}$  and  $\{y_n\}^T\{h\}$  result in scalar quantity. The product of the exterior term, which is possible because center part is scalar, is modified using the relations in Equations (2.3.5) and (2.3.6),

(2.4.9)  $q_x = -\{h\}^T \{x_n\} + \{h\}^T \{x_n\} = 0$ 

Therefore, orthogonality is proved.

# 2.5 Orthogonality against constant strain modes

In general, n-th point Gauss integration gives exact solution up to (2n-1)th order polynomials, therefore one point Gauss integral is exact for linear displacement field. Linear displacement field is expressed as

(2.5.1) 
$$u = u_c + \frac{\partial u_c}{\partial x} (x - x_c), \quad v = v_c + \frac{\partial v_c}{\partial y} (y - y_c)$$

or when focusing on nodal displacement, it is written as

(2.5.2) 
$$\{u_n\} = \{s\}u_c + \frac{\partial u_c}{\partial x}(\{x_n\} - \{s\}x_c)$$
  
(2.5.3) 
$$\{v_n\} = \{s\}v_c + \frac{\partial v_c}{\partial y}(\{y_n\} - \{s\}y_c)$$

The relation is rewritten for x-displacement in detail as

$$q_{x} = \{\gamma\}\{u_{n}\} = \underline{\{h\}^{\mathsf{T}}\{s\}}u_{c}\frac{\partial u_{c}}{\partial x}\left(\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\} - \underline{\{h\}^{\mathsf{T}}\{s\}}x_{c}\right)$$

$$-\frac{1}{A}\left(\underline{\{b_{x}\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}} + \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\left(\underline{\{b_{x}\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{x_{n}\}} - \underline{\{b_{x}\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}}x_{c}\right)\right)$$

$$-\frac{1}{A}\left(\underline{\{b_{y}\}^{\mathsf{T}}\{y_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}} + \frac{\partial u_{c}}{\partial y}\left(\underline{\{b_{y}\}^{\mathsf{T}}\{y_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{x_{n}\}} - \underline{\{b_{y}\}^{\mathsf{T}}\{y_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\{s\}}x_{c}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\{h\}^{\mathsf{T}}\{x_{n}\} - \frac{\partial u_{c}}{\partial x}\{x_{n}\}^{\mathsf{T}}\{h\}\} = 0$$

Here it is noted that the terms with underline are 0 because either the inner product of the interior vectors is zero or inner product of interior vectors is a scalar and inner product of exterior vectors is zero. In the same manner, the terms with double underlines becomes A. Moreover, the product  $\{h\}^{T}\{x_n\}$  is a scalar and is equal to  $\{x_n\}^{T}\{h\}$ . Therefore the orghogonality is proved.

In the same manner it can be proved that  $q_y=0$ . As the result, orthogonality of hourglass base vector  $\{\gamma\}$  against constant strain mode is proved.

#### 2.6 Anti-hourglass mode deformation matrix

Generalized stress corresponding to the generalized strain in the previous section is defined as

$$(2.6.1) \qquad Q_x = c_x q_x \quad Q_y = c_y q_y$$

where  $c_x$  and  $c_y$  are coefficients. Let's denote equivalent nodal force due to hourglass deformation as  $\{f^d\}$ , then virtual work equation for anti-hourglass mode deformation is written as

(2.6.2) 
$$\{\delta u_n\}^{T} \{f^{H}\} = \delta q_x Q_x + \delta q_y Q_y = \{\delta u_n\}^{T} \{\gamma\} c_x \{\gamma\}^{T} \{u_n\} + \{\delta v_n\}^{T} \{\gamma\} c_y \{\gamma\}^{T} \{v_n\}$$

In other word, element stiffness matrix against hourglass deformation mode, or anti-hourglass mode deformation matrix  $[K_H]$ , is written as

(2.6.3) 
$$\{f^H\} = \{K^H\} \begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases} = \begin{bmatrix} c_x \{\gamma\}^T \{\gamma\} & 0 \\ 0 & c_y \{\gamma\}^T \{\gamma\} \end{bmatrix} \begin{cases} u_n \\ v_n \end{cases}$$

It is also obvious that the relation between the generalized stress and equivalent nodal force is written as  $(a_{ij}) = (a_{ij}) =$ 

(2.6.4) 
$$\{f_x^H\} = \{\gamma\} Q_x, \quad \{f_y^H\} = \{\gamma\} Q_y$$

### 2.7 Coefficient of anti-hourglass mode deformation matrix

Since arbitrary value seems be used for the coefficient of anti-hourglass mode deformation matrix,  $c_x$  and  $c_y$ , because it does not affect the other FEM formulation. In the early papers dealing with anti-hourglass mode deformation matrix actually describes like this. However, it cannot be a arbitrary value because it affect the result of the analysis. In other words, resultant displacement depends on the stiffness of anti-hourglass mode deformation matrix as well as stiffness matrix. Therefore the coefficient must be evaluated as precise as possible. Unfortunately, there is no perfect method to determine them, which indicates result of analysis is different if we use different mesh division. This is, however, not the problem of the anti-hourglass mode deformation, but all FE formulations have.



Figure 2.7.1. Basic rectangular element

Firstly, we consider a rectangular element shown in Figure 2.7.1. Since  $\{h\}^{T}\{x_n\}=\{h\}^{T}\{y_n\}$  for rectangular element,  $\{\gamma\}=\{h\}$ . Under the nodal displacement  $\{u_n\}$  correspond to hourglass mode deformation, we obtain

 $(\cdot, \cdot)$ 

(2.7.1) 
$$q = \{\gamma\}^{T} \{h\} = \{1 -1 \ 1 -1\} \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{cases} \delta = 4\delta$$

On the other hand, virtual work equation is written as

$$(2.7.2) \quad \{u_n\}\{f^H\} = Q_x q_x$$

where  $\{f^H\}$  denotes equivalent nodal force. It is written in the different form as

(2.7.3) or  $4f\delta = Q \cdot 4\delta$ 

Therefore, f=Q, which is also drawn in Figure 2.7.1.

Looking at the hourglass deformation of rectangular element, it is recognized that the problem is similar to the pure bending problem of a beam. Therefore, here we determine the value of coefficient from the moment-curvature relationships. In other words, the value of c in Q=cq is computed so that Equation

(2.7.4)  $M = EI\kappa$ holes. The following equations hold for bending deformation (2.7.5)  $M = Q \cdot 2b$ 

(2.7.6) 
$$I = \frac{1}{12} (2b)^3 = \frac{2}{3} b^3$$

 $(2.7.7) \qquad \delta = \kappa ba$ 

Substituting these relation into moment-curvature relationships, we obtain

(2.7.8) 
$$Q = \frac{bE}{3a}\delta = \frac{bE}{3a}q \quad \text{or} \quad c = \frac{bE}{12a}$$

where E is a Young's modulus under plane stress problem, and is

(2.7.9) 
$$E = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} = \frac{4\mu(3B + \mu)}{3B + 4\mu}$$

under plane strain problem, where  $\lambda$  and  $\mu$  denotes Lame's constant, and *B* denotes bulk modulus.

Next, we consider an ordinary quadrilateral element. Coefficients *a* and *b* are not easily computed for ordinary element, therefore we define them as an average like value for ordinary quadrilateral element.

The following relation holds in the rectangular element.

(2.7.10) 
$$\{b_x\} = \{-b \ b \ b \ -b\}^{\mathsf{T}}$$
  
(2.7.11)  $\{b_y\} = \{-a \ a \ a \ -a\}^{\mathsf{T}}$ 

Therefore,

(2.7.12)  $\{b_x\}^{\mathsf{T}} \{b_x\} = (2b)^2$ (2.7.13)  $\{b_y\}^{\mathsf{T}} \{b_y\} = (2a)^2$ (2.7.14)  $\{b_y\}^{\mathsf{T}} \{b_x\} = \{b_x\}^{\mathsf{T}} \{b_y\} = 0$ 

This relation is directly used, i.e.,

(2.7.15) 
$$c_x = \frac{bE}{12a} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\{b_x\}^T \{b_x\}}{\{b_y\}^T \{b_y\}}}$$
  
(2.7.16)  $c_y = \frac{aE}{12b} = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\{b_y\}^T \{b_y\}}{\{b_y\}^T \{b_y\}}}$ 

In case of inhomogenious material, we can use different modulus in each direction. It is noted that since there is no volume change under hourglass deformation mode, we need not consider the existence of water. As shown in the previous chapter, we separate the behavior of soil skeleton and water in the formulation even under the undrained condition, therefore the behavior of water need not be considered, but if one use Equation (1.4.21) for the solution of undrained condition, the coefficient is computed using the apparent bulk modulus.

# 2.8 Trigonometric element

First, we consider the element shown in Figure 2.8.1.



Figure 2.8.1. Example for considering trigonometric element

(2.8.1) 
$$\{b_x\}^{\mathsf{T}} = \frac{\{-2b \ 2b \ 2b \ -2b\}^{\mathsf{T}}}{2}$$
  
(2.8.2)  $\{b_y\}^{\mathsf{T}} = \frac{\{-2a \ -\alpha \ 2a \ \alpha\}^{\mathsf{T}}}{2}$ 

Therefore

(2.8.3) 
$$c_x = \frac{E}{12} \sqrt{\frac{\frac{4b^2}{(\alpha^2 + 4a^2)}}{2}}$$

Then, when  $\alpha = 0$ 

$$(2.8.4) \qquad c_x = \frac{E}{12}\sqrt{\frac{2b}{a}}$$

This equation seems to point out that trigonometric element also has rigidity against hourglass mode deformation, which is curious because the stress state at the center of element is sufficient to represent equivalent nodal force. The following investigation, however, shows that this feeling is not correct.

Let consider an trigonometric element such that  $y_3 = y_4$  and  $x_3 = x_4$ , then following equations are obtained from the simple calculation.

- ${h}^{T}{x_n} = x_1 x_2$ (2.8.5) ${h}^{T}{y_{n}} = y_{1} - y_{2}$
- (2.8.6)

Therefore, shape function is expressed as

$$(2.8.7) \qquad \{\gamma\} = \begin{cases} 1\\-1\\1\\-1 \end{cases} - \frac{1}{2A} \left( (x_1 - x_2) \begin{cases} y_2 - y_3\\y_3 - y_1\\y_3 - y_2\\y_1 - y_3 \end{cases} + (y_1 - y_2) \begin{cases} x_2 - x_3\\x_3 - x_1\\x_3 - x_2\\x_1 - x_3 \end{cases} \right)$$

Here, considering that

(2.8.8) 
$$2A = x_1y_2 - x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 - y_1x_2 - y_2x_3$$
obtain

We obtain

$$(2.8.9) \qquad \{\gamma\} = \begin{cases} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{cases}$$

This equation indicate that generalized strain does not produced against hourglass mode deformation.

On the process that the shape of an element moves from quadrilateral to trigonometric, as shown in Figure 2.4, the change of the value of the value  $c_x$  and  $c_y$  is not large. However, at the same time, equivalent nodal force causing the hourglass mode deformation tends to zero, which indicates that hourglass mode deformation has no effect on the overall behavior. It is noted that, in natural, hourglass deformation does not occur at the trigonometric element.

#### References

Flanagan, D.P. and Belytschko, T.A. 1981. A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. J. Num. Methods in Engn. Vol. 17, pp. 679-706.

Yoshida, N. 1989. Large deformation analysis of liquefaction-inuced large ground displacement by reduced integral method, Proc. 3<sup>rd</sup> symp. On Comp. Mechanics, Japan Union for Scientists and Engineers, pp. 391-396.

#### 3 Constitutive models for one-dimensional analysis

# 3.1 Introduction

Among the various nonlinear constitutive models employed in STADS, some models can be used into several element, which is described in this section. They deal with the relation between one generalized stress and one generalized strain, therefore classified to be constitutive models for one-dimensional analysis. They are used for a spring element, beam element, rotational spring element, SH-wave element, and joint element. They are also used some of the solid elements. In the followings, shear stress  $\tau$  and shear strain  $\gamma$  are usually used to represent generalized stress and generalized strain to describe the model.

Constitutive models described in this section have a characteristics schematically shown in Figure Figure 3.1.1. They are composed of two types of curve (or set of piecewise linear line), namely skeleton curve and hysteresis curve. Skeleton curve is a (generalized) stress versus (generalized) strain relationships at virgin loading, and hysteresis curve corresponds to the one after unloading or reloading.

Masing's rule is usually employed to make hysteresis curve from skeleton curve. This rule is described that if skeleton curve is expressed as

$$(3.1.1) \qquad \tau = f(\gamma)$$

then, hysteresis curve unloaded or reload from strain ( $\gamma_R$ ,  $\tau_R$ ), is expressed as

(3.1.2) 
$$\frac{\tau - \tau_{R}}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma_{R}}{2}\right)$$

Frequently another rule is also included; if the state point moves previous hysteresis curve or skeleton curve, then state point moves on the previous curve. Masing's rule in this manual also include these two rules. Practical explanation of this model is described in section 6.12 in Part I.



Figure 3.1.1. Skeleton curve and hysteresis curve

Constitutive models for one dimensional analysis employed in STADAS is classified into three groups:

Fundamental equations are introduced for these models.

- Mathematical equation is used for the expression of skeleton curve and Masing's rule is employed to make hysteresis curve.
- 2) Both skeleton curve and hysteresis curve are determined based on the strain dependent characteristics of shear modulus and damping ratio
- 3) Piecewise linear model.

Fundamental equations are introduced for these models.

### 3.2 Mathematical models

Two mathematical models are available in STADAS, hyperbolic model<sup>1)</sup> and Ramberg osgood model<sup>2)</sup>. Hyperbolic model is sometimes called Hardin-Drnevich model in Japan. Skeleton curves of these models are expressed as

(3.2.1) 
$$\delta = \frac{P}{K} \left( 1 + \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^{r-1} \right)$$
 Ramberg-Osgood model  
(3.2.2)  $P = \frac{K\delta}{1 + \frac{\delta}{\delta_y}}$  Hyperbolic model  
(3.2.3)  $p = K\delta \left( 1 - \left( \frac{\left( \frac{\delta}{\delta_y} \right)^{2B}}{1 + \left( \frac{\delta}{\delta_y} \right)^{2B}} \right)^4 \right)$  Davidenkov model

where *P* denotes generalized stress,  $\delta$  denotes generalized strain, *K* denotes initial stiffness, *P<sub>y</sub>* and  $\delta_y$  denote model parameter usually used for yield (or ultimate) stress and reference strain, respectively, and  $\alpha$  and *r* denotes model parameters. Physical meaning of the model are shown in Figure 3.2.1.

Hysteresis curve is made by applying Masing's rule



# 3.3 Constitutive models improved for arbitrary hysteresis rule

#### 3.3.1 Fundamentals

Nonlinear behavior of soil is frequently described as shear strain dependent characteristics of secant modulus  $G_{eq}$  and equivalent damping ration *h*. Among the various empirical formulae about them, one of the most famous one is the formula derived by Hardin and Drnevich<sup>3</sup>), which is written as

$$(3.3.1) \qquad G_{eq} = \frac{G_{max}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}}$$

$$(3.3.2) \qquad h = h_{max} \left( 1 - \frac{G_{eq}}{G_{max}} \right)$$

where damping ration h is defined schematically shown in Figure 3.3.1.



Figure 3.3.1. Definition of shear modulus and damping ratio

Similar researches have been made, and this equation have been proved to hold at least for first approximation. However, it is impossible to maintain this relationships by the mathematical models or any other models which employ Masing's rule, because actual behavior does not follow Masing's rule. Yoshida et al.<sup>4)</sup> proposed a new rule to make hysteresis curve based on this fact, which is explained here.

They supposed that stress-strain relationship of soil is defined by shear strain dependent shear modulus and damping characteristics. The fundamental rule to make stress-strain relationships are as follows:

- When stress-strain relationships is specified for backbone curve at several strains, skeleton curve is obtained by connecting them by, for example, piecewise linear line or spline curve, with reasonable accuracy at the desired strain range. If, of course, mathematical formulation is sufficient to explain the behavior, it can be used as well.
- 2) Hysteresis curve is obtained by applying Masing's rule. In the skeleton curve, however, is used to make hysteresis curve, damping characteristics does not satisfied. Therefore they used virtual skeleton curve to apply Masing's rule, which is determined to satisfy two conditions<sup>5</sup>. The first one is that virtual curve to be symmetric. Therefore it may not be necessary when hysteresis curve need not be symmetric. The second rule is that damping ratio obtained from the hysteresis curve is to be such that they agree with the specified strain dependent damping characteristics. Since there is two conditions, mathematical model which has more than two parameters.

# 3.3.2 Skeleton curve

All models described in the previous section can be used as skeleton curve. In addion, two skeleton curves are avaiable in order to make the merit of the proposed model usuful.

### (1) Hardin-Drnevich model

Hyperbolic model can be used, in which case proposal by Hardin and Drnevich is perfectly satisfied. The skeleton curve (hyperbolic model) is extended based on the Duncan and Chang.

(3.3.3) 
$$\eta = \frac{\xi}{1 + R_f \xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{R_f}{(1 + R_f \xi)^2}$$

where  $R_f$  is a parameter controling the shear strength.

### (2) Table

When skeleton curve is specified as table, a model that perfectly satisfies a specified condition.

(3.3.4) 
$$\eta = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\xi_i - \xi_{i-1}} (\xi - \xi_{i-1}) + \eta_{i-1}$$

#### 3.3.3 Hysteresis rule

As shown, proposed concept includes wide content. Considering the practical use, we employ three types of models in the program.

As described, mathematical models which have two parameters can be used for virtual skeleton curve. Hyperbolic equation is employed in the program.

$$(3.3.5) T = \frac{a\Gamma}{b+\Gamma}$$

The value of the parameters, *a* and *b* is determined by solving the simultaneous equation. Here,  $T=\tau/\tau_{max}$  and  $\Gamma=\gamma/\gamma_r$  stress ratio and strain ratio. Denominators  $\tau_{max}$  and  $\gamma_r$  are quantities defining skeleton curve. Applying the Masing's rule in Equation (3.3.5), damping ratio is obtained as

(3.3.6) 
$$D = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{2(1+X)}{X^2} \right] (X - \ln(X+1) - 1)$$
(3.1.9)

where  $X=\Gamma/b$ . Therefore, value of *b* can be can be calculated if damping ratio is specified. Then value of *a* can be evaluated by using the condition that histeresis curve passes unload point. It is noted, however, that Equation (3.3.6) gives significant error under small *X* value because of rounded error of the computer. Therefore, using the Tayler series expansion of

(3.3.7) 
$$\ln(X+1) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \frac{X^5}{5}$$

damping ratio at small X is computed from

(3.3.8) 
$$D = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{x}{3} - \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{10} - \frac{2x^4}{5} \right]$$

#### 3.3.4 Extrapolations

When stress-strain and damping characteristics are given by table, we sometimes need to compute the response at which strains are outside the given range. Conventional computer code such as SHAKE and FLUSH assumes constant shear modulus and damping ratio, but it is not realistic as shown in the figure. STADAS prepares the following extrapolation scheme.



### (1) Extrapolation at small strain

It is possible to interpolate between origin and first point, but shear modu at zero shear strain may not be  $G_{max}$ . A hyperbolic equation that passes dimensionless stress and strain at first point with unit shear modulus at zero strain is expressed as

(3.3.9) 
$$\eta = \frac{a\xi}{a+\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a^2}{(a+\xi)^2}$$

where a parameter a can be obtained using the condition that the curve passes first state point ( $\xi_1$ ,  $\eta_1$ ), yielding

(3.3.10) 
$$a = \frac{\xi_1 \eta_1}{\xi_1 - \eta_1}$$

It is noted that when  $\xi_1 = \eta_1$ , interpolation curve yields linear line.

Damping characteristics can also be interpolated as

$$(3.3.11) \quad h - h_{min} = \frac{h_1 \gamma}{\gamma_1}$$

where  $h_{min}$  is a minimum damping ratio.

# (2) Extrapolation at large strains

Four methods can be imagined to extrapolate at large strains where there is no input data. Since there is no data, accuracy cannot be said good, but relavant model seems much natural than SHAKE and FLUSH.

#### 1) Hyerpbolic model with continous tangent

A Condition that the curve has the same tangent at the last point yields

(3.3.12) 
$$\eta = \frac{A\xi}{B+\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{AB}{(B+\xi)^2}$$

Unknown two parameters A and B can be evaluated under two conditions, as

$$(3.3.13) \quad B = \frac{\eta_n}{\xi_n k_n} - \xi_n, \quad A = \frac{\eta_n (B + \xi_n)}{\xi_n} = \frac{\eta_n^2}{\xi_n^2 k_n}, \quad k_n = \frac{\eta_n - \eta_{n-1}}{\xi_n - x_{n-1}}$$

2) Constant shear stress (perfectly plastic behavior)

$$(3.3.14) \quad \eta = \eta_n, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

3) Constant secont modulus (SHAKE type)

(3.3.15) 
$$\eta = \frac{\eta_n}{\xi_n} (\xi - \xi_n) + \eta_n, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta_n}{\xi_n}$$

#### 4) Hyperbolic model with relevant shear strength

Previous three methods did not mind shear strength. A hyperbolic model is frequently used as a whole stress-strain model at which shear strength is evaluated from reference strain. This indicates that asymptote reaches unity seems relavant. In addition, a condition that a hyperbolic model passes the last point yields

(3.3.16) 
$$\eta = \frac{\xi}{A+\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{A}{(A+\xi)^2}$$

The value of A can be evaluated using the condition that stress-strain curve passes last point.

$$(3.3.17) \qquad A = \frac{\zeta_n (1 - \eta_n)}{\eta_n}$$

Damping characteristics are expressed as follows by a Hardin-Drnevich model.

(3.3.18) 
$$h = h_{max}(1 - \frac{G}{G_{max}}) = h_{max}\left(1 - \frac{\eta}{\xi}\right)$$

A fictitoius maximum damping ratio can be evaluaed from the condition that damping is continuous at the largest strain, as

(3.3.19) 
$$h_{max} = \frac{h_n}{1 - \eta_n / \xi_n}$$

# 3.3.5 Model designed for large strain behavior<sup>6)</sup>

Dynamic deformation characteristics are generally computed from the hysteresis loop at 10th cycles of loading ineach constant amplitude loading. Stiffness decreases and damping ratio increases as strain amplitude becomes large. However, when strain incrases very much, hysteresis loop becmes not to stable as shown in Figure 3.3.2; hysteresis loop moves from spindle shape to inverse-S shape and damping ratio decreases. It is obvious that this behavior is caused by excess porewater pressure generation, therefore effective stress analysis should be conducted to express it well. However, it is sometimes required to express it in the total stress analysis. This model is developed for this purpose. Fundamentally, Yoshida model explained above is employed, but additional rule is added.



Figure 3.3.2 Large strain behavior at large strains (Toyoura sand)

As shown in Figure 3.3.2(b), slip region appears at large strains, therefore, hysteresis loop is separated into spindle shape and slip behavior as shown in Figure 3.3.3. Spindle model is fixed to state where damping ratio becomes largest. Shear strength of the slip part is determined so that damping ratio agrees with specified value.



Figure 3.3.3 Separation of hysteresis loop at large strain

Deterioration behavior observed in the test such as Figure 3.3.2 cannot be explained only above modification, because hysteresis loop stabilize. In order to improve this shortage, a new rule is added. In the ordinary situation, when unload occurrs at a certain strain, then state point returns to the same point after an cycle of unload and reloading. However, in the new model, strain where state point comes back from reloading to skeleton curve becomes large. For example, if unload tales place at the strain written 'unload' in Figure 3.3.4, and reload at A and B, then recovering strain increases to A' and B' for reloading, respectively.



Figure 3.3.4 Deterioratin behavior

The movement of the first recovering strain  $\gamma_m$  will be given, as temporarary setting, as

(3.3.20) 
$$\gamma_{\rm m} = \frac{a+\Gamma}{1+\Gamma} \cdot \max(0, \gamma_{\rm c} - \gamma_{\rm d}), \quad \Gamma = \sum \max(0, \gamma_{\rm c} - \gamma_{\rm d})$$

where *a* is a parameter to control shape of the curve and  $\Gamma$  is a cumurative variable considerint the hysteresis. The variable  $\gamma_c$  is change of shear strain when state point moves on the ekeleton curve or a half of strain change when state point moves on the first unload point, and  $\gamma_d$  is a strain at which damping ratio becomes the largest. An example is shown below for small and large strains



Figure 3.3.5 Example of analysis.

# 3.4 Piecewise linear models

Totally eleven models are available in STADAS as piecewise linear models. It is noted that models with pergectly plastic behavior cannot be treated in STADAS.

# (1) Tri-linear elastic model

Skeleton curve is expressed as tri-linear model and there is no hysteresis, or state point moves forth and back on the skeleton curve.



# (2) Bi-linear model

Skeleton curve is expressed by bi-linear model and model follows Masing's rule.

### (3) Tri-linear model

Skeleton curve is expressed by tri-linear model and model follows Masing's rule.



# (4) Bi-linear slip model

Skeleton curve is expressed by bi-linear model in the positive side and slip occurs so that modulus does not exceed second gradient.

### (5) Tri-linear slip model

Skeleton curve is expressed by tri-linear model in positive side and there is no load carrying capacity against negative load. Modulus at unloading is equal to initial stiffness.



### (6) Origin-orientated model

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from skeleton curve, state point moves towards the origin.
- iii) When unloaded at hysteresis curve, the state point go back to the same line.
- iv) After crossing the skeleton curve, the state point moves on the skeleton curve.

### (7) Origin-to-peak orientated model

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from the skeleton curve, the state point moves on the line towards the origin and after passing the origin, it moves towards the previous peak strain point.
- iii) When unloaded at hysteresis curve, the state point goes back to the same line.
- iv) After crossing the skeleton curve, the state point moves on the skeleton curve.



### (8) Peak-to-peak orientated model

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton cuve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from the skeleton curve, the state point moves towards the previous peak strain point.
- iii) When unloaded at hysteresis curve, the state point go back to the same line.
- iv) After crossing the skeleton curve, the state point moves on the skeleton cuve.
- (9) Degrading tri-linear by Fukada<sup>7)</sup>

Hysteresis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) It behaves the same as bi-linear model until peak displacement is smaller than  $\delta_{\nu}$ .
- iii) When unloaded from the skeleton curve after peak strain in either positive side or negative side exceeds  $\delta$ , the gradient of the hysteresia line decrease by the factor  $\alpha$  where
  - $\delta_{y}$ , the gradient of the hysteresis line decrease by the factor  $\alpha$ , where

$$\alpha = \frac{P_1 - P_2}{\delta_1 - \delta_2} \frac{\delta_y}{P_y}$$

$$P_1 = \max(P_{max}, P_y)$$

$$P_2 = \min(P_{min}, -P_y)$$

$$d_1 = \max(d_{max}, d_y)$$

$$d_2 = \min(d_{min}, -d_y)$$

When the change of stress from the unloaded stress exceeds  $2P_c$ , state point changes the direction towards the peak strain reversal point.

iv) When unloaded from the hysteresis line, it behaves as bi-linear model until it passes previous unloaded point or reaches to skeleton line.



(10) Degrading tri-linear by Nomura<sup>8)</sup>

Hysteresis rule are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) When unloaded from the second line of skeleton curve, the gradient of hysteresis line is equal to initial stiffness. After passing the P=0 axis, it changes the direction towards peak strain reversal point (or first kink if strain at first kink is larger than peak strain reversal strain).
- iii) After passing the second kink of the skeleton line, stiffness degrading ration  $\alpha$  changes to

$$\alpha_{+} = \left(\frac{\delta_{y}}{\delta_{\max}}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_{-} = \left(\frac{\delta_{y}}{-\delta_{\min}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Other rules are same as above.

- iv) When unloaded from the hystersis curve, modulus is the same with previous unloading modulus and the other rule is same as above.
- (11) Degrading tri-linear model by Muto<sup>9)</sup>

Hystersis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) Before the unload from  $\delta y$ , rule is the same with origin-orientated model.
- iii) After passing the second kink, modulus at unloading degrate to

$$\alpha = \frac{P_y}{\delta_y} \bigg/ \frac{P_c}{\delta_c}$$

The other rule is same with degrading tri-linear model by Nomura.



(12) Degrading tri-linear モデル (Takeda<sup>10)</sup>)

Hysterssis rules are as follows:

- i) Skeleton curve is expressed by tri-linear model.
- ii) After passing the second kink, modulus at unloading degrate to

$$\alpha = \left(\frac{\delta_y}{\delta_{\max}}\right)^r$$

The value of r is 0.4 in the original paper.

iii) The line directs to the peak unload point at the other side after unload.

The other rule is same with degrading tri-linear model by Nomura.

### References

- Kondner, R. L. (1963): Hyperbolic Stress-strain Response; Cohesive Soils, Proc. ASCE, SM1, pp. 115-143
- 2) Jenning, P. C. (1964): Periodic response of a general yielding structure, Proc. ASCE, Vol. 80, No. EM2, pp.133-166
- Hardin, B. O. and Drnevich, V. P. (1972): Shear modulus and damping in soils: design equations and curves, Proc. of the American Society of civil engineers, Vol. 98, No. SM7, pp. 667-692
- Yoshida, N., Tsujino, S. and Ishihara, K. (1990): Stress-strain model for nonlinear analysis of horizontally layered deposit, Summaries of the Technical Papers of Annual Meeting of AIJ, Vol. B (Structure I), pp. 1639-1640

- 5) Ishihara, K., Yoshida, N. and Tsujino, S. (1985): Modelling of stress-strain relations of soils in cycloc loading, Proc. 5th Int. Conf. for Numerical Method in Geomechanics, Nagoya, pp.373-380
- <sup>6</sup>) Yoshida, N., Kiku, H. and Suetomi, I. (1998): Earthquake response analysis under very severe earthquake, Proc. 2nd International Symposium on the Effect of Surface Geology on Seismic Motion, Yokosuka, Japan, Vol. 2, pp. 757-764
- 7) Fukada, Y. (1969): Study on reftorning-force characteristics of reingforced concrete building, Part 1 Degrading stiffness tri-linear model and response analysis, Abstract of the 40th anual meeting of Kanto Branch of AIJ, pp.57-62
- <sup>8</sup>) Nomura, S. and Sato, K. (1976): Effect of modeling on the earthquake respons of reinforced concrete, Part 1, Summaries of the Technical Papers of Annual Meeting of AIJ (1976), pp.1273-1274
- 9) Muto, K. (1977): Earthquake resistant design series, Application volume, dynamic design of structures, Maruzen, pp.173-174
- 10) Takeda, T., Sozen, M. A., and Nielsen, N. N. (1970): Reinforced concrete response to simulated earthquakes, J. of Structural Division, Proc. ASCE, Vol. 96, No. ST12, pp. 2557-2573

#### 4 Spring

Since constitutive models for spring element is described in section 3, only property of element is described.

#### 4.1 Positive direction of spring element

Spring element is an element generating a force if relative displacement (or velocity) occurred between nodes. When the coordinate of the elements are different, the relative movement can be separated into axial displacement and displacement perpendicular to axis (shear deformation). By defining suitable direction cosine, these behavior can be described in the same manner. Here direction cosine means the orthogonal projection of the unit positive relative displacement into each coordinate direction.

Direction cosine vector  $\{\ell_x \ \ell_y\}^T$  for two dimensional analysis is defined, referring to the following figure, as

(4.1.1)  $\{\ell_x \ \ell_y\}^T = \{\cos\theta \ \sin\theta\}^T$ 

Tension is positive in this case. If negative sign is used for direction cosine, compression becomes positive. On the other direction cosine is expresses for the shear sping as

(4.1.2)  $\{\ell_x \quad \ell_y\}^r = \{\sin\theta \quad -\cos\theta\}^r$ 

It is positive when node 2 moves toward left.



Figure 4.1.1. Schematic figure of spring element

Rotational spring works rotation around the coordinate axis. Rotation around z-axis is used in two dimensional analysis and that around x-, y- and z-axis are used in three dimension analysis.

#### 4.2 Constitutive equation

Spring constant (or viscous coefficient) is denoted by k, then generalized force F versus generalized strain u relationship is expressed as

(4.2.1) F=ku

# 4.3 Coordinate transformation matrix (B matrix)

Referring Figure 4.1.1, generalized strain u is obtained as

$$(4.3.1) u = u_2 - u_1 = \{-1 \ 1\} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

Let's denote direction cosine vector as  $\{T\}$ ,

(4.3.2) 
$$\{T\} = \begin{cases} \{1\} & \text{one dimensional} \\ \{\ell_x & \ell_y\} & \text{two dimensiona} \\ \{\ell_x & \ell_x & \ell_z\} & \text{three dimensiona} \end{cases}$$

Then nodal displacement is expressed in the 3-dimensional case, for example, as

$$(4.3.3) u_1 = \{T\}\{u_1\} = \{T\}\{u_{y_1}\}, u_2 = \{T\}\{u_2\} = \{T\}\{u_{y_2}\} = \{T\}\{$$

Equation (4.3.3) is rewritten as

(4.3.4) 
$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} = \{T\} \{u^n\} = \begin{bmatrix} \{T\} & \{0\} \\ \{0\} & \{T\} \end{bmatrix} \{u_1\} \\ \{0\} & \{T\} \end{bmatrix} \{u_2\}$$

Therefore, B matrix is computed as (4.3.5)  $[B] = \{-1 \ 1\}[T] = \{-\{T\} \ \{T\}\}\}$ 

## 4.4 Element stiffness matrix

Since  $\{T\}$  is a direction cosine vector,

$$(4.4.1) \qquad \{T\}\{T\}^{\mathrm{T}} = 1$$

Therefore

 $(4.4.2) \qquad \{B\}\{B\}^{\mathrm{T}} = 2$ 

On the other hand, definition of B matrix,  $\{B\}$ , it has characteristics such that

(4.4.3)  $u = \{B\}\{u_n\}$ (4.4.4)  $\{F_n\} = \{B\}^T F$ 

From these equations, nodal force versus nodal displacement relationships in the global coordinate system yields

 $(4.4.5) \qquad \{F_n\} = \{B\}^{\mathsf{T}} k\{B\}\{u_n\}$ 

It indicate that element stiffness matrix [k] is expressed as (4.4.6)  $[k] = \{B\}^T k \{B\}$ 

### 4.5 Constitutive model

See chapter 3 for constitutive model for spring.

#### 4.6 Connection to free field

One end of spring and dashpot may be connected to free field. If size of free field is finite, then the behavior of analyzed region affects the behavior of free field. In order to aviod it, size of free field should be sufficiently large. This is, of cource, possible in STADAS, but numerical error may occur when size is too large.

STADAS prepares another solution on this problem. Let assume that stress-strain curve of spring is expressed as

(4.6.1) 
$$\begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

and the first node is fixed to the free field. Then force will appear at second node, but not at the first node. This relation is written as

$$(4.6.2) \qquad \begin{cases} F_1 \\ F_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases}$$

Therefore stiffness matrix is unsymmetric.

### 5 Beam

### 5.1 Introduction

Beam element is formulated based on the small deformation theory and

- 1) Cross-sectional shape does not change.
- 2) Plane section holds plane after deformation.
- 3) There is no intermediate load.

Relationships between quantities in global coordinate and local coordinate are expressed as

- (5.1.1)  $\{F\} = [T]\{F_g\}$
- (5.1.2)  $\{u\} = [T]\{u_n\}$
- (5.1.3)  $\{K_g\} = [T]^{\mathsf{T}} [K] [T]$

where  $\{F_g\}$ ,  $\{u_n\}$  and  $[K_g]$  are nodal force, displacement and stiffness matrix in global coordinate, respectively,  $\{F\}$ ,  $\{u\}$  and [K] are those in local coordinate system and [T] denotes coordinate transformation matrix.



Figure 5.1.1. Coordinate system and positive direction

### 5.2 2-dimensioal analysis

Referring to Figure 5.1.1, various quantities are expressed in the two dimensional analysis as

$$(5.2.1) \quad \{F\} = \begin{cases} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{cases}, \quad \{u\} = \begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{cases}, \quad \{F_g\} = \begin{cases} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x1} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{cases}, \quad \{u_n\} = \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ \theta_1 \\ x_2 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{cases}$$

*u*: axial elongation

v: displacement perpendicular to longitudinal axis

*x*, *y*: displacement in *x*- and *y*-axis direction

 $\theta$ : Rotation

$$(5.2.2) \quad \begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{e} \\ [0] \\ [0] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$(5.2.3) \quad \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \end{bmatrix}$$

where

N: Axial force (positive when tension)

Q: Shear force

M: Bending moment

*E*: Young's modulus

G: Shear modulus

A: Cross-sectional area

 $A_s$ : Effective area against shear deformation

*I*: Second moment of inertia

 $\ell$ : Length

$$\phi = \frac{12EI}{GA_s\ell^2}$$

5.3 Three dimensional analysis

For the simplicity of expression, we focus on one node only, then various quantities are expressed as  $\begin{pmatrix} N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \end{pmatrix}$ 

$$\{F\} = \begin{cases} N_{1} \\ Q_{s1} \\ Q_{s2} \\ T \\ M_{s1} \\ M_{s2} \end{cases}, \quad \{F\} = \begin{cases} F_{x} \\ F_{y} \\ F_{z} \\ M_{x} \\ M_{y} \\ M_{z} \end{cases}$$
$$\begin{bmatrix} T \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{1} & 0 \\ 0 & T_{1} \end{bmatrix}, \quad [T_{1}] = \text{full matrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(4+\phi_z)EI}{\ell(1+\phi_z)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & \frac{(2-\phi_z)EI}{\ell(1+\phi_z)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} EA_{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell(1+\phi_z)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2+\phi_y)EI_z}{\ell(1+\phi_y)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

In addition to the conversion based on direction cosine, conversion based on  $\beta$  angle, which is the angle between principal axis of local y-axis to the global y-axis, is necessary, which is not discussed here. In the two diensional analysis,  $\beta=0$ .

#### 5.4 Nonlinear behavior

Unlike the ordinary FEM element, generalized stress (axial force, bending moment and shear force) are not independent; therefore, consideration is necessary to consider nonlinear behavior. STADAS prepares several options.

If elastic-perfectly plastic behavior is assumed, nonlinear behavior occurs only at the bar ends; plastic hinge at both ends can consider the ehavior. Simple plastic hinge theory and plastic hinge based on flow

rule <sup>1)</sup> known in these hinges. However, perfectly plastic bahavior is not practical modeling and equiation is not so simple. A little simpler formulation is shown here.

#### 5.4.1 Separation of bending moment and shear force

Stiffness matrix of the beam elemant is already shown in the previous sections. It is clear that axial force and other two generalized force can be separately discussed, except the moment-axial force interaction behavior for nonlinear analysis that will be discussed later.

Stress-strain behavior for beinding and sear is written as follows:

$$(5.4.1) \qquad \begin{cases} Q_{1} \\ M_{1} \\ Q_{2} \\ M_{2} \end{cases} = [K] \begin{cases} v_{1} \\ \theta_{1} \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} K \end{bmatrix} \begin{cases} v_{1} \\ \theta_{1} \\ v_{2} \\ \theta_{2} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & -\frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{12EI}{\ell^{3}(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^{2}(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix} \end{cases}$$

Q: Shear force

M: Bending moment

E: Young's modulus

G: Shear modulus

A: Cross-sectional area

 $A_s$ : Effective area for shear deformation

*I*: Moment of inertia

*ℓ*: Length

$$\phi = \frac{12EI}{GA \ \ell^2}$$

v: Displacement perpendicular to bar axis

 $\theta$ : Rotational angle of one node relative to another.

A stiffness matric [K] is divided into two parts as

$$(5.4.2) \quad [K] = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} + \frac{12EI}{\ell^2(1+\phi)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \end{bmatrix}$$

where first term of the right hand side corresponds to the deformation by equi-mement shown in Figure 5.4.1 (a), and second term corresponds to the inverse moment shown in Figure 5.4.1 (b). The second term can be called deformation by shear. In order to show more clear, the coefficient is replaced by  $\phi$  shown above.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Yoshida, N. and Nonaka, T. (2001): Hysteretic behavior of a bar under repeated axial loading: an extended history, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASTM, Vol. 68, No. 3, pp. 425-431



Figure 5.4.1 Separation of bending moment from shear deformation

$$(5.4.3) \quad [K] = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & 0 & \frac{1}{\ell} \end{bmatrix} + \frac{GA_s\phi}{1+\phi} \begin{vmatrix} \frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\ell} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \\ -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\ell} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{\ell}{4} \end{vmatrix}$$

Therefore, each generalized stress can be written as

n

(5.4.4) 
$$M_{e} = EI\kappa = EI\frac{\theta_{1} - \theta_{2}}{\ell}$$
$$Q = GA_{s} \cdot \frac{\phi}{1 + \phi} \left\{ \frac{u_{1} - u_{2}}{\ell} + \frac{\theta_{1} + \theta_{2}}{2} \right\}$$
$$M_{r} = Q\ell$$

where  $\kappa$  is an average curvature. The first term of shear stress is displacement in the direction perpendicular to the bar axis, and the second term represents rotaion of the bar. Deformation by bending moment and shear force is thus separated. It is noted that when shear deformation is not onsidered, i.e.,  $A_s = \infty$ , then  $\phi = 0$ ; therefore, shear force cannot be obtained from above equation. Back to the original equaiton the following equation is obtained in this case.

(5.4.5) 
$$GA_s \cdot \frac{\phi}{1+\phi} = \frac{12EI}{\ell^2(1+\phi)}$$
 i.e.,  $Q = \frac{12EI}{\ell^2} \left\{ \frac{u_1 - u_2}{\ell} + \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right\}$ 

It is also noted that bending deformation is included in Eq. (5.4.5) as can be seen in Figure 5.4.1. In other word, shear deformation described above is displacement in the direction perpendicular to the bar axis. This is one method, but another consideration is also possible.

Under the pure sehar component, stress-strain relationship is written as

$$(5.4.6) \qquad Q = GA_s \cdot \frac{u_1 - u_2}{\ell}$$

STADAS considers nonlinear behavior based on this equation. Then, at the same time, bending deformation includes displacement perpendicular to the bar axis.

#### 5.4.2 One point representative method

First, let assume that nonlinear occurs along the bar isotropically; stiffness can be represented by the stiffness at the bar center. Then, average curvature  $\kappa$  is obtained as

(5.4.7) 
$$\kappa = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ell}$$

For simplicity of the discussion, nonlinear behavior can be expressed by a piecewise linear line shown in Figure 5.4.2. Here, point A is a stete at the begining of incremental analysis, and  $M_t$  is stress increment. Then point B is external force increment whereas point C is internal stress point; unbalanced force yields Mu.



Figure 5.4.2 Unbalanced force



Figure 5.4.3 Distrib tion of the unbalanced force

In the actual calcualtion, if bending moment at both ends are  $M_A$  and  $M_B$ , then bending moment at the bar center  $M_C$  yields

(5.4.8) 
$$M_C = \frac{M_A + M_B}{2} = EI\kappa = M_u + M_R$$

This moment is uqivalent to the moment obtained as a product of bending stiffness to the average curvature. Referring Figure 5.4.2, it is a sum of unbalanced moment  $M_u$  and residual moment  $M_R$ .

Among these two components, unbalanced moment  $M_u$ should be redistributed. Residual component at both ends is assumed to be the external bending moment subtracted by unbalanced moment, i.e.,

$$5.4.9) \qquad \begin{array}{c} M_{AR} = M_A - M_u \\ M_{BR} = M_B - M_u \end{array}$$

Then unbalanced moment  $M_u$  is applied at both ends as unbalanced force. This process is shown in Figure 5.4.3.

This method has following characteristics.

- 1)Since intermediate load is not considered, bending moment becomes maximum value at one of the bar ends. On the other hand, nonlinear behavior is evaluated at the bar center, therefore error occurrs on the nonlinear behavior.
- 2)Under the inverse moment, average curvature is 0; therefore, nonlinear behavior never occur. Therefore, if one models a column or a beam as single menent, too much error wille be caused. Length of the bar should be taken as small as possibl.
- 3)As shown in Figure 5.4.3, unbalanced force is a self-equilibrium system, therefore nonlinear behavior of bending moment does not affect the shear deformation. A separate treatment is possible.

Bending moment at the bar center will not be output in STADAS; all the output are made at both ends.

Therefore, the user needs to compute the behavior at the bar center from the behavior at oth ends. They are calculated from

(5.4.10)  $M_c = (M_2 - M_1)/2, \quad \kappa_c = (\kappa_2 - \kappa_1)/2$ 

It is noted equations above do not indicate subtract, but average (sum) because negative ending is taken posirive at the first node.

建築構造物では、上部構造を一本のはり要素にモデル化する事がある。この場合には、二つの 端部の内、下方の方がモーメントの値は大きくなるのが普通である。この場合には、非線形挙動を 代表させる断面を部材中央に設定するのではなく、危険断面に設定することで、降伏モーメント を正しく評価することは可能になる。すなわち、二つの部材端の内、一方の挙動で部材の非線形性 を代表させるのである。この場合には、曲率の求め方は次項で示すものを使うことになるが、その 他の方法はこれまでの扱いと同じである。

### 5.4.3 仮想曲率を用い両端の非線形を考慮する方法

前項で述べた方法は、一断面の挙動で部材の非線形性を代表させた。このため、非線形を考慮 に際し式が扱いやすくなっていた。しかし、両部材端のどちらが危険断面になるか分からないと いうケースは一般的であろう。また、平均曲率を用いる方法では、逆モーメントが作用するときに は材長を短くとらないといけないという実用上の欠点もある。

これらの欠点を解消するには、両部材端で非線形挙動を考慮すればよい。しかし、この場合には、曲率は平均曲率の様には単純には求まらない。その解決として、事項に示す塑性ヒンジ法による方法もあるが、ここではもう少し簡単な方法を考える。

前述の Figure 5.4.4 Unbalanced force と同じ状況を考える。すなわち、Aが増分前の状態で、 線形増分を仮定した増分計算ではB点が解として得られているとする。

前項の方法では,非線形解析に適用すべき曲率 *k*<sub>1</sub>として平均曲率を式(5.4.7)で求めたわけで ある。しかし,両材端で独立に非線形を考慮するとなると,このような外的な変形から必要な曲率 を求めることは出来ない。そこで,次のように考える。

A 点における接線剛性に増分外力を与えると、状態点は B に移行する。このとき、モーメント 増分ΔM に対応する曲率増分はΔκである。つまり外的に与えられたモーメント増分から曲率増分 を求めることが出来るわけである。この曲率が物理的に何を表しているのかは明瞭ではないが、 弾塑性変形が可能な材端部付近の有限長を代表する塑性ヒンジの曲率と考えてよいと考えられる。



Figure 5.4.4 Unbalanced force

この考えを両材端に適用することで、両端の非線形を考慮することが出来る。このときの残 留モーメントと不釣合力の関係を模式的に Figure 5.4.5 Distribution of unbalanced force.(a)に示す。 ここでは、前項と異なり、左右の不釣合モーメントが異なるので、不釣合力の配分には注意が必 要である。すなわち Figure 5.4.5 Distribution of unbalanced force.に示すように両端の不釣り合い力 を等モーメントと逆モーメント成分に分割する。等モーメント成分については前項と同様そのま ま作用させる。しかし, 逆モーメント成分ではそれだけでは自己釣合系にはならないので, 対応するせん断応力 *Q*<sub>u</sub>も作用させる必要がある。



Figure 5.4.5 Distribution of unbalanced force.

これまでに示したのは、不釣合力の考慮方法であり、剛性マトリックスの作成方法について は述べていない。単純化するために、両端で求められた接線剛性の平均を部材の剛性として用い ることにする。

### 5.4.4 せん断に関する非線形

せん断に関する非線形の扱いは,他の非線形と変わることはない。しかし,せん断応力に対す る不釣合力は部材に偶力を発生させるので,自己釣合系とするためにこれに釣り合うモーメント も作用させる必要がある。モーメントは1端と2端で持てばよいので,STADASでは両方で同じ値を 不釣合力として持つようにしている。

#### 5.4.5 曲げと軸力の相互作用

次項で述べる塑性ヒンジ法では,曲げと軸力の相互作用は自然に考慮されている。しかし,園 で述べるが,降伏局面と硬化則を実用に使うのと同じ要領で定義することは困難そうである。そ こで,ここではもう少し簡単な方法を検討する。

簡単のために, Tri-linear 型のモーメントー曲率関係を考える。ここで, Figure 5.4.6 Move of sleketon curve associated with the change of axial force に示すように, 第二折れ点が終局状態, 第一折れ点は図では降伏状態に対応しているとしている。ただし, 第一折れ点は条件の与え方によってはひび割れ状態に対応させる等の設定も可能である。これらは入力データでコントロールする事になる。



Figure 5.4.6 Move of sleketon curve associated with the change of axial force

今,軸力が N<sub>a</sub>の状態から Nb の状態に移行したとする。軸力 N<sub>a</sub>の本では折れ点の座標は B, C である。ここで,第二線分と第三線分の勾配は初期剛性に対する比で与えられており,軸力の大き さによって変わらないものとする。すると,新しい軸力下では第一折れ点の位置 D は初期剛性と 第一折れ点は初期剛性とモーメントより決まる。線分 DE は BC と平行であり, E 点のモーメント は終局モーメントの値から決めることが出来る。すなわち,軸力変動下における骨格曲線を決め ることが出来る。

なお,軸力の値によっては第一折れ点が定義できないが,その場合には,tri-linear モデルの第 三勾配を第二勾配とする bi-linear モデルを用いることにする。

次に,除荷,再載荷時の挙動を考える。簡単のため Figure 5.4.7 Trace of hysteresis curve under variable axial force に示すように,軸力が  $N_a$ の下で $0 \rightarrow A \rightarrow B$  とひずみが変化し,その後軸力が Nb に変化すると同時に曲率増分 $\Delta \kappa$ が発生した時を考える。

例えば、最大点志向モデルのような特定のモデルを用いるのであれば、軸力変動を考慮する ことは余り難しくない。すなわち、B点から新しい骨格曲線によって定義される最大点を向かう直 線式を作ればよい。しかし、STADASでは多様なモデルを用いることが出来、そのそれぞれに対し て別の法則を考えることは大変な作業となる。また、例で示した最大点志向モデルでも、終局モー メント付近の状態から軸力が増加すると志向点のモーメントが現在のモーメントより小さくなり、 勾配が負になる等の問題も発生する可能性がある。

これらの困難を避けるために、STADASでは、次のような履歴法則を用いる。すなわち、新しい軸力 N<sub>b</sub>の下で、これまでと同じ曲率履歴をたどったとするわけである。すると、新しい軸力 Nbの下では状態 B に相当する状態は D である。これに対して曲率変動を与えれば、新しい状態点 E がえられる。従って、この増分により状態点は B から E に移行するわけである。

この履歴法則を用いると、これまでの除荷点を記憶しておく必要があり、メモリーサイズが 多く必要となるが、代わりに安定して履歴が終えるという特徴がある。



Figure 5.4.7 Trace of hysteresis curve under variable axial force

### 5.4.5.1 塑性ヒンジ法による解析

最大モーメントが端部にしか発生しないということを考えると、この点で塑性ヒンジが発生 すると考える解析が可能である。ただし、塑性ヒンジは、完全弾塑性下の条件で適用するのであれ ば、物理的な整合性はあるが、ひずみ硬化を考慮するとすれば、塑性域は材端のみならず、材中央 部にも及ぶので、物理的な整合性があるとはいえない。しかし、この場合でも、単なる仮定として 塑性化は材端部にしか発生しないと仮定することで、計算を続けることは出きる。

塑性ヒンジを使う理論には、塑性流れ則を考慮した弾塑性論として厳密な塑性ヒンジ理論と、 流れ則を考慮しない単純塑性ヒンジ理論がある。前者は、軸力の存在により曲げに伴って中立軸 が重心軸よりずれることによる重心軸における軸方向の伸縮を考慮したものであり、繰返し履歴 を扱う際には重要な挙動を示すことがある。

実務では、軸力変動による影響を考慮する、モーメントー曲率関係の非線形を Tri-linear にモ デル化するなど、モーメントー曲率関係は単純なモデル化も行われる。すると、弾塑性論に基づく 降伏局面の変化は相当に複雑なものとなる。従って、ここでは、単純塑性理論を用いることにする。



Figure 5.4.8 Separation of deformaion by plastic hinge

材端に塑性ヒンジが発生したとすると, Figure 5.4.8 Separation of deformation by plastic hinge(a)に示したように, 塑性ヒンジ部では曲率とはヒンジの回転角である。そこで, 部材を Figure 5.4.8 Separation of deformation by plastic hinge(b)に示すように材端部と中央部の三つに分ける。図では材端部は有限長の長さで書かれているが, 実際には材端部には長さはない。

各三つの部分の釣合式はそれぞれ次のようになる。ここで, ヒンジ部ではせん断変形は発生 しないとする。なお,各節点については添え字 A, B, 1,2をつけて位置が分かるようにする。また, ここでは,軸力の効果は考えないので,式の展開からは除くことにする。

左のヒンジ $M_A = K_A(\theta_A - \theta_1)$ 

中央部 
$$\begin{bmatrix} Q_A \\ M_A \\ Q_B \\ M_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell^2(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_3 & -C_1 & C_3 \\ C_3 & C_2 & -C_3 & C_4 \\ -C_1 & -C_3 & C_1 & -C_3 \\ C_3 & C_4 & -C_3 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A \\ \theta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

右のヒンジ $M_B = K_B(\theta_2 - \theta_B)$ 

これより, 節点1,2の変数であるのとのを消去すれば剛性関係が得られる。 計算のため書き下すと次のようになる。

$$\begin{split} \theta_{1} &= -\frac{M_{A}}{K_{A}} + \theta_{A} \\ Q_{A} &= C_{1}y_{A} + C_{3}\theta_{1} - C_{1}y_{B} + C_{3}\theta_{2} \\ M_{A} &= C_{3}y_{A} + C_{2}\theta_{1} - C_{3}y_{B} + C_{4}\theta_{2} \\ Q_{B} &= -C_{1}y_{A} - C_{3}\theta_{1} + C_{1}y_{B} - C_{3}\theta_{2} \\ M_{B} &= C_{3}y_{A} + C_{4}\theta_{1} - C_{3}y_{B} + C_{2}\theta_{2} \\ \theta_{2} &= \frac{M_{B}}{K_{B}} + \theta_{B} \end{split}$$

ここで、 θ」と θを中央の式に代入し、 整理すると次式を得る。

$$Q_{A} + \frac{C_{3}}{K_{A}}M_{A} - \frac{C_{3}}{K_{B}}M_{B} = C_{1}y_{A} + C_{3}\theta_{A} - C_{1}y_{B} + C_{3}\theta_{B}$$

$$(1 + \frac{C_{2}}{K_{A}})M_{A} - \frac{C_{4}}{K_{B}}M_{B} = C_{3}y_{A} + C_{2}\theta_{A} - C_{3}y_{B} + C_{4}\theta_{B}$$

$$Q_{B} - \frac{C_{3}}{K_{A}}M_{A} + \frac{C_{3}}{K_{B}}M_{B} = -C_{1}y_{A} - C_{3}\theta_{A} + C_{1}y_{B} - C_{3}\theta_{B}$$

$$\frac{C_{4}}{K_{A}}M_{A} + (1 - \frac{C_{2}}{K_{B}})M_{B} = C_{3}y_{A} + C_{4}\theta_{A} - C_{3}y_{B} + C_{2}\theta_{B}$$

このうち、せん断応力を含まない二つの項から M<sub>A</sub>, M<sub>B</sub>を求めることが出来る。

$$\begin{cases} 1 - \frac{C_2}{K_B} + \frac{C_2}{K_A} + \frac{C_4^2 - C_2^2}{K_A K_B} \end{cases} M_A = \begin{cases} 1 + \frac{C_4 - C_2}{K_B} \end{cases} C_3 y_A \\ + \begin{cases} C_2 - \frac{C_2^2}{K_B} + \frac{C_4^2}{K_B} \end{cases} \theta_A - \begin{cases} 1 - \frac{C_4 - C_2}{K_B} \end{cases} C_3 y_B + C_4 \theta_B \\ \begin{cases} 1 - \frac{C_2}{K_B} + \frac{C_2}{K_A} + \frac{C_4^2 - C_2^2}{K_A K_B} \end{cases} M_B = \begin{cases} 1 + \frac{C_2 - C_4}{K_A} \end{cases} C_3 y_A \\ + C_4 \theta_A - \begin{cases} 1 + \frac{C_2}{K_A} - \frac{C_4}{K_A} \end{cases} C_3 y_B + \begin{cases} C_2 - \frac{C_4^2}{K_A} + \frac{C_2^2}{K_A} \end{cases} \theta_B \end{cases}$$

次に,これをせん断応力を含む項に代入することによって,せん断応力も変形の関数として 求めることが出来る。(式は省略)

ここで, 塑性ヒンジの回転は弾性変形時には発生しないので, 剛性 *K*<sub>A</sub>, *K*<sub>B</sub> は弾性変形時には 剛性が無限大である。すなわち, このモデルでは, 弾性変形は材中央部で吸収し, 塑性ヒンジでは 塑性変形のみが発生する。従って, 得られた式のチェックも簡単で, 弾性時には *K*<sub>A</sub>, *K*<sub>B</sub>を無限大と おくことで, 弾性の式に帰結することが分かる。

塑性ヒンジに要求されるモーメントー曲率関係は、与えられた式から弾性変形分を除いたものである。しかし、無限大を扱うモデルは扱いにくいことから、STADASの現バージョンではこの方法は採用していない。

# 5.4.5.2 剛域の考慮

下図のように両端に剛域を持つモデルを考える。これを一つの系と考えると、剛性関係は次のように書くことが出来る。



Figure 5.4.9 Bar with rigid area

$$\begin{cases} F_{l} \\ F_{k} \\ F$$

												ſ	0 (	0	0	0		0	0	0 0	0	0	0	]				
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$										1	0 (	0	0	0		0	0	0 0	0	0	0							
											1	) (	0	0 E 4	0		0	0	0 0	0 <i>F 4</i>	0	0	Г	0	0	0 0	0	
											1	0 (	0	$\frac{LA}{\ell}$	0		0	0	0 0	$-\frac{LA}{\ell}$	0	0	0	1	0	0 0	0	
	Г	1 (	) ()	1	0		0 (	) 0	0	0	0	07	0 (	0	0	$\frac{12EI}{\ell^3(1+)}$	$\frac{1}{\phi}$	$\frac{6EI}{\ell^2\left(1+\phi\right)}$	0	0 0	0	$-\frac{12EI}{\ell^3\left(1+\phi\right)}$	$\frac{6EI}{\ell^2 \left(1+\phi\right)}$	0	0 0	1	0 0 0	0
		0 1	0	0	1 l		0 (	) 0	0 0	0	0	0	0 (	0	0	$\frac{6EI}{\ell^2(1+)}$	$\overline{\phi}$	$\frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)}$	0	0 0	0	$-\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)}$	$\frac{(2-\phi) EI}{\ell(1+\phi)}$	0	1 0	$\ell_1$ 1	0 0 0	0
[K	]=	0 (	0	0	0	, i	0 1	0	0	1	0	0	0 (	0	0	0	. ,	0	0	0 0	0	0	0	0	0	0	1 0	0
		0 (	) (	0	0	) (	0 (	) 1	0	0	1	0	0 (	0	0	0		0	0	0 0	0	0	0	0	0	0	0 1	0
	L	0 (	) ()	0	0		0 (	) 0	1	0	$-l_2$	1	0 (	0	0	0		0	0	0 0	0	0	0	0	0	0	0 0	1
													0 (	0	$-\frac{EA}{\ell}$	0		0	0	0 0	$\frac{EA}{\ell}$	0	0	0	0	0	1 0 0 1	$-l_2$
													0 (	0	0	$-\frac{12E}{\ell^{3}(1+1)}$	$\frac{T}{\phi}$	$-\frac{6EI}{\ell^2\left(1+\phi\right)}$	0	0 0	0	$\frac{12EI}{\ell^3\left(1+\phi\right)}$	$-\frac{6EI}{\ell^2\left(1+\phi\right)}$	Lo	0	0	0 0	1
													0 (	0	0	$\frac{6EI}{\ell^2(1+)}$	$\phi)$	$\frac{\left(2-\phi\right)EI}{\ell\left(1+\phi\right)}$	0	0 0	0	$-\frac{6EI}{\ell^2\left(1+\phi\right)}$	$\frac{\left(4+\phi\right)EI}{\ell\left(1+\phi\right)}$					
												_	Г	0		0		0			0	0			0			1
													+	0		0		0			0	0			0			
													0		0		0			0	0			0				
													-	$\frac{EA}{\ell}$		0		0			$-\frac{EA}{\ell}$	0			0			
													-	0	12	2EI	12	$EEI\ell_1$	6 <i>E</i> .	I	0	12 <i>EI</i>	12 <i>EI</i>	$\ell_2$		6 <i>E</i>	Ί	
[	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	$\ell^3$	$1+\phi$	$\ell^3$ (	$(1+\phi)^+ \overline{\ell}$	<sup>2</sup> (1 +	- ø)	0	$-\frac{1}{\ell^3(1+q)}$	$\overline{\phi}$ $\overline{\ell^3(1+)}$	- <i>ø</i> )	$+\frac{1}{\ell}$	<sup>2</sup> (1 ·	$+\phi$	
	0	1 0 0 1		0	1	0	0 0 1	0	0	0	0	0		0	$\frac{6}{\ell^2}$	EI	$\frac{61}{\ell^2}$	$\frac{EI\ell_1}{1+d} + \frac{4}{d}$	$\frac{1+\phi}{\phi}$	$\frac{EI}{4}$	0	$-\frac{6EI}{\ell^2(1+1)}$	$\frac{6EI}{\ell^2(1+1)}$	$\frac{1}{2}$	+ (2	$\frac{2-\phi}{\ell(1-\phi)}$	$\frac{1}{2} EI$	
=	0			0	$\ell_1$	1		0	00	0	0	0		0	ε (	$(1 + \varphi)$	ľ (	$(1+\varphi)$	(1+	φ)	0	ε (1+q	φ) ℓ (I+	φ)	0	:(14	•φ)	
	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	0		0		0		0			0	0			0			
	0	0	0	0	0	0	0	0	) 1	) ()		1		0		0		0			0	0			0			
l	-	0	0	0	Ŭ		0	0		U	<i>i</i> <sub>2</sub>	1		EA		0		0			EA	0			0			
													-	l		0		0			$\ell$	0			0			
													$\begin{array}{ c c c c c } 0 & -\frac{12EI}{\ell^3 (1+\phi)} & -\frac{1}{2} \\ & 6EI \end{array}$			$\frac{2EI}{(1+\phi)}$	$\frac{12EI\ell_1}{\phi} - \frac{12EI\ell_1}{\ell^3(1+\phi)} - \frac{1}{\ell^2}$			$\frac{6EI}{\ell^2 (1+\phi)} = 0$		$\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} = -\frac{12}{\ell^3(1+\phi)}$		$\frac{EI\ell_2}{(1+\phi)} - \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)}$				-
																6	$6EI\ell$ , $(2-\phi)EI$				6EI	$6EI\ell \qquad (4+\phi)I$						
	_													0	$\frac{1}{\ell^2}$	$\frac{l}{l+\phi}$	$\frac{\ell^2}{\ell^2}$	$\left(\frac{1+\phi}{1+\phi}\right) + \frac{1}{\phi}$	l (1+	$\frac{\phi}{\phi}$	0	$-\frac{\partial \Omega}{\ell^2 \left(1+q\right)}$	$(\phi) = \frac{\partial \ln \phi}{\ell^2 (1 + \phi)}$	$\frac{2}{\phi}$	+	$\ell(1 +$	$(\phi)$	
	[ ]	EA l	0												0		_	$\frac{EA}{\ell}$			0			0				
		~		$\frac{12EI}{\ell^3\left(1+\phi\right)}$				12 <i>EI</i>				12.		2	e	5EI		0		1	2EI		$12EI\ell$ ,		ł	6EI		1
$= \begin{vmatrix} 0\\0\\-\frac{EA}{\ell}\\0\\0\\0 \end{vmatrix}$		0							$\ell^3$	1 +	$\phi$	$+\frac{1}{\ell^2}$	$1+\phi$		0	$-\frac{1}{\ell^3}$		$(1 + \phi)$	)	$\frac{1}{\ell^3 \left(1+\phi\right)}$	$\frac{1}{\ell} + \frac{\partial \Omega}{\ell^2 \left(1 + \phi\right)}$			$\phi)$				
		0	-	$\frac{12EI\ell_1}{\ell^3(1+\phi)} + \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)}$						$\frac{6EI\ell_1}{\ell^2(1+\phi)} + \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)}$						$0 \qquad -\frac{12EI\ell_1}{\ell^3 (1+\phi)} - \frac{6EI}{\ell^2 (1+\phi)}$					$\frac{6EI\ell_2}{\ell^2(1+\phi)} + \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)}$							
	E A		$\iota (1 + \boldsymbol{\psi})  \iota  (1 + \boldsymbol{\psi})$							$\iota (1+\psi)  \iota (1+\psi)$						F A	. (1	·Ψ,	, .	$(1 + \psi)$	$\iota (1 + \psi)  \iota (1 + \psi)$							
	LА l		0									0	C		$\frac{l}{l}$	0		0			0							
		$-\frac{12EI}{\ell^3\left(1+\phi\right)}$						$12EI\ell_1$ 6EI			6 <i>EI</i>	_	0 12					$12EI\ell_2$	$12EI\ell_2$ 6EI									
							-	$-\frac{1}{\ell^{3}\left(1+\phi\right)}-\frac{1}{\ell^{2}\left(1+\phi\right)}$					-	U		$\overline{\ell^3}$ (	$1+\phi$	$(+\phi)$ $-\frac{1}{\ell^3(1+\phi)}$			$\ell^2$	(1 -	$(\phi)$					
	-	$\frac{12EI\ell_2}{\ell^3(1+\phi)} + \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)}$					$\frac{6EI\ell_1}{\ell^2(1+d)} + \frac{(2}{\ell^2}$			$+\frac{(2-1)}{\ell}$	$(\phi) EI$		0	$-\frac{12EI\ell_2}{\ell^3(1+\ell^2)}$		$\frac{1}{\ell^2}$	$\frac{6EI}{(1+\phi)}$	$\frac{6EI\ell_2}{\ell^2 (1+\phi)}$	EI									
				~ (	. t	Ψ)		~	<u>ر</u>	Ψ,	'	~ ( <b>1</b>		r J	~ (	· · <i>Ψ</i> J			- ( <b>1</b>	·Ψ,	/ ~	(* ' <i>Y J</i>	~ (+ ' <i>Y</i> )		~ (	* !	rj	1

# 5.4.5.3 幅のあるはり要素

$$\begin{cases} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2d} & 0 & -\frac{1}{2d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_L \\ v_L \end{cases}, \quad \begin{cases} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2d} & 0 & -\frac{1}{2d} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_J \\ v_J \\ u_K \\ v_K \end{bmatrix}$$

$$(5.4.11) \quad [K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0\\ 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{\ell^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(2-\phi)EI}{\ell(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{\ell^2(1+\phi)} & \frac{(4+\phi)EI}{\ell(1+\phi)} \end{bmatrix}$$



# 6 Dashpot

Dashpot used in STADAS is a Lysmer type dashpot<sup>1)</sup>. This element is frequently used to consider elastic base and lateral energy transmitting boundary, as described in chapter 1. The characteristics that dashpot absorbs energy of wave moving from the region in consideration to the infinite outside region well, is found by Lysmer et al, which correspond to the use as lateral boundary. The extensive use of this dashpot into elastic base is suggested by  $Joyner^{2}$ .

The use of dashpot along lateral boundary is sometimes mistaken. The property, i.e. viscous coefficient, is determined such that it is  $\rho V_s$  when acting to the relative velocity parallel to the boundary, and is  $\rho V_p$  when acting to the one perpendicular to the boundary. Therefore, viscous coefficients are computed as shown in the right figure.



Viscous coefficient of dashpot, when used for this purpose, depends on the stiffness of the material outside the analyzed region, which may change during the analysis because of the nonlinear characteristics. STADAS prepare two kind of treatment of viscous coefficient beside constant property. The first one is to read viscous coefficient through input data, which can be used when free field response is compute separately. The second one is that it is compute based on the stiffness of prescribed elements, which is used when free field response is computed simultaneously.

#### References

- <sup>1</sup>) Lysmer, J. and Kuhlemeyer, R.L., Finite Dynamic Model for Infinite Media, Journal of Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE, Vol.95, No.EM4, 1969, pp.859-877
- <sup>2</sup>) Joyner, W.B., a Method for Calculating Nonlinear Response in Two Dimensions, Bulletin of the Seismological Society of America, Vol.65, No.5, pp.1337-1357, October 1975
## 7 Solid element

Finite Element formulation of solid element is already described in chapter 1, therefore only constitutive equation is described.

## 7.1 Elastic matrix

Although elastic matrix is described in this subsection, it relates all the constitutive models because all the model uses elastic matrix in it.

Let's denote shear modulus G and bulk modulus B, then stress-strain relationships is expressed as follows:

 $(7.1.1) \qquad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$ 

where  $\sigma$  and  $\varepsilon$  are stress and strain, respectively, and [D] denotes elastic matrix. The arguments of these quantities depends on the method of analysis and constitutive models. Here, compression is taken positive for stress and strains, as described in chapter 1.

#### (1) Three dimensional analysis

Three dimensional analysis is the most general formulation, in which various quantities is expressed as follows:

#### (2) Plane strain analysis

The relations  $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \varepsilon_z = \tau_{zy} = \tau_{zx} = 0$  hold under plane strain condition. Substituting these relations into Equation (7.1.1), we obtain

(7.1.5) 
$$\{\sigma\}^{\mathsf{T}} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ \sigma_z\}$$
  
(7.1.6)  $\{\varepsilon\}^{\mathsf{T}} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}\}$   
(7.1.7)  $[D] = \begin{bmatrix} B + \frac{4}{3}G \ B - \frac{2}{3}G \ 0 \\ B - \frac{2}{3}G \ B + \frac{4}{3}G \ 0 \\ 0 \ 0 \ G \\ B - \frac{2}{3}G \ B - \frac{2}{3}G \ 0 \end{bmatrix}$ 

As shown in the equations,  $\sigma_z$  is not 0 in the plane strain analysis. Although it is necessary it s necessary in the constitutive models, it usually does not important for the user, therefore it is not output as the result. Elastic constitutive model uses this formulation.

## (3) Two dimensional analysis

The formulation in the plane strain analysis is a particular use of generalized three dimensional model into two dimensional model. However, another form shown hereafter is frequently used in the two dimensional analysis.

(7.1.8) 
$$\{\sigma\}^{\mathsf{T}} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$$
  
(7.1.9) 
$$\{\varepsilon\}^{\mathsf{T}} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$$
  
(7.1.10) 
$$[D] = \begin{bmatrix} B+G \quad B-G \quad 0\\ B-G \quad B+G \quad 0\\ 0 \quad 0 \quad G \end{bmatrix}$$

Some of the constitutive models uses this formulation. The effective confining pressure is computed as  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$  in this formulation.

This model is treated as elastic element in STADAS as well as some nonlinear constitutive models. See theoretical manual which model is used in STADAS. It is noted that, in the two dimensional model, Poisson's ratio is expressed as

$$(7.1.11) \qquad v = \frac{B-G}{B+G}$$

Constant volume condition, therefore, is expressed as v=1.0, which is muchid different from the 3-dimensional cases. It is also noted that effective mean stress is computed as  $(\sigma_x + \sigma_y)/2$ .

# 7.2 Arbitrary model for total stress analysis

Model in this section is same with the model in section 7.4, except that stiffness and strength does not depend on effective confining stress. The same model can be developed in the model in section 7.4 by putting the power for effective confining stress is set zero. There are difference, s however, in these models. For example, effective confining stress is set not to become zero in the model in section 7.4 $\overline{q}$ , but it can become negative by the model in this section.

## 7.3 Tobita-Yoshida model

This model is a constitutive model of sand.

## 7.3.1 Definition of fundamental quantities

Tenser formulation is used in this section, in which tension is taken positive as ordinary expressions are so. Fundamental quantities are as follows:

(7.3.1)	Stress	$\sigma_{ij}$	Elongation is positive
(7.3.2)	strain	$\mathcal{E}_{ij}$	Tensor strain
(7.3.3)	Static porewater pressure	$p = -\frac{1}{3}\operatorname{tr}(\sigma)$	(positive in compression)
(7.3.4)	Volumetric strain	$\varepsilon_{v} = -\operatorname{tr}(\varepsilon)$	(positive in compression)
(7.3.5)	Deviatric stress	$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma$	$\delta_{ij} = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}$
(7.3.6)	Deviatric strain	$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\varepsilon)$	$\delta_{ij} = \varepsilon_{ij} + \varepsilon_v \delta_{ij}$
(7.3.7)	Equivalent stress	$\sigma_{e} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}}$	

(7.3.8) Equivalent strain 
$$\varepsilon_e = \sqrt{\frac{2}{3}} e_{ij} e_{ij}$$

## 7.3.2 Behavior under monotonic loading

(1) yield condition

Effect of intermediate principal stress is neglected, therefore yield condition is written as

 $(7.3.9) \qquad f = \sigma_{e} - \alpha_{M} p = 0$ 

where

$$(7.3.10) \quad \alpha_{_M} = \frac{\sigma_{_e}}{p}$$

# (2) Flow rule for deviatric component

We treat the shear deformation and volumetric deformation separately. Plastic deviatric strain increment  $de_{ij}^p$  has the same direction with the normal to yield surface.

(7.3.11) 
$$de_{ij}^{p} = d\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^{*}$$

where superscript \* indicate deviatric component, i.e.,

(7.3.12) 
$$\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)_{ij}^{*} = \left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)_{ij} - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}\right)_{ij}\right\}$$

Differentiating Equations (7.3.1) and (7.3.3) with respect to  $\sigma_{ij}$ , and using the relation in Equation (7.3.5), we obtain

(7.3.13) 
$$\frac{\partial \sigma_{e}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{3}{2\sigma_{e}} s_{ij}, \quad \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{1}{3} \delta_{ij}$$

Therefore, differential of *f* becomes as follows:

(7.3.14) 
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \end{pmatrix}_{ij} = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij} - \alpha_M \frac{1}{3} \delta_{ij} \\ \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{ij}^* = \frac{3}{2\sigma_e} s_{ij}$$

Here, all these value becomes  $\sqrt{3/2}$  when  $\sigma_e=0$ .

Simplified notations, shown below, are used in the followings,

$$N_{ij} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}$$

$$N_{ij}^* = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)_{ij}^*$$

$$N_{ij}^p = \left(\frac{\partial p}{\partial \sigma}\right)_{ij} = -\frac{1}{3}\delta_{ij}$$

$$N_{ij}^s = \left(\frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma}\right)_{ij} = \frac{2}{3\sigma_e}s_{ij}$$

Using them, Equation (7.3.14) are rewritten as

(7.3.16) 
$$N_{ij} = N_{ij}^{s} - \alpha_{M} N_{ij}^{I}$$
$$N_{ij}^{*} = N_{ij}^{s}$$

## (3) Formulation of dilatancy

A generalized stress-dilatancy relationship, or energy dissipation equation is used, which is written as (7.3.17)  $s_{ij} de_{ij}^p - p d\varepsilon_v^p = p M d\xi$ 

where *M* is a constant depending on material, and  $\xi$  is a generalized strain corresponding to equivalent stress  $\sigma_e$  and is expressed as

 $(7.3.18) \quad s_{ij} de_{ij}^{p} = \sigma_{e} d\xi$ 

Squared this equation and using the relation in Equation (7.3.7), we obtain

$$\mathrm{d}\xi = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathrm{d}e_{ij}^{\,p} \mathrm{d}e_{ij}^{\,p}$$

Substituting Equations (7.3.11) and (7.3.15),

$$\mathrm{d}\xi = \mathrm{d}\lambda \sqrt{\frac{2}{3}N_{ij}^*N_{ij}^*}$$

The difference between equivalent strain and  $\xi$  are that 1)  $\xi$  is a plastic strain component, 2) it is cumulated. Using the relation in (7.3.18), Equation (7.3.17) is rewritten in the final form as

$$(7.3.19) \quad \mathrm{d}\varepsilon_{v}^{P} = \tan v \cdot \mathrm{d}\lambda$$

(7.3.20) 
$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^* - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$
  
(7.3.21) 
$$\eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}$$

#### (4) Hardening rule

Yield surface is a function of stress  $\sigma_{ij}$  and parameter  $\alpha_M$ , where  $\alpha_M$  is a function with respect to generalized strain  $\xi$ . Therefore, condition to keep yielding, df=0, is written in the form

(7.3.22) 
$$df = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{M}} \frac{\partial \alpha_{M}}{\partial \xi} d\xi = 0$$

Substituting the relation  $\partial f / \partial \alpha_M = -p$  and using Equation (7.3.18), we obtain

(7.3.23) 
$$d\lambda = \frac{1}{H_p} N_{ij} d\sigma_{ij}$$
  
(7.3.24) 
$$H_p = p \frac{\partial \alpha_M}{\partial \xi} \sqrt{\frac{2}{3} N_{ij}^* N_{ij}^*}$$

Next, we use hyperbocli function for  $\alpha_M$  as a function of generalized strain  $\xi$ , such that

(7.3.25) 
$$\alpha_{M} = \frac{\zeta}{A + \zeta/B}$$

Deferential of Equation (7.3.25) becomes

(7.3.26) 
$$\frac{\partial \alpha_{_M}}{\partial \xi} = \frac{A}{\left(A + \xi / B\right)^2}$$

## (5) Tangent modulus

Substituting Equation (7.3.23) into Equation (7.3.11) and (7.3.19) and using the relation in Equation (7.3.15), we can compute plastic deviatric strain increment and plastic volumetric strain increment as

(7.3.27) 
$$de_{ij}^{p} = \frac{1}{H_{p}} N_{ij}^{*} N_{kl} d\sigma_{kl}$$
  
(7.3.28) 
$$d\varepsilon_{v}^{p} = \frac{1}{H_{p}} \tan v N_{kl} d\sigma_{kl}$$

Therefore plastic strain increment yields

(7.3.29) 
$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} + \frac{1}{3}\mathrm{d}\varepsilon_{v}^{p}\delta_{ij} = \frac{1}{H_{p}}P_{ij}N_{kl}\mathrm{d}\sigma_{kl}$$

where

(7.3.30) 
$$P_{ij} = N_{ij}^* + \frac{1}{3} \tan v \delta_{ij}$$

When stress increment is given, plastic strain increment is computed from Equation (7.3.29). Total strain is the sum of elastic strain and plastic strain, therefore

(7.3.31) 
$$d\sigma_{ij} = L^{e}_{ijkl} ds^{e}_{kl}$$
$$L^{e}_{ij} = C^{e}_{ijkl} d\sigma_{ij}$$
$$L^{e}_{ijkl} = \left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl} + 2G\delta_{ik}\delta_{jl}$$

Strain increment is obtained from Equations (7.3.29) and (7.3.31) but usually inverse relation, stress in terms of strain, is required. This can be done by the following procedures.

(7.3.32) 
$$d\sigma_{ij} = L^{e}_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon^{p}_{kl} \right)$$

Substituting Equation (7.3.32) into Equation (7.3.29), we obtain

(7.3.33) 
$$d\sigma_{ij} = L^{e}_{ijkl} \left( d\varepsilon_{kl} - \frac{1}{H_{p}} P_{kl} N_{pq} d\sigma_{pq} \right)$$

Multiplying  $N_{ij}$  at both side of equation and replacing dummy subscript pq of  $N_{pq}d\sigma_{pq}$  in the right-hand side by ij,

(7.3.34) 
$$N_{ij}d\sigma_{ij} = \frac{H_p N_{sl} L^e_{skl} d\varepsilon_{kl}}{H_p + N_{pq} L^e_{pqmn} P_{mn}}$$

The following equation is obtained by substituting Equation (7.3.34) into right-hand side of Equation (7.3.33), therefore

(7.3.35) 
$$d\sigma_{ij} = L_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$
$$L_{ijkl} = L_{ijkl}^{e} - \frac{L_{ijkl}^{e} P_{pq} N_{sl} L_{stkl}^{e}}{H_{p} + N_{pq} L_{pqmn}^{e} P_{mn}}$$

## 7.3.3 Repeated loading

Treatment after unloading or reloading is quite different with the case of monotonic loading.

- 1) There is no elastic region
- 2) Direction of incremental deviatric strain coincide with the direction of normal direction at conjugate stress.
- 3) The value of hardening function  $H_p$  depends on distances between the stress points.

Equations to compute plastic strain increment are the same with the one for monotonic loading, Equation (7.3.29):

(7.3.36) 
$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p} = \frac{1}{H_{p}} P_{ij} N_{kl} \mathrm{d}\sigma_{kl}$$

Same with monotonic loading, dimensionless stress defined below in used.

(7.3.37) 
$$\alpha_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}, \quad \eta_{ij} = \frac{s_{ij}}{p}, \quad \eta_{ij}^{c} = \frac{s_{ij}^{c}}{p}$$

where  $\Box$  is deviatric stress at unloaded points,  $s_i$  denotes current deviatric stress, and  $s_{ij}^c$  is conjugate stress. These relation is shown in the Figure below.



Line passing the unloaded point and current stress point is expressed as (7.3.38)  $\ell_{ii} = \lambda (\eta_{ii} - \alpha_{ii}) + \alpha_{ii} \quad (\lambda > 1)$ 

The intersection between this line and yield surface

$$f=\sqrt{\frac{3}{2}\eta_{ij}\eta_{ij}}-\alpha_{M}=0$$

corresponds to conjugate stress point. At this point,

(7.3.39) 
$$\lambda = \lambda^* = \frac{-a + \sqrt{a^2 - \rho^2 b}}{\rho^2}$$

Note that  $\lambda^* = -2a / \rho^2$  for unload from skeleton curve.

where

$$a = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})\alpha_{ij} < 0$$

$$(7.3.40) \qquad b = \frac{2}{3}\alpha_{M}^{2} + \alpha_{ij}\alpha_{ij}$$

$$\rho^{2} = (\eta_{ij} - \alpha_{ij})(\eta_{ij} - \alpha_{ij})$$

1

Therefore, stress ratio at conjugate stress becomes

(7.3.41) 
$$\eta^{c} = \lambda^{*} (\eta_{ij} - \alpha_{ij}) + \alpha_{ij}$$

Normal direction of the conjugate point is computed as

$$N_{ij}^{c} = N_{ij}^{c^*} - \frac{\alpha_{M}}{k} \delta_{ij}$$

Unloading reloading is judged based on

1) unloading from skeleton curve

(7.3.42)  $df = N_{ij} d\sigma_{ij} < 0$ 

2) unloading from the histeresis curve

$$\mathrm{d}f = N_{ij}^c \mathrm{d}\sigma_{ij} < 0$$

It may be convenient to judge unloading based on strain increment although stress increment is used in the above. Equation (7.3.34) is rewritten in the form

(7.3.43) 
$$N_{ij} d\sigma_{ij} = \frac{H_p N_{st} L_{stkl}^e d\varepsilon_{kl}}{H_p + N_{pq} L_{pqmn}^e P_{mn}}$$

Here,  $H_p>0$  always hold. In many case denominator is supposed to be greater than 0, therefore sing of the right-hand side depends on numerator, in which case unloading can be judged by strain increment. The value of  $H_p$  gradually decreases, therefore denominator may become negative. In the practical procedure, therefore, judge the unloading by means of numerator, and after that check the sign of denominator.

Hardening parameter is defined as follows:

(7.3.44) 
$$H_{p} = H_{R} - (H_{R} - H_{p}^{*}) \left(\frac{\rho}{\rho_{c}}\right)^{m}$$

where

$$H_p^*$$
: Value of  $H_p$  at unloaded point

 $H_R$ : virtual hardening parameter, defined a function of cumulated plastic strain increment. In other word, when putting

$$(7.3.45) \qquad d\lambda^p = \sqrt{\frac{2}{3}} e^p_{ij} e^p_{ij}$$

it is defined as

$$H_{R} = H_{Ro} e^{a\lambda^{p}} \quad (a > 0)$$

Note 1) If value of  $\alpha$  is kept constant during cyclic loading, it can be included in  $H_{Ro}$ .

Note 2) From Equation (7.3.25), substitute  $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{A}{(A+B\xi)^2} \rightarrow \xi = \frac{A\alpha}{1-B\alpha}$  into  $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{A}{(A+B\xi)^2}$ , then  $\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{(1-B\alpha)^2}{A}$ . Substitute it into Equation (7.3.25), we botain (7.3.46)  $H_p^* = p \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} \sqrt{\frac{2}{3} N_y^* N_y^*} = \frac{p(1-B\alpha)^2}{A} \sqrt{\frac{2}{3} N_y^* N_y^*}$ 

Dilatancy coefficient will be obtained next. Stress-strain relationships is writtend as

 $(7.3.47) \quad d\varepsilon_{v} = \tan v d\lambda^{p}$ 

where

(7.3.48) 
$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$
  
(7.3.49) 
$$d\lambda^p = \frac{1}{H} N_{ij}^c d\sigma_{ij}$$

We define the phase transformation angel such that

$$(7.3.50) \quad \sigma_e - Mp = 0$$

Large amount of dilatancy occurs near the failure surface and outside the phase transformation line, i.e.,

 $(7.3.51) \quad \alpha_{_M} > M \quad \text{and} \quad d\alpha_{_c} < 0$ 

where

(7.3.52) 
$$\alpha_c = \frac{\alpha_e}{p}\Big|_{\sigma=\sigma_c} \sigma_c$$
 is current stress point

If we define,

(7.3.53) 
$$N_{ij}^{e} = \frac{2}{3\sigma_{e}} s_{ij} + \frac{1}{k} \delta_{ij}$$

then

$$(7.3.54) \quad \mathrm{d}\alpha_{c} = N_{ij}^{c}\mathrm{d}\sigma_{ij}$$

Therefore, when loading continued within the phase transform,

(7.3.55) 
$$\tan v = -\eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$

whereas in general case and unloading within the phase transform

(7.3.56) 
$$\tan v = \eta_{ij} N_{ij}^{c^*} - M \sqrt{\frac{2}{3}} N_{ij}^* N_{ij}^*$$

## 7.4 Practical simplified model by Yoshida et al.

地震応答解析などでは、1次元解析と2,3次元解析に用いられる構成則の間には大きな差が ある。

1次元解析ではせん断応力-せん断ひずみ関係が関心の対象となり、応力、ひずみとも一つ づつの成分しかないことから、特に塑性論の考えを用いなくても応力-ひずみ関係を構築するこ とができ、実際多くのモデルが作られている。この際の関心時は、いわゆる *G-y*, *D-y*関係である。1 次元の解析では、これらを対象として多くの構成則が使われる。

これに対して、2、3次元解析で用いられる構成則には一般にこのような自由さはない。モデ ルは一般的に Mohr-Coulomb の破壊条件を上限とし、硬化関数(1次元関数では応力--ひずみ関係そ のものが硬化関数である)は双曲線モデルが使われるのが普通である。これは、2次元解析では、既 往の構成則はその理論的な完全さが第1の条件となっているからの様に考えられる。また、2次元解 析となると、各種の応力経路が可能であり、それを全て満足させようとする結果中途半端なもの になっているとも考えられる。また、一般的に理論では単調載荷時の挙動に対して興味が最も大 きく、繰返し載荷に関しては、単に硬化則に Masing 則を持ち込むと行った簡単な考察でしか扱わ れておらず、1次元解析で問題としている減衰特性などは興味の対象となっていない。

必要によっては、複雑な構成則を使わねばならないときもあろう。しかし、現在の研究レベルでは、全てを満足する構成則を得ることは困難である。従って、目的に応じて、または期待されるひずみのレベルに応じて構成則を使い分けたり、構成則のパラメータの決定方法を変えたりすることが必要であるが、そのような配慮は一般の2、3次元の構成則に対しては行うことが困難である。

There are some simplified model for multi-dimensional analysis. For example, in the computer code FLUSH, shear modulus and damping characteristics depends on  $\gamma_{xy}$  (Change of angle of horizontal and vertical axis), and Poisson's ratio is constant (therefore, Bulk modulus depends on  $\gamma_{xy}$ ). These two assumptions seem somewhat curious as the behavior of soil. Moreover, the effect of the change of confining pressure is not considered. However, since it limits its available range in the dynamic response analysis, hence it seems not to succeed.

A model proposed by Duncan and Chang is also a simplified model, but have applicability more than the concept used in FLUSH. They used hyperbolic model for axial stress versus axial strain relationship. They proposed to use tangent modulus and not to use strains to define the behavior so as to avoid complexity to define strains. Their model is applicable only for monotonic loading, and, as described later in detail, it cannot be applied when confining pressure changes.

In this subsection, we show a simplified model which is available for cyclic loading and confining pressure dependency.

## 7.4.1 Characteristics of the model by Duncan and Chang

Model proposed by Duncan and Chang has following characteristics:

1) A hyperbolic model is used for axial stress versus axial strain relationships.

2) A parameter,  $R_f (\leq 1)$ , is employed so as to make good agreement between the model and test result under relatively small strains.

(7.4.1)  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = R_f (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 

where subscript f denotes compressive strength of material and subscript *ult* denotes ultimate compressive strength of the model.

1)双曲線モデルではひずみが∞にならないと応力値が終局値に至らない。一方,実際の挙動ではある有限のひずみで応力は終局値に到達する。この矛盾を解決できる。その代り,ひずみが大きくなると,応力が実際の強度を越える可能性があるが,それに対しては実際の強度を越えるところ

で応力をカットすることで適用している。



Figure 7.4.1 応力のカット

2)このパラメータを導入により,終局強度に至る前の応力-ひずみ関係の実験値への適合性を広 げたことになっている。すなわち,双曲線モデルでは最大値は実際の終局強度であるという既成 の概念を打ち破り,最大値は単なるパラメータであると見たわけである。この場合,対象としてい る最大のひずみ(または応力)を目安として最もフィットするようにパラメータの値を決めればよ い。その意味では R<sub>f</sub>は必ずしも1より小さい必要はなく,どのような値でもよい。

(3)Shear modulus at small strains depends on minimum principle stress,  $\sigma_3$ 

(7.4.2) 
$$E_i = KP_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n$$

(4)Compressive strength is computed using Mohr-Coulomb failure criterion by assuming that minimum principle stress  $\sigma_3$  is kept constant.

(7.4.3) 
$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c\cos\phi + 2\sigma_3\sin\phi}{1 - \sin\phi}$$

<sup>(5)</sup>Tangent shear modulus is expressed in terms of stress ratio

(7.4.4) 
$$E_i = (1 - R_f s)^2 E_i$$
  
where  $s = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$  is a stress ratio.

以上の事から見た, Dancan-Chang の特徴は次のようにまとめることができる。 ①せん断変形のみに着目した2,3次元に適用可能なモデルで,双曲線モデルを基本としている。 ②*R*fの導入により,終局に至る前の応力-ひずみ関係の実験値との適合性を広げている。 ③接線剛性を応力の関数とすることによって,ひずみに伴う各種の複雑さを排除している。

This model has following shortage for use in the general case although it has new ideas

以上に見たように, Dancan-Chang の方法では、いくつかの新しい試みがある。しかし、一般的な場合に用いるには、次のような欠点がある。

1) The model is applicable for only monotonic loading.

2) They assume that minimum principal stress keeps constant when computing initial modulus and strength. This is because their model is based on the result of triaxial test, in which one minimum principal stress is kept constant in the compression test. However, in general, initial modulus depends on effective confining pressure, and minimum principal stress may change.

3) Tangent modulus they derived is the one when  $\sigma_3$  is kept constant, hence not a tangent modulus when it

changes.

## 7.4.2 Basic concept of the model

Firstly, we assume that

1) shear deformation and volume change behavior can be separately treated, and

2) Volume change due to dilatancy is taken into account separately when necessary.

3) Consider confining stress dependency.

In addition, since it is difficult or impossible to define actual tangent modulus under multi-strain space, we abandon to compute tangent modulus to be used for next incremental analysis. We concentrate to compute stress increment for given strain increment.

We define the problem to compute stress increment for given (infinitesimally) small strain increment. Confining pressure increment for given strain increment dp is computed as follows:

(7.4.5) 
$$dp = B(d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vd})$$

where *B* denotes tangent bulk modulus and a function of effective confining pressure,  $d\varepsilon_v$  denotes total volumetric strain, and  $d\varepsilon_{vd}$  denotes volumetric strain due to dilatancy. Since no change of confining pressure occurs due to shear deformation (all term causing confining pressure is already considered), in the following computation (shear deformation) we can consider that confining pressure is already known.

The following dimensionless quantities are introduced for the convenience of treatment considering confining pressure dependency.

 $(7.4.6) \qquad \eta_e = \eta_e(\Gamma)$ 

where  $\sigma_e$  denotes equivalent stress,  $\varepsilon$  denotes equivalent strain,  $G_{max}$  denotes shear modulus at small strains,  $\tau_{max}$  denotes shear strength. Since confining pressure is known, the value of  $G_{max}$  can be computed even when confining pressure dependency is taken into account. The ultimate strength is expressed with respect to confining pressure as

(7.4.7) 
$$\eta_e = \frac{\sigma_e}{\tau_{max}}, \quad \Gamma = \frac{e \cdot G_{max}}{\tau_{max}}$$

と定義される。なお、 $G_{max}$ は微小ひずみ時のせん断弾性係数、 $\tau_{max}$ はせん断強度<sup> $2\pi$ </sup><sup>期注1)</sup>で、 (7.4.8)  $\tau_{max} = c\cos\theta + p\sin\theta$ 

where *c* denotes cohesion and  $\phi$  denotes internal friction angle.

Let suppose that dimensionless stress-dimensionless strain relationships is expressed as

$$\begin{split} p &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y): 拘 束 E \\ \varepsilon_v &= \varepsilon_x + \varepsilon_y: 体積ひずみ \\ \sigma_e &= \sqrt{\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}} = \sqrt{\frac{1}{2} (s_x^2 + s_y^2 + 2\tau_{xy}^2)} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}: 相当応力 \\ s_x &= \sigma_x - p, \quad s_y = \sigma_y - p: 偏差応力 \\ e &= \sqrt{2 e_{ij} e_{ij}} = \sqrt{2 (e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2)} = \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}: 相当ひずみ \\ e_x &= \varepsilon_x - \frac{1}{2} \varepsilon_v, \quad e_y = \varepsilon_y - \frac{1}{2} \varepsilon_v, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy}: 偏差ひずみ \end{split}$$

計算の手順は次のようになる。

①与えられたひずみ(増分)より、ダイレタンシーによる体積ひずみ増分を求める。②体積ひずみに対する応力増分は、次のようにして求めることができる。

(7.4.9) 
$$\begin{cases} d\sigma_x \\ d\sigma_y \end{cases} = \begin{bmatrix} B & B \\ B & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d\varepsilon_{vd} \end{pmatrix}$$

または,

(7.4.10)  $d\sigma_x = d\sigma_y = dp = B(d\varepsilon_v - d\varepsilon_{vd})$ 

ここで、dox、doyはさらにせん断成分が加わることによって変化する。しかし、既にダイレ タンシーの影響は考慮しているので、拘束圧 dp はせん断変形に対しては変化しないことに注意が 必要である。従って、以下の式の誘導では、dp やp は既知であるとして議論を進めることができる。 ③与えられた応力における無次元化応カーひずみ関係の接線剛性は、後に示すように応力比の関 数として表すことができる。これを G とすれば、実際の接線剛性 G=G<sub>max</sub>G で表される。したがっ て、各応力成分の増分量は、次式となる。

(7.4.11) 
$$\begin{cases} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{cases} = \begin{bmatrix} G & -G & 0 \\ -G & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{cases} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{cases}$$

この関係は、次のように考えるとわかりやすい。弾性では、

 $(7.4.12) \quad \sigma_e = Ge$ 

と表され、これをを自乗して展開する。

(7.4.13)  $s_x^2 + s_y^2 + 2s_{xy}^2 = 4G^2(e_x^2 + e_y^2 + 2e_{xy}^2) = G^2(4e_x^2 + 4e_y^2 + 2\gamma_{xy}^2)$ 

これを、各項ごとに対応させる。

(7.4.14) 
$$s_x^2 + s_y^2 = G^2 (4e_x^2 + 4e_y^2)$$
  
 $s_{xy} = G\gamma_{xy}$ 

なお、最初の式は、普通の応力とひずみになおすと、次のようになる。

(7.4.15) 
$$s_x^2 = 4G^2 e_x^2$$
 or  $s_x = 2Ge_x \rightarrow \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = 2G\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}$   
 $\sigma_x = -\sigma_y = G(\varepsilon_x - \varepsilon_y)$ 

If one can compute suitable value of g, then preceding basic equation can be used in the repeated loading. We assume that memory surfaces are left at each unloading in the deviatric stress surface as schematically shown in Figure 7.4.2. Corresponding to the Mohr-Coulomb criteria, memory surface is a sphere shape and it expands with tangent to previous memory surface. The memory surface disappear when it touches to previous memory surface, and is limited to Mohr-Coulomb failure criteria which is shown as dotted line in Figure 7.4.2. We set the radius of the memory surface as g, which corresponds to use Masing's criteria with similarity factor of 2. One can use, however different equations for skeleton curve and hysteresis curve depending on the model.



Figure 7.4.2. Schematic figure showing the change of memory surface and boundary surface

Mohr-Coulomb型の破壊条件を考える。この曲面は図のO点, すなわち, 降伏条件のp軸への交点を決めるために必要なものであり, 単調載荷時の骨格曲線の形状によっては, 必ずしも破

壊曲面となるとは限らないものである。

このように決めた降伏曲面に対して,応力比を定義する。ここでは,応力比は次のように定義する。

(7.4.16)  $p_o = c\cos\theta + p\sin\theta$ 

(7.4.17)  $\eta_x = s_x / p_o, \quad \eta_y = s_y / p_o, \quad \eta_{xy} = s_{xy} / p_o$ 

応力比が決れば,繰返し載荷に対する,載荷,除荷をこの応力比平面上で考える。図のよう に,除荷するたびに新しい記憶曲面を確保していくとする。新しい記憶曲面は,除荷点で以前の記 憶曲面に接するように動くとする。この記憶曲面は図で点線で示した Mohr-Coulomb の破壊円を 限界の大きさとする(応カーひずみ関係の定義によっては必ずしもそうではない)。また,現在の記 憶曲面の半径が,応カーひずみ関係で用いる応力比である。



除荷点の応力比に添字 R,除荷時の記憶曲面の中心に O の添字をつけることにすると,現在の記憶曲面の中心(チルダをつけて示すことにする)は次のように表される。

(7.4.18) 
$$\begin{aligned} & \hat{\eta}_{ij} = k \eta_{ij,c} + (1-k) \eta_{ij,R} \\ & k = \frac{(\eta_{ij} - \eta_{ij,R}) (\eta_{ij} - \eta_{ij,R})}{2(\eta_{ij} - \eta_{ij,R}) (\eta_{ij,c} - \eta_{ij,R})} \end{aligned}$$

したがって, 最初の円から順番に追いかけていけば, 現在の記憶曲面を確定することができる。

除荷の判定は次のようになる。今, i 番目の除荷範囲にいるとする。その時の除荷点に R, その除荷円の中心を c の添字で表す。現在の応力点に対応する記憶曲面はこの2点を結ぶ直線上にあるので、記憶曲面の中心にチルダを付けると、

(7.4.19) 
$$\widetilde{\eta} = \eta_R + R(\eta_c - \eta_R)$$

一方,中心から前回の除荷点および現在の応力点への距離は等しいので,

(7.4.20) 
$$(\eta - \tilde{\eta})^2 = (\eta_R - \tilde{\eta})^2$$

両式より を消去すると, R に関し解くことが出来,

(7.4.21)  $(\eta - \tilde{\eta})^2 = 2R(\eta - \eta_R)(\eta_c - \eta_R)$ 

ここで, *R*>1であれば正の方向に過去の記憶曲面より飛び出した, また, *R*<0であれば過去の記憶曲面の負の方向に飛び出したことになる。

In this section, we show equivalent stress-equivalent strain relationships, its dimensionless expression and the shape of dimensionless tangent modulus g. Hyperbolic model

(7.4.22) 
$$\sigma_{e} = \frac{G_{\max}e}{1 + \frac{G_{\max}e}{\tau_{\max}}}$$
(7.4.23) 
$$\eta_{e} = \frac{\Gamma}{1 + \Gamma}$$
(7.4.24) 
$$G' = \frac{\partial \eta_{e}}{\partial \Gamma} = (1 - \eta_{e})^{2}$$

If one uses Dancan-Chang formulation, introducing strength ratio  $R_f$  between actual and model, equations are expressed as

(7.4.25) 
$$\eta_e = \frac{1}{1 + R_f \Gamma}$$
  
(7.4.26) 
$$G' = \frac{\partial \eta_e}{\partial \Gamma} = (1 - R_f \eta_e)^2$$

Ramberg-Osgood model

(7.4.27) 
$$e = \frac{\sigma_e}{G_{\max}} \left( 1 + \alpha \left( \frac{\sigma_e}{\tau_{\max}} \right)^{\rho_{-1}} \right)$$
  
(7.4.28) 
$$\Gamma = \eta_e \left( 1 + \alpha \eta_e^{\rho_{-1}} \right)$$
  
(7.4.29) 
$$G \vartheta = \frac{\partial \eta_e}{\partial \Gamma} = \frac{1}{1 + \alpha \beta \eta_e^{\rho_{-1}}}$$

Method by Yoshida et al.

Yoshida et al <sup>3)4)</sup> proposed a model for one-dimensional analysis by which perfect agreement is obtained with arbitrary strain dependent shear modulus and damping ratio characteristics; piecewise linear or spline function is employed for skeleton curve and hyperbolic model whose values of parameter is determined based on the damping characteristics is used for hysteresis curve. The model can be used for two-dimensional analysis if one reread shear stress and shear strain into equivalent stress and equivalent strain, respectively.

We employ piecewise linear function for virgin loading and use subscript o the quantities under specified confining pressure. Then tangent shear modulus  $G_o$  is computed from  $\sigma_{e, o} = T \tau_{max, o}$ , hence tangent shear modulus G under current confining pressure as

(7.4.30) 
$$e = \frac{\sigma_{e,o}}{G_{\max,o} \left( 1 - \frac{\sigma_{e,o}}{\tau_{\max,o}} \right)}$$

After unloading, hyperbolic model is used. The equation is expressed as

$$(7.4.31) \quad \frac{\frac{G_{\max}}{\left(1 + \frac{G_{\max}e}{\tau_{\max}}\right)^2}}{G_{\max,o}\left(1 - \frac{\sigma_{e,o}}{\tau_{\max,o}}\right)^2}$$

where value of parameters with subscript R is computed following the history of loading.



これより現在の拘束圧の基での接線剛性 Gは、次式により求められる。

(7.4.32) 
$$G = \frac{G_o G_{\max}}{G_{\max,o} \left( 1 + \left(\frac{G_{\max}}{G_{\max,o}} - 1\right) \frac{\eta}{\tau_{\max,o}} \right)^2}$$

除荷して以降は,双曲線モデルが使われるので,次のようになる。

$$(7.4.33) \quad \sigma_e = \frac{G_{R,\max}e}{1 + \frac{G_{R,\max}e}{\tau_{R,\max}}}, \quad \eta = \frac{\frac{G_{R,\max}\xi}{G_{\max}\xi}}{1 + \frac{\tau_{\max}G_{R,\max}}{G_{\max}\tau_{R,\max}\xi}}, \quad g = \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \frac{G_{R,\max}}{G_{\max}} \left(1 - \frac{\tau_{\max}}{\tau_{R,\max}}\eta\right)^2$$

なお, 添字 R の付いている変数は, 履歴によって決る量である。

B の求め方

二通りを用意しておく。一つは, *κ*, *λ*より求める方法, もう一つは拘束圧のべき乗に比例する方法である。

前者の場合, 次のようになる。まず,

$$(7.4.34) \qquad d\varepsilon_v = \frac{-de}{1+e}$$

を積分し,

(7.4.35) 
$$\varepsilon_v = \ln\left(\frac{1+e_o}{1+e}\right)$$

すなわち,

(7.4.36) 
$$e = \frac{1+e_o}{e^{e_v}} - 1$$

これで e が既知となったので、後は p を求めるだけである。 正規圧密とすれば、

(7.4.37)  $p = e^{\frac{\ln p_o - \frac{d - e_o}{\lambda}}{\lambda}}$ 次に、それ以外の場合には、

$$(7.4.38) \qquad p = e^{\ln p_B - \frac{e^{-e}}{\kappa}}$$

ここで, 添字 B は前の値の意味。値としては, 小さい方をとればよい。 つぎに, 接線剛性(体積弾性係数)を求める必要がある。

(7.4.39) 
$$B = \frac{dp}{d\varepsilon_v} = \frac{p}{\kappa} (1+e) \qquad \text{ttl, } \kappa \text{tlam state}$$

ダイレタンシーモデル

1) Lysmer, J., Udaka, T., Tsai, C.-F. and Seed, H. B. (1975): FLUSH a computer program for approximate 3-D analysis of soil-structure interaction problems, Report No. EERC75-30, University of California,

Berkeley

- Duncan, J.M. and Chang, C.Y., Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, Jour. of SM, Vol.96, No.SM5, pp.1629-1653, 1970
- 3) Yoshida, N., Tsujino, S. and Ishihara, K., Stress-strain Model for Nonlinear Analysis of Horizontally Layered Deposit, Summaries of the Technical Papers of Annual Meeting of AIJ, pp.1397-1398, 1990
- Yoshida, N., Modeling of Stress-strain Relationships for Nonlinear One-dimensional Analysis of Ground: Part 2, Applicability on Liquefaction Analysis, Proc., 46th Annual Conf. of the Japan Society of Civil Engineering, pp.252-253, 1991

# 文末脚注

1)ここでは、応力比を、図に示すモール・クーロンの降伏条件に対する半径の比とする.



# 7.5 Confining pressure dependent elastic model

This model is kind of no-tension material, and elastic properties depends on effective confining pressure. Shear modulus G and bulk modulus B is defined as

(7.5.1) 
$$G = G_o \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_o}\right)^n$$
  
(7.5.2) 
$$B = B_o \left(\frac{\sigma'_m}{\sigma'_o}\right)^m$$

where  $\sigma'_m$  denote effective confining pressure,  $\sigma'_0$  denotes reference effective confining pressure, and  $G_0$  and  $B_0$  denote shear modulus and bulk modulus under reference confining pressure, respectively. When effective confining pressure is negative (or when tension), stiffness is zero.

7.6 Model considering flow of ground

## 8 Joint element

A Goodman type joint element<sup>1)</sup> is employed in STADAS, but a new formulation is conducted. Application of the joint element into Biot type formulation is also presented.

STADAS で用いているのは、Goodman タイプ<sup>1)</sup>のジョイント要素である。ジョイント要素は スリップ要素と呼ばれることもある。Goodman はジョイント要素に関し、二つの定式化を示して いる<sup>1)2)</sup>。ここで示すことから明らかなように、そのうち後者は FEM 解析、特に非線形解析には好 ましくない。また、前者は要素剛性マトリックスの算出方法しか示されていないが、非線形解析で は、得られた要素の応力から等価接線剛性を算出する過程も重要であり、ここではこれに関し、 要素中心の値を代表値とするだけで可能な新しい定式化を示す。さらに、STADAS では、Biot の式 に基づく圧密解析や、液状化解析が可能であるので、ジョイント要素もそれに適合するように修 正されている。

## 8.1 Basic concept

Joint element is schematically Figure 8.1.1, which does not have width in y-direction. Since it is composed of four nodes, it has 8 degrees of freedom in the 2-dimensional analysis. Three of them are rigid body motion in x- and y-direction and rotation. Therefore, it has 5 independent deformation modes. Figure 2 shows a set of independent modes. Among them, joint element does not have rigidity against the mode (e) in definition, hence we will discuss the rest four modes. Modes (a) and (c) and modes (b) and (d) correspond to normal and tangental direction deformations, respectively. The behavior in the normal and tangential direction can be separate and basic equations are similar to each other, hence behavior of only one direction is explained hereafter unless necessary. When necessary, they are distinguished by subscripts n and s.



Figure 8.1.1. Schematic figure of joint element and notations



Figure 8.1.2. Independ deformation modes

Relative displacement of upper side from lower side, w, is expressed using the linear interpolation function

(8.1.1)  $w = w^{top} - w^{bottom} = \{B\}\{u\}$ ここで、 $\{B\}$ は補間関数で、次式のような仮定する。 (8.1.2)  $\{B\} = \left\{-\frac{1}{2} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L} - \frac{1}{2} + \frac{x}{L} - \frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right\}$ 

The expression in Figure 8.1.2 is recognized that the interpolation function is separeted into two

$$(8.1.3) \qquad \{B\} = \left\{-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}\right\} + \left\{\frac{x}{L} \quad -\frac{x}{L} \quad +\frac{x}{L} \quad -\frac{x}{L}\right\} = \left\{B^{O}\right\} + \left\{B^{H}\right\}$$

Let the stiffness of the element per unit length is denoted by *k*, stress per unit length *s* is expressed as. (8.1.4)  $\sigma = kw$ 

Then, against the modes (a) and (b) in Figure 8.1.2, equivalent nodal force

(8.1.5)  $\{F^o\} = \{F_1^o \ F_2^o \ F_3^o \ F_4^o\}^T$ 

is computed as

(8.1.6) 
$$\{F^{o}\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B^{o}\}^{\mathsf{T}} \sigma dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B^{o}\}^{\mathsf{T}} k\{B^{o}\} dx\{u\} = L\{B^{o}\}^{\mathsf{T}} k_{c}\{B^{o}\}\{u\} = [K^{o}]\{u\}$$

where subscript c denotes the quantity at the center of element, and

Here, stiffness at the center is used as representative value of stiffness in joint element.

Modes (c) and (d) in Figure 8.1.2, are similar to so called hourglass mode deformation<sup>2)</sup>. Let base vector for hourglass mode deformation  $\{h\} = \{1 \ -1 \ 1 \ -1\}^T$ , then, using the interpolation function

(8.1.8) 
$$\{B^{\scriptscriptstyle H}\} = \left\{ \frac{x}{L} - \frac{x}{L} \frac{x}{L} - \frac{x}{L} \right\}$$

and relative displacement

(8.1.9)  $W^{H} = \{B^{H}\}\{u\}$ 

against hourglass mode deformation, equivalent nodal force  $\{F^H\}$  is computed as

(8.1.10) 
$$\{F^{H}\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B^{H}\}^{\mathrm{T}} k\{B^{H}\} dx\{u\} = \frac{k_{c}L}{12} \{h\} \{h\}^{\mathrm{T}} \{u\}$$

Therefore, stiffness against hourglass mode  $[K^H]$  is obtained as

(8.1.11) 
$$\left[K^{H}\right] = \frac{k_{c}L}{12} \{h\}\{h\}^{T}$$

Stiffness matrix of joint element is obtained as the sum of Equations (8.1.4) and (8.1.6), which is the same with the one that Goodman and Taylor first derived<sup>1</sup>). The difference, however, appears in the calculation of equivalent nodal force from the one derived by second equation by Goodman<sup>2</sup>), in which generalized strain is defined as

(8.1.12) 
$$\begin{cases} \varepsilon_{s} \\ \varepsilon_{n} \\ \omega \end{cases} = \frac{1}{2L} \begin{cases} u_{s,3} + u_{s,4} - u_{s,1} - u_{s,2} \\ u_{s,3} + u_{s,4} - u_{s,1} - u_{s,2} \\ 2(u_{s,3} - u_{s,4} - u_{s,2} + u_{s,1}) \end{cases}$$

を考えているが、このうち最初の二つは Figure 8.1.2の(a)(b)に対応し、最後は(c)に対応しているが、 (d)の変形モードが考えられていない。また、モード(c)に対する剛性も上で示したものとは異なっ ている。自由度の数から見てこの扱いでは任意の外力に対して得られた応力から外力と同じ等価 節点力を求めることができないことは明らかであり、この意味で二つ目の定式化は正しくない。



Figure 8.1.3. Modulus for computing the generalized force against hourglass mode deformation

ここでは4つの変形モードを考えているので、少なくとも4つの応力成分が一つの要素内で 必要である。通常の有限要素解析のように2点以上のガウス積分をすれば、1点で二つの応力成分が あるのでこの条件を満たしている。しかし、そのためには要素中心以外の点の応力も必要となる。 通常の要素との整合を取るために、ここでは要素中心の状態変数のみで処理できる方法を示す。

Figure 8.1.2の(a)(c)の変形モードに関しては、式(8.1.6)より、

 $(8.1.13) \quad {F^o} = {B^o} \sigma_c$ 

Next, let generalized force and generalized displacement against hourglass mode as Q and q, then equivalent nodal force is computed as<sup>3)</sup>

(8.1.14) 
$$\{F^H\} = \{h\}Q, \quad q = \{h\}^T \{u\}, \quad Q = cq, \quad c = \frac{k_c L}{12}$$

where  $k_c$  is apparent secant modulus,  $k_{sec}$ , in each incremental analysis as shown in Figure 8.1.3. From (8.1.13) and (8.1.14), equivalent nodal force is kown to be expressed by the state variable at the center of the element.

Goodman shows two kind of stiffness matrix<sup>1)4)</sup>, but the second formulation is recognized to be insufficient, which is easily recognized from above formulation.

## 8.2 Application for two-phase problem

For the analysis of the mixture of soil and water based on Biot's formulation, we define effective normal stress, similar to ordinary stress, as

$$(8.2.1) \qquad \sigma'_n = \sigma_n - p$$

where p denotes pore water pressure. We employ interpolation function one degree lower than the one for relative displacement, i.e., p is constant, then equilibrium equation of water is automatically satisfied.

Substituting the definition of effective stress into Equations (8.1.4) and (8.1.10), total equilibrium equation yields

$$(8.2.2) \qquad \{F_n\} = \{F_n^o\} + \{F_n^H\} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \{B\}^{\mathsf{T}} \sigma_n dx = ([K_n^o] + [K_n^\kappa])\{u_n\} - \{K_p\}p = [K_n]\{u_n\} - \{K_p\}p$$

where

(8.2.3) 
$$\left[K_{p}\right] = \int_{\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left\{B^{o}\right\}^{\mathrm{T}} dx = \left\{B^{o}\right\}^{\mathrm{T}} L$$

is pore pressure matrix.

Referring to the geometrical configuration before the deformation, and assuming that water flows through both sides, water flowed in during the unit time interval, W, is computed as

(8.2.4) 
$$W = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \dot{w}_n dx = -\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left( \dot{U}_{n,top} - \dot{U}_{n,bottom} \right) dx$$

where U denotes displacement of water. On the other hand, volumetric change is expressed as  $\{K_p\}^T \{\dot{u}_n\}$ , hence continuity condition yields

(8.2.5) 
$$\{K_p\}^{\mathrm{T}}\{\dot{u}_n\} = -\int_{topside} \left[N_{top}\right] dx \{\dot{U}_{top}\} + \int_{bottomside} \left[N_{bottom}\right] dx \{\dot{U}_{bottom}\}$$

where [N] denotes interporation function of water in the neighboring element. Subscript *top* and *bottom* indicate element neighboring to the joint element at the top side and bottom side, respectively. Since joint element is a widthless element, we cannot compute velocity of water at the boundary of the element from the state at the joint element, which may be inconvenient in the formulation.

Equations (8.2.2) and (8.2.5) are basic equations, which corresponds to u-U-p formulation. Since p appears only in Equation (8.2.2), hence cannot be eliminated, we cannot derive, so called, u-U formulation for a joint element.

In the preceding formulation, we do not consider water flow through the neighboring joint element. Flow through the neighboring element, however, may occur when both side of joint element separate can be considered by assuming suitable permeability shown later.

From the assumption, if basic equation is converted into u-p formulation, it is Christian type formulation, in which pore water pressure is defined at the element but not in the node. This can be done using the differential method firstly proposed by Akai and Tamura<sup>5)</sup> for consolidation analysis (the formulation here is more general form). Water flowed into the joint element during unit time increment is obtained as

(8.2.6) 
$$W = L \left( \kappa_{top} \frac{h - h_{top}}{\ell_{top}} + \kappa_{bottom} \frac{h - h_{bottom}}{\ell_{bottom}} \right)$$

where k denote permeability. The notation h denotes head of water that is expressed as

(8.2.7) 
$$h = \frac{p}{\rho_f g} - \frac{\{X\}^T}{g} (\{b\} - \{\ddot{u}\})$$

where  $\{b\}$  denotes gravity force vector. On the other hand, volumetric change of joint element is computed as left side of Equation (8.2.5). Then continuity condition yields

(8.2.8) 
$$\{K_p\}^{\mathsf{T}}\{\dot{u}_n\} = W = \alpha \left(p - \rho_f \{X\}^{\mathsf{T}}(\{b\} - \{\ddot{u}\})\right) - \sum \alpha_i \left(p_i - \rho_f \{X_i\}^{\mathsf{T}}(\{b\} - \{\ddot{u}_i\})\right)$$

where

(8.2.9) 
$$\alpha_i = \frac{L\kappa_i}{\rho_f g\ell_i}, \quad \alpha = \sum \alpha_i$$

where subscript *I* is either *top* or *bottom* and summation takes both sides. If the effect of the term  $\rho_{f}\{\ddot{u}\}$  (Effect of velocity head) is neglected, Equation (8.2.6) yields

(8.2.10) 
$$\{K_p\}^{\mathsf{T}}\{\dot{u}_n\} = W = \alpha \left(p - \rho_f \{X\}^{\mathsf{T}}\{b\}\right) - \sum \alpha_i \left(p_i - \rho_f \{X_i\}^{\mathsf{T}}\{b\}\right)$$

A pair of Equations (8.2.2) and (8.2.8), or Equations (8.2.2) and (8.2.10) are basic equations for u-p formulation, in which displacement of water does not appear. The coefficient matrix is unsymmetric, which may be inconvenient. Let use a backward difference for the change of pore water pressure, and put

(8.2.11) 
$$\frac{\partial u}{\partial t} dt = du, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dt = du$$

where dt denotes time increment, substitution into Equations (8.2.2) and (8.2.10) yields

(8.2.12)  $[K_n] \{ du_n \} - \{ K_p \} p = \{ dF_n \} - \{ K_p \} p_{i-dt}$ 

$$(8.2.13) \quad \left[K_{p}\right]^{\mathrm{T}}\left\{du_{n}\right\} = \alpha \mathrm{d}t\left(p - \rho_{f}\left\{X\right\}^{\mathrm{T}}\left\{b\right\}\right) - \sum \alpha_{i} \mathrm{d}t\left(p_{i} - \rho_{f}\left\{X_{i}\right\}^{\mathrm{T}}\left\{b\right\}\right)$$

where  $p_{t-dt}$  denotes pore water pressure at the beginning of increment.

If one want to consider water flow through neighboring joint elements, the term corresponding to  $\alpha_l$  in Equation (8.2.9) is necessary. It becomes approximately possible to assume relatively large value of permeability towards the tangential direction of joint element.

Goodman, R.E. and Taylor R.L., A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Jour. of SM, ASCE, Vol. 94, No. SM3, May, 1968, pp. 637-659.

Flanagan, D.P. and Belytschko, T.A., A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, Int. Jour. Numerical Methods in Engineering, Vol. 17, pp. 679-706, 1981.

Yoshida, N., Large Deformation Analysis of Liquefaction-induced Ground Displacement by Reduced Integral Method, Proc. 3<sup>rd</sup> Symposium of Numerical Method of Mechanics, pp. 391-396, 1989.

Goodman, R.E., Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks, West Publishing Company, 1976.

Akai, K. and Tamura, T., Numerical Analysis of Multiple-dimensional consolidation accompanied with Elasto-plastic constitutive equation, Proc. JSCE, No. 269, pp. 95-104, 1976.

Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. and Bettess, P., Drained, Undrained, Consolidation Behavior Assumptions in Soils, Limits of Validity, Geotechnique, Vol. 30, pp. 385-395, 1980.

## 9 Eigen value problem and modal damping

## 9.1 Conversion into standard eigen value problem

Equation of motion is written in the form

 $(9.1.1) \qquad [M]{\{\ddot{u}\}} + [K]{\{u\}} = \{0\}$ 

where [M] denotes mass matrix, [K] denotes stiffness matrix,  $\{u\}$  denotes displacement, and dot denotes differential with respect to time. Here, displacement  $\{u\}$  is assume to be expressed as

(9.1.2)  $\{u\} = \{X\}e^{i\omega t}$ 

Substituting Equation (9.1.2) into Equation (9.1.1), and using the relation  $e^{i\omega t} \neq 0$ , we obtain (9.1.3)  $\left(-\omega^2 [M] + [K]\right) \{X\} = \{0\}$ 

Therefore, the condition that there is no nontrivial solution yields

$$9.1.4) \qquad \left|-\lambda[M]+[K]\right| = 0$$

where

(

 $(9.1.5) \qquad \lambda = \omega^2$ 

Equation (9.1.4) is a eigen equation for free vibration.

Generally speaking, Equation (9.1.4) is a polynomial with N degree of freedom, where N denote degrees of freedom of the model. From the characteristics of [M] and [K], Equation (9.1.4) has N positive solutions, therefore there is N independent vibration modes. However, since lumped mass is employed in STADAS, if diagonal part of [M] is zero, order of Equation (9.1.4) or total degrees of freedom of the system decreases. This phenomenon occurs even for consistent mass system. When there is  $n_o$  degrees of freedom with zero mass, order of polynomial in Equation (9.1.4) becomes  $n=N-n_o$ , therefore there is only n independent vibration modes. Here n is called dynamic degrees of freedom. In the followings, we first convert Equation (9.1.4) into standard eigen equation for n=N, and secondly we modify it for n < N.

Because lumped mass system is used in STADAS, [M] is a diagonal matrix, therefore is written as (9.1.6)  $[M] = [\eta][\eta]$ 

where

 $(9.1.7) \qquad \left[\eta\right] = \left[\sqrt{m_{ij}}\right]$ 

mi: mass moment (or moment of inertia) for i-th degree of freedom

Substituting Equation (9.1.6) into Equation (9.1.3), and multiply  $[\eta]^{-1}$  from the left, we obtain

$$\left(-\lambda[\eta]+[\eta]^{-1}[K]\right)(X) = \{0\}$$

Therefore

(9.

(9.1.8) 
$$(-\lambda[I] + [\eta]^{-1}[K][\eta]^{-1})([\eta]{X}) = \{0\}$$
  
 $[I] = [\eta]^{-1}[\eta] : 単位行列$ 

Here, since  $m_i \neq 0$ , inverse matrix,  $[\eta]^{-1}$  always exists. Therefore

1.9) 
$$\| [A] - \lambda [I] = 0 [A] = [\eta]^{-1} [K] [\eta] = [K_{ij} \sqrt{m_i m_j}]$$

As the condition that all the solution of Equation (9.1.9) is not zero, standard eigen equation is obtained, which is

If there is zero mass freedom, inverse matrix,  $[\eta]^{-1}$  cannot be computed. Let suppose that degrees of freedom in Equation (9.1.1) are rearranged so that freedoms with nonzero mass and zero mass are separated in the form

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{aa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dot{u}_{a} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{aa} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} K_{ab} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K_{ba} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{a} \end{bmatrix} = \{0\}$$

or

 $(9.1.10) \quad \left[M_{aa}\right]\!\!\left\{\ddot{u}_{a}\right\}\!+\!\left[K_{aa}\right]\!\!\left\{u_{a}\right\}\!+\!\left[K_{ab}\right]\!\!\left\{u_{b}\right\}\!=\!\left\{0\right\}$ 

 $(9.1.11) \quad [K_{ba}]\{u_a\} + [K_{bb}]\{u_b\} = \{0\}$ 

Equation (9.1.11) is solved with respect to  $\{u_b\}$ 

(9.1.12)  $\{u_b\} = -[K_{bb}]^{-1}[K_{ba}]\{u_a\}$ 

Substituting into Equation (9.1.10) yields

(9.1.13)  $[M_{aa}]\langle \ddot{u}_{a} \rangle + \langle [K_{aa}] - [K_{ab}][K_{bb}]^{-1}[K_{ba}] \langle u_{b} \rangle = \{0\}$ 

Since inverse of mass matrix exists in Equation (9.1.13), the same procedure for standard eigen equation is used. Here after obtaining eigen vector corresponding to  $\{u_a\}$ , eigen vector corresponding to  $\{u_b\}$  is computed from Equation (9.1.12).

## 9.2 Modal damping

There are, roughly classified, three methods to obtain damping matrix. The first one is to measure actual damping coefficient. The second one is to use Rayleigh damping or other similar damping. The third one is described in this section. The first one is, in theory, the most accurate, but never used in practise because of the difficulty to measure actual damping coefficient directly. It does not, however, indicate that actual damping cannot be measured. They are usually measured in an indirect manner such as free vibration damping or forced vibration behavior by means of vibrator. The method described here is a method to make damping matrix from these indirectly measure damping.

This method has been used in the structural analysis, but has not been used in the analysis of ground. The one reason may be that, as can be known from the process of derivation, damping matrix derived by this method is a full matrix. Unlike the case of structures, total degrees of freedom are much larger. Therefore, effort has been done to reduce total computing time and memory size using the characteristics of band matrix and diagonal matrix, which effort will result in vain if full matrix appears.

The second, and the largest reason may come from the difference of the concept of damping. Structure is usually separated into structural element such as beam and column and foundation is assumed to be rigid in the structural analysis. Damping characteristics of these models are measured in good accuracy. By the way, the damping of structural material itself is not so large. In practise, behavior of nonstructural element affects overall behavior. Next, radiational damping cannot occur under fixed base modeling, which also affect the overall behavior. Therefore, without considering these two phenomena, response of the structure is estimated too large. Consideration of these effects has been conducted by employing suitable internal damping, in which case the concept of damping constant is convenient.

In the contrary, this kind of affair hardly occurs. There is no element corresponding to nonstructural element. If radiation damping may cause problem, incident wave analysis can be conducted. Therefore damping matrix is to be made considering only the actual internal damping. According to many tests on soil characteristics, material damping itself hardly affects the overall behavior of ground under the loading rate due to earthquake; hysteresis damping and radiation damping are usually predominant. Therefore, in the analysis of ground, internal damping is usually employed for the purpose to make numerical integration stable by putting suitable damping against higher mode response. Of course, in the linear or nonlinear analysis, hysteresis damping is replaced into internal damping, but analysis is usually conducted in frequency domain.

これに対して、地盤の解析では、このような恐れはあまりない。地盤材料では、建築構造物の非構造部材に相当するような部材はなく、また、基盤の固定条件が問題であるなら、入射波入力を行う解析も可能である。したがって、減衰マトリックスはここの材料の実際の減衰を基にして作成すればよい。多くの実験結果によれば、地震による載荷速度程度ではそのような減衰力はそれほど系全体の応答挙動に影響を与えないことが分かっている(このことは減衰がないことを

意味しているのではないことに注意されたい。地震による載荷速度,継続時間を考慮して系をモ デル化すればという意味である)。したがって地盤の解析では非線形挙動を逐次積分して行く手法 を用いている多くの解析では,地盤材料固有の減衰は考慮せず,ただ,数値計算の安定性をあげ るために,高次の振動モードに対して減衰力が大きくなる剛性マトリックス比例減衰を導入し, 応答結果に支配的な低次のモードに対してはほとんど減衰を考慮しないという方法が多く用いら れてきている。弾性,等価線形のモデル化では内部減衰をモデル化するのにも用いられる。

These consideration indicates that damping described in this section may be needless in the analysis of ground. However, it may be useful to use variety functions that STADAS has.

Equation of motion is expressed as

 $(9.2.1) \qquad [M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$ 

where  $\{F\}$  denotes external load vector. We assume that this equation can be uncoupled, or eigen analysis is possible to compute damping matrix.

Using the result of eigen value problem in the previous section, displacemene vector is expressed as the sum of eigen vectors as

 $(9.2.2) \qquad \{u\} = [\xi]\{q\}$ 

where

 $[\xi][{X_1}{X_2}{X_3}....{X_n}]$ : Model matrix

and  $\{q\}$  denote modal displacement. Substituting these equations into Equation (9.2.1), and multiplying  $[\xi]^T$  from the left, we obtain

 $(9.2.3) \qquad [\xi]^{\mathsf{T}}[M][\xi][\dot{q}] + [\xi]^{\mathsf{T}}[C][\xi][\dot{q}] + [\xi]^{\mathsf{T}}[K][\xi][q] = [\xi]^{\mathsf{T}}\{F\}$ 

Orthogonal condition of eigen function indicates that  $[\xi]^{T}[M][\xi]$  and  $[\xi]^{T}[K][\xi]$  are diagonal matrix, i.e.,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_j \end{bmatrix}$$
  
$$\boldsymbol{m}_j = \{\boldsymbol{X}_j\}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{X}_j\}: \text{ generalized mass}$$
  
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_j \end{bmatrix}$$
  
$$\boldsymbol{k}_j = \{\boldsymbol{X}_j\}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} \end{bmatrix} \{\boldsymbol{X}_j\}: \text{ generalized stiffness}$$

Therefore, the condition that equation of motion, Equation (9.2.1) can be uncoupled is written in the form (9.2.5)  $[\xi]^{T}[C][\xi] = [c_{i}]$ 

When Equation (9.2.5) holds, Equation (9.2.3) can be written by each independent mode such that (9.2.6)  $m_i \ddot{q}_i + c_i \dot{q}_i + k_j q_j = ([\xi]^T \{F\})_i \quad (j = 1 \rightarrow n)$ 

Dividing Equation (9.2.6) by  $m_j$ , and using the relation  $\omega_j = \sqrt{m_j / k_j}$  (*j*-th order circular frequency), we obtain

$$(9.2.7) \qquad \ddot{q}_j + 2h_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2q_j = f_j$$

where

(9.2.4)

$$(9.2.8) \qquad h_j = \frac{c_j}{2\omega_j m_j}$$

is damping constant of each mode. Using Equation (9.2.5), we can compute damping matrix from damping coefficient of each mode, which result in

$$[C] = \left( [\xi]^{\mathrm{T}} \right)^{-1} \left[ c_j [\xi]^{-1} \right]^{\mathrm{T}} \left[ 2j_j \omega_j m_j [\xi]^{-1} = \left( [\xi]^{-1} \right)^{\mathrm{T}} \left[ m_j [2j_j \omega_j [\xi]^{-1} \right]^{\mathrm{T}} \right]^{-1}$$
  
From Equation (9.2.4),

$$\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{m}_j \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\boldsymbol{m}_j \end{bmatrix}$$
  
$$\therefore \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\boldsymbol{m}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix}$$
  
$$\left( \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix}^{-1} \right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\boldsymbol{m}_j \end{bmatrix} \quad (\because \begin{bmatrix} \boldsymbol{M} \end{bmatrix} \text{ is diagonal})$$

Substitution of this equation into above, we obtain

(9.2.9) 
$$[C] = [M] [\xi] [2j_j \omega_j] [1/m_j] [\xi]^{\mathrm{T}} [M]$$

Damping matrix is now derived.

(9

In the uncoupled equation, external force vector in Equation (9.2.1) is expressed as

(2.10) 
$$\{F\} = -[M] \{E\} \ddot{u}_{g}$$
$$f_{i} = \frac{-\{X_{j}\}[M] \{E\}}{m_{j}} \ddot{u}_{g} = -\beta_{i} \ddot{u}_{g}$$
$$\beta_{i} = \frac{\{X_{j}\}^{\mathrm{T}}[M] \{E\}}{\{X_{j}\}^{\mathrm{T}}[M] \{X_{j}\}} : \text{ participation factor}$$

## 9.3 Strain energy proportional damping

The value of modal damping may be computed from the vibration test, in which case it is computed directly. There may be, however, several cases that damping constant of each element is specified, in which case modal damping constant is computed by using various methods. The method described here is one of these one, in which damping is proportional to the strain energy stored in each element.

Strain energy stored in each element under the vibration of each mode is computed as

(9.3.1) 
$$E_{j,k} = \frac{1}{2} \{ X_k \}^{\mathsf{T}} [\eta_j] \{ X_k \}$$

Therefore damping energy of each element is computed as

$$(9.3.2) D_{j,k} = 4\pi h_{j,k} E_{j,k}$$

As an assembly of each element, damping energy of whole system becomes

$$(9.3.3) D_k = 4\pi \sum_{j=1}^m h_{j,k} E_{j,k}$$

On the other hand, damping energy of the whole system is computed as

$$(9.3.4) D_k = 4\pi h_k \sum_{j=1}^m E_{j,k}$$

Since both damping energy should be the same, we obtain modal damping value

(9.3.5) 
$$h_{k} = \frac{\sum_{j=1}^{m} h_{j,k} \{X_{k}\}^{\mathsf{T}} [\eta_{j}] \{X_{k}\}}{\{X_{k}\}^{\mathsf{T}} [K] \{X_{k}\}}$$